(26) 二項分布に於ける信頼限界の一つの性質

（宮城縣庁） 鴨 井 光 夫

次に述べる事柄は筆者が実際問題を取扱っている際に豫想されたもので，東北大淡中先生の御協力を戴いて数値的に許りでなくもう少し解析的に説明を試みようとしたが，完全な解決がまだ得られて居らない。 もし読者の誰方かに御教示を戴ければ幸ひである。

筆者は，その仕事の必要上，二項分布をする様な比率の上限と下限の精密な値について調べた。 今N回の独立試行中或る事象がa回起ったとして標本比率を $p = a/N$ と置き，又危険率αでのpの上限と下限を夫れ夫れ，$\bar{p}$，$\underline{p}$ と置くこととする。

以下αとNは固定して考える。 この時近似的に次の関係が成立する。

$$\overline{(\underline{p})} \fallingdotseq p \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

之が鴨井によって気附かれた事実である。

例えば Snedecor: Statistical Methods 1950年版 p.4 の表の一部（第一表参照）によると $\alpha = 0.025$，$N = 50$の際

$$p = \frac{15}{50} = 0.30 \quad \text{に対して} \quad \underline{p} = 0.18 = \frac{9}{50},$$

$$(\underline{P})^{-} = \frac{9}{50} \text{ の上限} = 0.31 \fallingdotseq 0.30$$

即ち (1) が成立する。

この関係は相等広い範囲で成立するのであって、Nが小，pが小なる場合でも近似の度合は相当に好い様である。

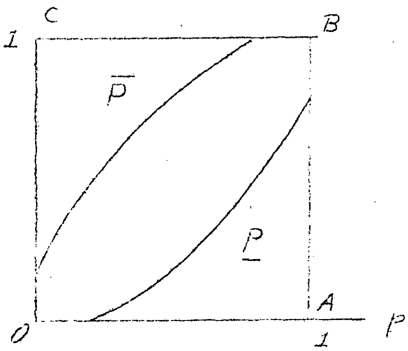
鴨井が実際に取扱った問題ではNが非常に大，pは Snedecor の表では計算出来ない程度に小さい場合であったが，それでも非常に精密な近似度で (1) の関係が見られた。

次に上の関係を図的に表示して見る。

a \ N	50	
9	9	31
10	10	34
11	12	36
12	13	38
13	15	41
14	16	43
15	18	44

第一表

図に於いて横軸は標本比率，縦軸で信頼限界を読みとるものとして，上限下限の曲線が OB に関して近似的に対称になる。之が上式 (1) の幾何学的な意味である。



数値的に云へば，例へば

$$2\alpha = 0.05, \quad NP > 9, \quad \frac{1}{2} \geq p \geq 0$$

の時は

$$0 < N\left\{(\underline{P})^{-} - p\right\} < 1.41$$

なる不等式が成立する。之は数表に依る計算から得られたものである。

次に，Fisher - Yates の数表中

Table VIII$_1$ Binomial and Poisson Distributions : Limit of the Expectation を基礎として得られた数値

を掲げる。　但し計算の結果に多少疑問がある様である。

$$N\{(\underline{P})^{-}-p\}$$ の表

$\alpha=0.025$ の場合

NP	p					
	.5	.4	.3	.2	.1	0
9	.30	.50	.73	.95	1.18	1.41
16	.22	.42	.64	.84	1.06	1.28
36	.13	.34	.55	.75	.96	1.15
144	.06	.26	.46	.66	.86	1.06
∞	.00	.18	.39	.59	.78	.98

$\alpha=0.005$ の場合

NP	p					
	.5	.4	.3	.2	.1	0
9	.53	.85	1.16	1.50	1.85	2.19
16	.39	.69	1.00	1.31	1.63	1.95
36	.26	.54	.84	1.14	1.45	1.76
144	.13	.41	.70	.99	1.29	1.58
∞	.00	.30	.57	.87	1.17	1.44

以上で数値的には目的の結果の大体の様子が分ったが，之を解析的に証明することが望ましい。（特に表中に出てゐない部分の計算のために）。　之については深中先生によれば正規分布であらっぽく近似して考へれば大体の傾向は勿論分るのであるが，数値的な結果には遠い。　又 H. Scheffe と J. Tukey の近似公式（Ann. Math. Statistics 20 (1949)）

即ち

$$\frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(r)\Gamma(n-r+1)}\int_0^{\alpha} x^{n-r}(1-x)^{r-1}dx=\beta$$

$$(0.9<\alpha<1,\quad 0<\beta<0.1)$$

の解が　$n \fallingdotseq \frac{\chi^2}{4}\frac{1+\alpha}{1-\alpha}+\frac{r-1}{2}$　なることを用ひれば或は解決

されるものと思はれる．（χ^2 は自由度 $2n$ の χ^2－分布の 100β 点）。

但し計算は容易でない。上記の公式については山形大逸見氏の研究がある。（山形大紀要（1950））

以　　上