(16) 或る方程式系の解の性質について

――――小川先生の論文に寄すII――――

樋口伊佐夫

"系統統計量"なる論文[1]の中で阪大小川潤次郎先生が mean や variance を推定するための optimum spacing をきめる方程式系を導かれた。母分散が既知のときの mean を推定するための方程式系について，筆者はさきに解の存在と一意性 従つて symmetric spacing に限ることを証明したが[2]この小論文では母平均が既知の場合について解析を行う。

$$
\begin{aligned}
&K(x_1, x_2, \cdots\cdots x_k) \\
&= \frac{\left(x_1 e^{-\frac{x_1^2}{2}}\right)^2}{\int_{-\infty}^{x_1} e^{-\frac{t^2}{2}} dt} + \sum_{i=2}^{k} \frac{\left(x_i e^{-\frac{x_i^2}{2}} - x_{i-1} e^{-\frac{x_{i-1}^2}{2}}\right)^2}{\int_{x_{i-1}}^{x_i} e^{-\frac{t^2}{2}} dt} + \frac{\left(x_k e^{-\frac{x_k^2}{2}}\right)^2}{\int_{x_k}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt} \cdots\cdots (1)
\end{aligned}
$$

なる k 変数の函数 K の値を最大にするような $x_1, x_2, \cdots\cdots x_k$ が optimum spacing である。[1]

そこで (1) を x_i ($i = 1, 2, \cdots\cdots, k$) について偏微分したものを 0 と置いて得られる連立方程式

$$\left(\frac{\int_{x_{i-1}}^{x_i} t^2 e^{-\frac{t^2}{2}}dt}{\int_{x_{i-1}}^{x_i} e^{-\frac{t^2}{2}}dt} - \frac{\int_{x_i}^{x_{i+1}} t^2 e^{-\frac{t^2}{2}}dt}{\int_{x_i}^{x_{i+1}} e^{-\frac{t^2}{2}}dt}\right)\left(\frac{\int_{x_{i-1}}^{x_i}(x_i^2-t^2)e^{-\frac{t^2}{2}}dt}{\int_{x_{i-1}}^{x_i} e^{-\frac{t^2}{2}}dt} + \frac{\int_{x_i}^{x_{i+1}}(x_i^2-t^2)e^{-\frac{t^2}{2}}dt}{\int_{x_i}^{x_{i+1}} e^{-\frac{t^2}{2}}dt}\right)=0$$

（$i=1,2,\cdots\cdots,k$）（但しこゝで$-\infty$を x_0 とあらわし$+\infty$を x_{k+1} とあらわす）$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ (2)

の根の中から探すことになる。

そこで(2)の左辺の最初の *factor* を G_i，後の *factor* を F_i とすると，各 i について，F_i の方を採るか，G_i の方を採るかにより，例えば

$$G_1=0,\ F_2=0,\ F_3=0,\ G_4=0,\ \cdots\cdots,\ F_k=0$$

のような連立方程式が 2^k 個出来る。この 2^k 個の連立方程式の解の中から探さねばならない。

ところが *order statistics* を基礎にしているので統計的に意義のあるのは

$$x_1 < x_2 < \cdots\cdots < x_k \qquad \cdots\cdots\cdots \qquad (3)$$

の順序をみたすものだけである。

実は後に（§3）に示す如く，順序をみたし，且(1)に極大値を与えるような解は

$$F_1=0,\ F_2=0,\ F_3=0,\ \cdots\cdots,\ F_k=0 \qquad \cdots\cdots \qquad (4)$$

なる F_i ばかりから成る方程式系の根の中から探せばよい。（小川先生，丸山文行氏，宮本良雄氏等によりいろいろ憶測されたり計算されたりしたのは，2^k 個の方程式系の中の，このただ一つの場合に限られていたが，それでよかったことになる。）

方程式系 (3) は 2^k 組の実根の解を有つことを証明する。

さてその 2^k 組のうちどれが (1) を真に最大にするかという問題，それが解決すればよいが，未だに成功していない。

しかしその問題の解決えの一つの手がかりとみられるものを最後に（§4）示し大方の御教示を仰ぎたいと思う。

このような仕事は確かに統計的には価値少きものである。

殊に統計数理の立場からはナンセンスなものである。

しかし筆者がさきに取扱った連立方程式が連立一次方程式のような性格をもち方程式系 (3) が連立二次方程式のような性格をもつということは，統計から出て来た数学としてほんの少し面白いことではなかろうか，と思う。

最初に断つておくが全体にわたって事柄はすべて実数の範囲である。

§ 1. 方程式系 $F_1=0,\ F_2=0,\ \cdots\cdots\ F_k=0$ の解について。

主なる結果は次の通りである。

1) $x_1, \cdots\cdots, x_k$ の何れを 0 とするような解も存在しない。

2) $x_1, \cdots\cdots, x_k$ の各々に正負の符号を指定すれば解 $(x_1^0, \cdots\cdots, x_k^0)$ は唯一組存在する。従って方程式系は 2^k 組の解をもつ。

3) $i=1, \cdots\cdots, k$ に対して，i を一つ fix すれば $j>i$ なる x_j^0 はすべて正，$j<i$ なる x_j^0 はすべて負であるようなものについては，(3) の order が成立つ。

従って，逆に丸山文行氏が数値計算の上から予見した如く，order を満足する解は，$(k+1)$ 組出来，正のものの個数を指定すれば一意にきまる。

以下その証明をする。

$$f(x,y) \equiv \frac{\int_x^y (y^2-t^2)e^{-\frac{t^2}{2}}dt}{\int_x^y e^{-\frac{t^2}{2}}dt}$$

とする。有限な y に対しては，$\lim_{x\to\pm\infty} f(x,y)$ が存在するから，それを $f(\pm\infty, y)$ と書く。

また，

$$\lim_{x\to y} f(x,y) = \lim_{y\to x} f(x,y) = 0$$

従って，$f(x,y)$ は x, y の連続函数である。

また，$f(x,0) = -\int_x^0 t^2 e^{-\frac{t^2}{2}}dt \Big/ \int_x^0 e^{-\frac{t^2}{2}}dt$

だから，$x \neq 0$ なら常に $f(x,0) < 0$ である

更に，x, y の如何にかゝわらず

$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2} > 0, \quad \frac{d^2 f(\pm\infty, y)}{dy^2} > 0$$

（証明は附録Ⅰ）

また　$x \neq \infty$ のときは $\lim_{y\to\infty} f(x,y) = \infty$

$x \neq -\infty$ のときは $\lim_{y\to-\infty} f(x,y) = \infty$

従って，$x = z = 0$，　$x = z = +\infty$，　$x = z = -\infty$

のときをのぞき，x と z とを固定すると，

$$f(x,y) + f(z,y) = 0 \quad \cdots\cdots \quad (5)$$

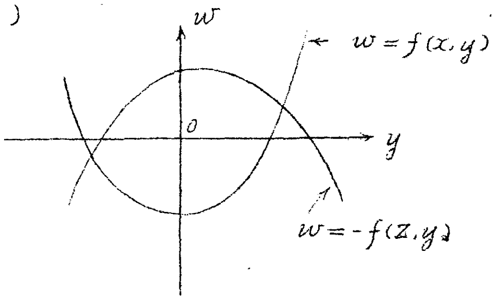
をみたす y は正負一つづつきまる。（$x = z = 0$ のときは $y = 0$ となる）（図1参照）

$f(x,y)$，$f(z,y)$ の連続性から (5) を恒等的にみたすような

$$y=\psi(x,z)\quad(\psi\geq 0)$$

$$y=\varphi(x,z)\quad(\varphi\leq 0)$$

なる二つの一價連続函数の存在と一意性（これ等の函数をみたす，x, y, z に非ざれば（5）はみたされない）がわかる。



（図 1）

明かに φ, ψ は対稱

$$\varphi(x,z)=\varphi(z,x),\quad \psi(x,z)=\psi(z,x)$$

であり

$$-\varphi(-x,-z)=\psi(x,z)\qquad\cdots\cdots\qquad(6)$$

なる関係が成立つ。

また，$\psi(x,z)=0$，$\varphi(x,z)=0$ となるのは何れの場合も $x=z=0$ のときに限ることも明かである。

さて

$$\begin{array}{ll}
x_1=\psi(-\infty,x_2) & x_1=\varphi(-\infty,x_2)\\
x_2=\psi(x_1,x_3) & x_2=\varphi(x_1,x_3)\\
\vdots & \vdots\\
x_k=\psi(x_{k-1},\infty) & x_k=\varphi(x_{k-1},\infty)
\end{array}$$

なる $2k$ 個の方程式を考える。各 i について $x_i=\varphi(\cdot\cdot)$ の方を選ぶか $x_i=\psi(\cdot\ \cdot)$ の方を選ぶかして組合せると，k 個の方程式から成る連立方程式が 2^k 組出来る。

その方程式系の集りを $\mathcal{G}_{(\varphi,\psi)}$ とあらわそう。

$$F_i = f(x_{i-1}, x_i) + f(x_{i+1}, x_i)$$

だから，連立方程式(4)の解は，$\mathcal{G}(\varphi,\psi)$ の解と全体として一致する。

$\mathcal{G}(\varphi,\psi)$ に属するどの方程式系も，0を含むような解（例えば $x_1 = x_1^\circ$，$x_2 = 0$，$x_3 = x_3^\circ$，----，$x_k = x_k^\circ$）をもたない。

何故ならば，

今 $x_j = 0$ が根であるとすると，$0 = \varphi(x_{j-1}, x_{j+1})$（或いは $0 = \psi(x_{j-1}, x_{j+1})$）から $x_{j-1} = 0$，$x_{j+1} = 0$ でなければならず，このことから順々に，

$$x_{j-2} = 0, \quad x_{j-3} = 0, \quad \text{-----}, \quad x_1 = 0$$

$$x_{j+2} = 0, \quad x_{j+3} = 0, \quad \text{-----}, \quad x_k = 0$$

でなければならない。ところが

$$\psi(\pm\infty, 0) \neq 0, \qquad \varphi(\pm\infty, 0) \neq 0$$

だから明かにこれは不合理である。

依って，1）が証明された。

さて，$\mathcal{G}(\varphi,\psi)$ に属する方程式系は，何れも唯一組の解を必ずもつことを証明する。すると，2）が証明されたことになる。そのため函数 $f(x, y)$ に関する次の性質を用いる。

先ず

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} \begin{cases} > 0 & (x, y \text{ 共に負のとき}) \\ = 0 & (x = y = 0 \text{ のとき}) \\ < 0 & (x, y \text{ 共に正のとき}) \end{cases} \quad \cdots(7)$$

証　明

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = e^{-\frac{x^2}{2}} \int_x^y (x^2-t^2) e^{-\frac{t^2}{2}} dt \Big/ \left(\int_x^y e^{-\frac{t^2}{2}} dt \right)^2 \cdots\cdots (8)$$

右辺の分子の $\int_x^y (x^2-t^2) e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ の integrand の正負を考えると $x \neq y$ のときは明か、更に

$$\lim_{y \to x} \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = -x \quad \text{だから}$$

$x = y$ のときも (7) が成立つ。

次に、

lemma 1.

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} + \frac{\partial f(z,y)}{\partial y} + \left| \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} \right| + \left| \frac{\partial f(z,y)}{\partial z} \right|$$

は $y = \varphi(x, z)$ をみたす x, y, z に対しては常に nonpositive

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} + \frac{\partial f(z,y)}{\partial y} - \left| \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} \right| - \left| \frac{\partial f(z,y)}{\partial z} \right|$$

は $y = \psi(x, z)$ をみたす x, y, z に対しては、常に non-negative になる。

又、いづれの場合も 0 となるのは $x = y = z$ のときに限る。

（$y = \varphi(\pm\infty, z)$、　$y = \psi(\pm\infty, z)$ のときも成立つ）

証明は、附録 II、

さて、$x = y = z = 0$ の場合を除いて考察しよう。

$$\left| \frac{\partial \varphi(x,z)}{\partial x} \right| = \left\{ \left| \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} \right| \Big/ \left| \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} + \frac{\partial f(z,y)}{\partial y} \right| \right\}_{y=\varphi(x,z)}$$

に於て右辺の分母は lemma 1 により負（0 ではない）だから

$$\left|\frac{\partial\varphi(x,z)}{\partial x}\right|-1=\left\{\left(\left|\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right|+\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}+\frac{\partial f(z,y)}{\partial y}\right)\right.$$
$$\left.\div\left(-\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}-\frac{\partial f(z,y)}{\partial y}\right)\right\}_{y=\varphi(x,z)}$$

となり，更にこの Lemma 1 によれば右辺の分母は正で，分子は負だから

$$\left.\begin{array}{l}\left|\dfrac{\partial\varphi(x,z)}{\partial x}\right|<1\\ \text{同様に,}\\ \left|\dfrac{\partial\psi(x,z)}{\partial x}\right|<1,\ \left|\dfrac{d\varphi(-\infty,x)}{dx}\right|<1,\ \left|\dfrac{d\psi(-\infty,x)}{dx}\right|<1\end{array}\right\}\cdots(9)$$

なることがわかる。

Lemma 2.

$x=g(y)$ を $-\infty<y<\infty$ で定義された。微分可能な一価函数で

$$\lim_{y\to\infty}|g(y)|<\infty,\ \lim_{y\to-\infty}g(y)\neq+\infty,\ \left|\frac{dg}{dy}\right|<1$$

とする。 すると，$x=g(y)$，$y=\varphi(x,z)$ を同時にみたす y は z の函数として一意にきまり，それを $y=h(z)$ とすると，$h(z)$ は微分可能で $\left|\frac{dh}{dz}\right|<1$ かつ $\lim_{z\to\infty}|h(z)|<\infty$，$\lim_{z\to-\infty}h(z)\neq+\infty$ となる。

同じことが $x=g(y)$，$y=\psi(x,z)$ を同時にみたす y についてもいえる。

証　明

$$\left.\begin{array}{l}u=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(y+x)\\ v=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(y-x)\end{array}\right\}\quad\cdots\cdots\cdots\quad(10)$$

なる直交変換を行うと，$y=\varphi(x,z)$ は，

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(u+v)-\varphi\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(u-v),\ Z\right)=0 \quad \text{-------} \qquad (11)$$

にうつる。 Zを parameterと考えると、(11)をみたすvはuの一価函数として得られる。 何故なら(11) の左辺を、$Q(u,v;Z)$とすると、

$$\frac{\partial Q}{\partial v}=\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{d\varphi(x;Z)}{dx}\frac{\partial x}{\partial v}=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(1+\frac{\partial\varphi(x,Z)}{\partial x}\right)$$

(9) によればこれは正であることがわかる。

即ち

$$\frac{\partial Q}{\partial v}>0 \quad \text{---------} \qquad (12)$$

同様に

$$\frac{\partial Q}{\partial u}>0 \quad \text{---------} \qquad (13)$$

を得る。 また、uを fix して $v\to\pm\infty$ とすると、

$$\lim_{v\to\infty}Q(u,v;Z)=\lim_{v\to\infty}\frac{1}{\sqrt{2}}(u+v)-\varphi(-\infty,Z)=\infty$$

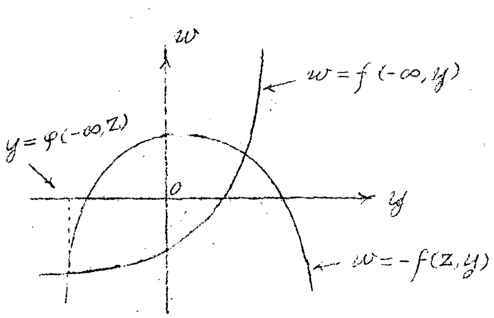
$$\lim_{v\to-\infty}Q(u,v;Z)=\lim_{v\to-\infty}\frac{1}{\sqrt{2}}(u+v)-\varphi(\infty,Z)=-\infty$$

($\varphi(-\infty,Z)$, $\varphi(\infty,Z)$ は有限である(図2)から)

このことと(12)即ちQがvに関して単調増大であることからZ, u をfix すれば

$Q(u,v;Z)=0$

をみたすvは唯一つきまる。



(図 2)

Qがuに関して連続であること、$-\infty<u<\infty$ の範囲をuが

動き得ることを考慮に入れると，$Q(u, v; Z) = 0$ を恒等的にみたす $v = \lambda(u; Z)$ なる $-\infty < u < \infty$ で定義された一価連続函数が唯一つ存在することになる。

$$\frac{d\lambda}{du} = \left(-\frac{\partial Q}{\partial u} \Big/ \frac{\partial Q}{\partial v}\right)_{Q=0}$$

で (12) 及び (13) によりこれは負になるから，λ は u の単調減小函数である。

一方 $x = g(y)$ は直交変換 (10) により

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(u-v) - g\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(u+v)\right) = 0 \quad \cdots\cdots \quad (14)$$

にうつる。 (14) の左辺を $R(u, v)$ とすると，

$$\frac{\partial R}{\partial u} = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{dg}{dy}\frac{\partial y}{\partial u} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(1 - \frac{dg}{dy}\right)$$

假定により $\left|\frac{dg}{dy}\right| < 1$ だからこれは正になる。

即ち

$$\frac{\partial R}{\partial u} > 0 \quad \cdots\cdots\cdots \quad (15)$$

同様に

$$\frac{\partial R}{\partial v} < 0 \quad \cdots\cdots\cdots \quad (16)$$

なることもわかる。 また假定により $\lim_{y\to\infty} g(y) \neq -\infty$

* $\lim_{v\to\infty} R(u, v) = -\infty$，$\lim_{v\to -\infty} R(u, v) = \infty$ なることがわかる。 このことと (15) とを使って，$R(u, v)$ の連続性と u が実数全体を動き得ることを考慮に入れると，$-\infty < u < \infty$ で定義された一価連続函数 $v = \mu(u)$ が唯一つ存在して (14) を恒等的にみたすことがわかる。

$$\frac{d\mu(u)}{du} = \left(-\frac{\partial R}{\partial u} \Big/ \frac{\partial R}{\partial v}\right)_{R=0}$$ に於て (15) 及び (16) によればこれは正となる。

* $\lim_{y\to\mp\infty} g(y) \neq \pm\infty$ だから u を fix して $v \to \pm\infty$ のとき

即ち $\mu(u)$ は単調増加函数である。

さて

$$\underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{\lim_{u \to \infty} \lambda(u;Z) = -\infty} \quad \text{-------} \quad (17)$$

何故なら $\lim_{u \to \infty} \lambda(u;Z) \neq -\infty$ とし，$\lambda(u;Z)$ の下界の一つを $\alpha(Z)$ とする。

即ちすべての u に対し $\lambda(u;Z) > \alpha(Z)$　今 $\varepsilon > 0$ とし $u_0(Z) > |\alpha(Z)| + \varepsilon$ なる $u_0(Z)$ をとると，

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\lambda(u_0;Z) + u_0(Z)\right) > \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\alpha(Z) + u_0(Z)\right) > \frac{1}{\sqrt{2}}\varepsilon$$

ところで $\lambda\left(u_0(Z);Z\right) = v_0(Z)$ とすると $u_0(Z)$, $v_0(Z)$ は (11) をみたすから

$$\varphi\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(u_0(Z) - v_0(Z)), Z\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(u_0(Z) + v_0(Z)\right) > \frac{1}{\sqrt{2}}\varepsilon > 0$$

依って $\varphi \leqq 0$ なることに反する。　従って (17) が成立つ。

次に，

$$\underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{Z \neq -\infty \text{ ならば } \lim_{u \to -\infty} \lambda(u;Z) = \infty} \quad \text{--} \quad (18)$$

何故なら $\lim_{u \to -\infty} \lambda(u;Z) \neq \infty$ としその上界の一つを $\beta(Z)$ とする。$\varphi(x, Z)$ が x に関して連続なること，$\varphi(-\infty, Z)$ が $Z \neq -\infty$ のとき有限なことから，$Z \neq -\infty$ ならすべての x に対して，$\varphi(x, Z) > -K(Z)$ が成立つような正数 $K(Z)$ が存在する。　今 $u_0(Z) < -\beta(Z) - \sqrt{2}K(Z)$ なる $u_0(Z)$ をとると，

$$-K(Z) < \varphi\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\left(u_0(Z) - \lambda\left(u_0(Z)\right)\right); Z\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\lambda(u_0(Z)) + u_0(Z)\right) < \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\beta(Z) - \beta(Z) - \sqrt{2}K(Z)\right)$$

$$= -K(Z)$$

となり矛盾になる。

従って (18) が成立たねばならぬ。

$\lambda(u;z)$ の u に関する単調減少性と (17), (18) 及び $\mu(u)$ の単調増大性とにより, $z \neq -\infty$ なる限り z を fix すれば, $\lambda(u;z)=\mu(u)$ をみたす u, v は必ず存在し且つ唯一組に限ることが帰結される。 $\lambda(u;z)$ は z を動かすとき, z の連続函数であることは Q の連続性から明かである。

従って,

$$\lambda(u(z), z) = \mu(u(z)) \quad \cdots\cdots \quad (19)$$

を恒等的にみたすような z の連続函数 $u(z)$, $v(z)$ が唯一組存在することがわかる。

$$\frac{1}{\sqrt{z}}(u(z)+v(z)) \equiv h(z)$$

とすると $y=h(z)$ は $y=g(x)$, $y=\varphi(x,z)$ から x を消去して得られる一価連続函数である。

(そういう函数の存在と一意性が証明されたことになる.)

さて, $\lim_{z\to\infty}|h(z)|<\infty$ (明かに $u(\infty)$, $v(\infty)$ は有限だから, 即ち parameter z が ∞ のときにも u, v が存在することは今までの証明から明か。)

次に $\lim_{z\to-\infty} h(z) \neq +\infty$ を証明する。

先ず一般に zが負のところでは

$$\frac{\partial\varphi(x,z)}{\partial z} > 0 \quad \cdots\cdots\cdots \quad (20)$$

が成立つ. 何故なら (20) の左辺は

$$\left\{-\frac{\partial f(z,y)}{\partial z}\Big/\left(\frac{\partial f(z,y)}{\partial y}+\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right)\right\}_{y=\varphi(x,z)}$$

であるが lemma 1 により分母は負, 分子が負であるから,

$y=\varphi(x,z)$ をみたす y も負，従つて (7) により分子も負になる。

さて (19) から

$$\frac{du(z)}{dz}=\left\{-\frac{\partial\lambda(u,z)}{\partial z}\Big/\left(\frac{\partial\lambda(u,z)}{\partial u}-\frac{d\mu(u)}{du}\right)\right\}_{\lambda=\mu}$$

となるが λ の u に関する単調減少性と μ の単調増大性により左辺の分母は負となる。

依って

$$\operatorname{sign}\frac{du(z)}{dz}=\operatorname{sign}\left(\frac{\partial\lambda(u,z)}{\partial z}\right)_{\lambda=\mu}$$

ところで

$$\operatorname{sign}\frac{\partial\lambda(u,z)}{\partial z}=\operatorname{sign}\left(-\frac{\partial Q}{\partial z}\Big/\frac{\partial Q}{\partial v}\right)_{Q=0}$$

(12) によりこの右辺は $\operatorname{sign}\left(-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)_{Q=0}$ 即ち

$$\operatorname{sign}\left(\frac{\partial\varphi\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(u-v),z\right)}{\partial z}\right)_{Q=0}$$

に等しい。　ところが $z<0$ のところでは (20) によりこれは正　即ち $u(z)$ は $z<0$ のところでは単調増加である。

従つて　$\lim\limits_{z\to-\infty}u(z)<u(0)<+\infty$，

又

$$\frac{dv(z)}{dz}=\left(\frac{d\mu(u)}{du}\frac{du}{dz}\right)_{\lambda=\mu}>0\quad(z<0\text{ のとき})$$

だから　$\lim\limits_{z\to-\infty}v(z)<+\infty$

従つて

$$\lim_{z\to-\infty}h(z)<+\infty$$

最後に $\left|\frac{dh}{dz}\right|<1$ を証明する。

今 $y-\varphi(g(y),z)\equiv S(y,z)$ とすると

$$S\,(\,h\,(z),\,z\,)=0$$

は恒等的に成立つ。

$$\frac{\partial S}{\partial y}=1-\frac{\partial\varphi(g,z)}{\partial g}\,\frac{dg}{dy}$$

に於て假定により $\left|\frac{dg}{dy}\right|<1$. 又 (9) から $\left|\frac{\partial\varphi(g,z)}{\partial g}\right|<1$

依って $\frac{\partial S}{\partial y}>0$ 從って

$$\left|\frac{dh}{dz}\right|-1=\left\{\left(\left|\frac{\partial S}{\partial z}\right|-\frac{\partial S}{\partial y}\right)\Big/\ \frac{\partial S}{\partial y}\right\}_{S=0} \quad だから$$

$$sign.\left(\left|\frac{dh}{dz}\right|-1\right)=sign\left(\left|\frac{\partial S}{\partial z}\right|-\frac{\partial S}{\partial y}\right)_{S=0}$$

$$=sign\left(\left|\frac{\partial\varphi(g,z)}{\partial z}\right|-1+\frac{\partial\varphi(g,z)}{\partial g}\,\frac{dg}{dy}\right)\ \cdots\cdots\ (21)$$

$|dg/dy|<1$ なる假定を再び用いて (21) の最後の式の括弧の中は,

$$\left|\frac{\partial\varphi(g,z)}{\partial z}\right|+\left|\frac{\partial\varphi(g,z)}{\partial g}\right|-1\qquad\cdots\cdots\qquad(22)$$

より小さいことがわかる。 一方 lemma 1 を用いれば容易に

$$\left|\frac{\partial\varphi(g,z)}{\partial z}\right|=\left\{\left|\frac{\partial f(z,y)}{\partial z}\right|\Big/\left(-\frac{\partial f(g,y)}{\partial y}-\frac{\partial f(z,y)}{\partial y}\right)\right\}_{y=\varphi(g,z)}$$

(この分母は正である)

$$\left|\frac{\partial\varphi(g,z)}{\partial g}\right|=\left\{\left|\frac{\partial f(g,y)}{\partial g}\right|\Big/\left(-\frac{\partial f(g,y)}{\partial y}-\frac{\partial f(z,y)}{\partial y}\right)\right\}_{y=\varphi(g,z)}$$

(この分母も正である)

となることがわかり, 再び lemma 1 を用いて (22) が non-negative になることがわかる。

従って(21)から $|dh/dz|<1$ が帰結される。

以上で $y=\varphi(x,z)$ の時の lemma 2 が証明された。

符号に注意してこの証明と同様のことをやれば $y=\psi(x,z)$ の時もいえる。

以　上

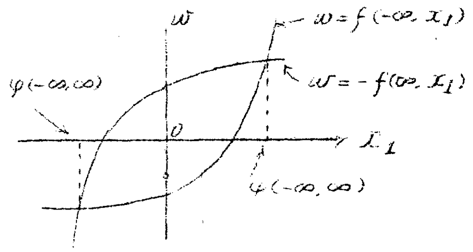
さて $\psi(-\infty,\infty)$，$\varphi(-\infty,\infty)$ は何れも有限である。（図3参照）

従って

$x_1=\psi(-\infty,x_2)$

$x_1=\varphi(-\infty,x_2)$

なる函数は



（図　3）

$$\lim_{x_2\to\infty}|\psi(-\infty,x_2)|<\infty,\quad \lim_{x_2\to\infty}|\varphi(-\infty,x_2)|<\infty$$

又 $\psi(-\infty,-\infty)<\infty$ から $\lim\limits_{x_2\to-\infty}\psi(-\infty,x_2)<\infty$

一方 $\lim\limits_{x_2\to-\infty}\varphi(-\infty,x_2)=-\infty\neq\infty$

さらに(9)が成立つからこの二つの函数は何れも lemma 2 の $g(y)$ に関する仮定をみたす。従って，$G_{(\varphi,\psi)}$ から今任意に一つの方程式系をとり出し，その最後の方程式 $x_k=\varphi(x_{k-1},\infty)$（又は $x_k=\psi(x_{k-1},\infty)$）をのぞいた $k-1$ 個の方程式を考えると，その $k-1$ 個の方程式を恒等式にみたすような

$$x_1=h_1(x_2),\quad x_2=h_2(x_3),\ \cdots\ x_{k-1}=h_{k-1}(x_k)$$

なる一価連続函数の組が一意的にきまることが lemma 2 を順次適用してゆくことにより帰結される。

又この $x_{k-1}=h_{k-1}(x_k)$ をみたすような x_{k-1},x_k でなけれ

は今とり出した方程式系はみたされないことも明かである。

さてこうして出來た $h_{k-1}(x_k)$ は

$$\left|\frac{d h_{k-1}(x_k)}{d x_k}\right| < 1, \quad \lim_{x_k\to\infty}\left|h_{k-1}(x_k)\right| < \infty, \lim_{x_k\to-\infty} h_{k-1}(x_k) \neq \infty$$

なる性質をもつている。従つて lemma 2 の証明の始めの部分のように

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(x_k + x_{k-1}) = u_k, \quad \frac{1}{\sqrt{2}}(x_k - x_{k-1}) = v_k$$

により変数変換すれば

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(u_k - v_k) = h_{k-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(v_k + u_k)\right)$$

を恒等的にみたす $-\infty < u_k < \infty$ で定義された一価連続函数 $v_k = \mu(u_k)$ が唯一つ存在して単調増加であることがわかる。

$\lim_{u_k\to\infty} \mu_k(u_k) \neq \infty$ とすると $\lim_{u_k\to\infty} h_{k-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(v_k + u_k)\right) = \infty$ となり $\lim_{x_k\to\infty}\left|h_{k-1}(x_k)\right| < \infty$ に反する。従つて

$$\lim_{u_k\to\infty} \mu(u_k) = \infty$$

一方 $\frac{1}{\sqrt{2}}(u_k + v_k) = \varphi\left(\infty, \frac{1}{\sqrt{2}}(u_k - v_k)\right)$

をみたす v_k は u_k の一価函数として一意にきまりその函数が単調減小であることが lemma 2 の時と同様に証明出來る。

その函数を $\lambda_k(u_k)$ とすると $\lim_{u_k\to-\infty} \lambda(u_k) = \infty$ なること (17) の証明と同様にしてわかる。

λ_k の定義域も $-\infty < u_k < \infty$ であることに注意すればこれ等のことから $\lambda_k(u_k) = \mu_k(u_k)$ をみたすような u_k が唯一つ存在することがわかる。従つて、それに対応する v_k が唯一つ存在し，従つて

$$x_{k-1} = h_{k-1}(x_k), \quad x_k = \varphi(x_{k-1}, \infty)$$

を同時にみたす x_k は存在して唯一に限ることがわかる。

(6) を用いて符号に注意すれば同様にして

$$x_{k-1}=h_{k-1}(x_k),\qquad x_k=\varphi(x_{k-1},\infty)$$

を同時にみたす x_k も唯一つ必ず存在することが証明出来る。

$h_1,\ h_2,\ \cdots\cdots,\ h_{k-1}$ の一価性から明かに，$\mathcal{G}(\varphi,\psi)$ からとり出した方程式系に対して解が存在して唯一組に限ることがわかる。

従って，この§の始めにあげた 2) の性質が証明されたことになる。

次に，3) を証明しよう。

先づ，$x_1=\varphi(-\infty,x_2)$ をみたす x_1，x_2 については $x_1<x_2$ が常に成立つことを言おう。

$x_1<0$ だから $x_2<0$ のところで考えれば十分である。

今，$\varphi(-\infty,x_2)\geq x_2$ とすると $f(x_2,x_1)$ は $x_1=x_2$ のとき 0 で

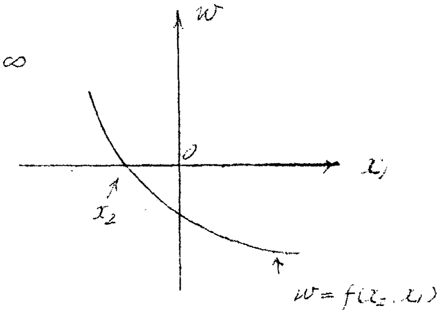
$f(x_2,0)<0,\ \lim\limits_{x_1\to-\infty} f(x_2,x_1)=+\infty$

$\dfrac{\partial^2 f(x_2,x_1)}{\partial x_1^2}>0$

だから

$f(x_2,\ \varphi(-\infty,x_2))\leq 0$

となる（図4参照）



（図 4）

一方

$$f(x_2,\ \varphi(-\infty,x_2))+f(-\infty,\varphi(-\infty,x_2))=0$$

がみたさるべきであるから，$f(-\infty,\varphi(-\infty,x_2))\geq 0$

ところが $f(-\infty,x_1)$ は $x_1<0$ なら常に負であるから，これは矛盾である。

従って $\varphi(-\infty,x_2)<x_2$ でなければならない。

次に一般に，$x<0$・$z<0$ のとき $y=\varphi(x,z)$ をみたす y は x と z との間にあることを証明しよう。

$x<z<0$ とする。$f(x,x)=0$, $f(x,-\infty)=\infty$ $f(x,y)$ は，上方に Concave だから $f(x,y)$ は $y\leq x<0$ なる y の範囲で y に関して単調減小である。

だから今 $\varphi(x,z)\leqq x$ と仮定すれば

$$f(x,\varphi(x,z))\geq f(x,x)=0$$

一方 $f(x,\varphi(x,z))+f(z,\varphi(x,z))=0$ が常にみたされるから $f(z,\varphi(x,z))\leqq 0$ でなければならない。

$f(z,y)$ は $y\leqq z<0$ の範囲で y に関して単調減小で，$f(z,z)=0$ だから $\varphi(x,z)\geq z$ 即ち $z\leqq\varphi(x,z)\leqq x$ となり，$x<z$ なる仮定に反する。

従って $\varphi(x,z)>x$ でなければならない。

又 $x<z<\varphi(x,z)$ としても同様の論法で矛盾になることがわかる。従って $x<\varphi(x,z)<z$ でなければならない。

$\varphi(x,z)$ の対称性から明らかに $z<x<0$ としても，$z<\varphi(x,z)<x$ でなければならない。

又，$z=x$ のときは $\varphi(z,z)=z$ だから間にはさまれるという結論にかわりない。　　　　以上

上の二つのことにより，

$$x_1=\varphi(-\infty,x_2),\ x_2=\varphi(x_1,x_3),\ \cdots\cdots,\ x_j=\varphi(x_{j-1},x_{j+1}) \qquad \cdots(23)$$

を同時にみたす $x_1, x_2, \cdots x_j$ の間には，Order (3) がみたされねばならないことがわかる。

即ち，どの x_i も 0 でないこと，即ち $x_1, \cdots, x_j$ はすべて負であること（x_{j+1} は正であってもよい）に注意すれば (23) の第一の式から $x_1<x_2$ でなければならず，(23) の第二の式から

$x_1 < x_2 < x_3$ か，$x_1 > x_2 > x_3$ か，$x_1 = x_2 = x_3$ かの何れかが成立たねばならず 第一の式の結果から $x_1 < x_2 < x_3$ でなければならない。 以下同様にして，(23)の最後から二つ目の式までと，$x_j < 0$ なることにより上の結論を得る。

また，φ と ψ との関係(9)を用いると，

$$x_k = \psi(\infty, x_{k-1}),\quad x_{k-1} = \psi(x_k, x_{k-2}), \cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots, x_{j+1} = \psi(x_{j+2}, x_j), \qquad \cdots\cdots (24)$$

を同時にみたす $x_k, x_{k-1}, \cdots\cdots, x_{j+1}$ についても order(3) が成立たねばならない。

方程式系(4)の解の中で i を fix すれば $j > i$ なる x_j° はすべて正，$j < i$ なる x_j° はすべて負であるような解は $\mathcal{Y}_{(\varphi,\psi)}$ の中で $x_1 = \varphi(-\infty, x_2), x_2 = \varphi(x_1, x_3), \cdots\cdots, x_k = \varphi(x_{k-1}, \infty)$ なる全部が φ から成る方程式系の解か，全部が ψ から成る方程式系の解か，或いは，(23) と (24) とを合せて出来る型の方程式系の解かである。

何れにしても Order(3) がみたされることが明かになった。これによって丸山文行氏の予言は確認されたことになる。

§2. 方程式系(4)の解のうち order をみたす $k+1$ 組はすべて(1)の極大点であること

$$G(x, y, z) \equiv \frac{\int_x^y t^2 e^{-\frac{t^2}{2}} dt}{\int_x^y e^{-\frac{t^2}{2}} dt} - \frac{\int_y^z t^2 e^{-\frac{t^2}{2}} dt}{\int_y^z e^{-\frac{t^2}{2}} dt}$$

$$F(x, y, z) \equiv f(x, y) + f(z, y)$$

とする， 明かに

$$G(x, y, z) = f(z, y) - f(x, y)$$

従って $F(x,y,z)=0$ なる x,y,z に対しては

$$G(x,y,z)=2f(z,y)=-2f(x,y) \cdots\cdots \qquad (25)$$

容易にわかる如く

$$\left.\begin{array}{ll} x<y<0 \text{ のとき } & f(x,y)<0 \\ y<x<0 \text{ のとき } & f(x,y)>0 \\ 0<y<z \text{ のとき } & f(z,y)<0 \\ 0<z<y \text{ のとき } & f(z,y)>0 \end{array}\right\} \cdots\cdots\cdots \qquad (26)$$

今

$$\frac{\partial^2 K}{\partial x_p \partial x_q} = k_{pq} \quad \text{とする。}$$

方程式系 (4) の order をみたす解の一つを $x_1^\circ, x_2^\circ, \cdots, x_k^\circ$ とし

$$x_1^\circ < x_2^\circ < \cdots\cdots < x_k^\circ \quad \cdots\cdots \qquad (27)$$

とする。k_{pq} にこの $x_1^\circ, \cdots\cdots, x_k^\circ$ を入れた値を k_{pq}°。
とする。 よく知られている通り $x_1^\circ, \cdots\cdots, x_k^\circ$ が K の極大点であることをいうには, $\{k_{pq}^\circ\}$ のつくる matrix が negative definite であることを示せばよい。

まず,

$$\frac{\partial K}{\partial x_i} = e^{-\frac{x_i^2}{2}} F(x_{i-1}, x_i, x_{i+1}) G(x_{i-1}, x_i, x_{i+1}) \cdots \qquad (28)$$

((2) の左辺に $e^{-\frac{x_i^2}{2}}$ をかけたもの) となるが F, G の定義から

$$k_{i,i+1} = 2e^{-\frac{x_i^2}{2}} f(x_{i+1}, x_i) \frac{\partial f(x_{i+1}, x_i)}{\partial x_{i+1}} \cdots\cdots \qquad (29)$$

更に一般に
$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = e^{-\frac{x^2}{2}} f(y,x) \Big/ \int_x^y e^{-\frac{t^2}{2}} dt \quad \cdots\cdots (30)$$

なる関係があるから,

$$k_{i,i+1} = -2e^{-\left(\frac{x_i^2}{2}+\frac{x_{i+1}^2}{2}\right)} f(x_i, x_{i+1}) f(x_{i+1}, x_i) \Big/ \int_{x_i}^{x_{i+1}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \quad \cdots\cdots \quad (31)$$

となる。

又

$$k_{i+1,i} = -2e^{-\frac{x_{i+1}^2}{2}} \frac{\partial f(x_i, x_{i+1})}{\partial x_i} f(x_i, x_{i+1})$$

これに（30）を用いると（31）となる。　即ち、

$$k_{i+1,i} = k_{i,i+1} \quad \cdots\cdots \quad (32)$$

同様に

$$k_{i-1,i} = k_{i,i-1} = -2e^{-\frac{x_i^2}{2}} \frac{\partial f(x_{i-1}, x_i)}{\partial x_{i-1}} f(x_{i-1}, x_i) \quad \cdots \quad (33)$$

又（28）から明かに $|p-q| \geq 2$ なら $k_{pq} = 0 \quad \cdots\cdots \quad (34)$

(28)と、F, G の定義とから

$$k_{ii} = 2e^{-\frac{x_i^2}{2}} \left\{ \frac{\partial f(x_{i+1}, x_i)}{\partial x_i} f(x_{i+1}, x_i) - \frac{\partial f(x_{i-1}, x_i)}{\partial x_i} f(x_{i-1}, x_i) \right\} \quad \cdots \quad (35)$$

を得る。

さて　$F(x_{i-1}^\circ, x_i^\circ, x_{i+1}^\circ) = 0$　即ち

$$f(x_{i-1}^\circ, x_i^\circ) = -f(x_{i+1}^\circ, x_i^\circ) \quad \cdots\cdots \quad (36)$$

がみたされねばならないから、

$$k_{ii}^\circ = -2e^{-\frac{x_i^{\circ 2}}{2}} \left\{ \frac{\partial f(x_{i+1}, x_i)}{\partial x_i} + \frac{\partial f(x_{i-1}, x_i)}{\partial x_i} \right\}_0 f(x_{i-1}^\circ, x_i^\circ) \quad \cdots\cdots \quad (37)$$

（但し $\{\ \}_0$ は Argument が夫々 x_i° 等の値をとるときの値を示す）

となるが $x_i^\circ < 0$ だとすると $x_i^\circ = \varphi(x_{i-1}^\circ, x_{i+1}^\circ)$ でなければな

らないから，上式の右辺の$\{\ \}_0$は lemma 1. により負であることがわかる。

その場合更に $x_{i-1}^\circ < x_i^\circ < 0$ だから(26)により，$f(x_{i-1}^\circ, x_i^\circ) < 0$ 従って $k_{ii}^\circ < 0$，又 $x_i^\circ > 0$ だとすると，$x_i^\circ = \psi(x_{i-1}^\circ, x_i^\circ)$ がみたされねばならず，従って lemma 1 により上式の$\{\ \}_0$は正となるが，(36)及び $x_{i-1}^\circ > x_i^\circ$ 及び(26)を用いて $f(x_{i-1}^\circ, x_i^\circ) > 0$ であることがわかる。

従って何れの場合にも

$$k_{ii}^\circ < 0 \qquad \text{------} \qquad (38)$$

次に

$$k_{ii}^\circ + |k_{i-1\,i}^\circ| + |k_{i,i+1}^\circ| < 0 \qquad \text{-----} \qquad (39)$$

なることを示そう。

まず(36)により(29)，(32)から

$$k_{i,i+1}^\circ = -2e^{-\frac{x_i^{\circ 2}}{2}} f(x_{i-1}^\circ, x_i^\circ)\left\{\frac{\partial f(x_{i+1}, x_i)}{\partial x_{i+1}}\right\}_0$$

さて，$x_i^\circ < 0$ のときは(38)の証明に際して注意した如く，$f(x_{i-1}^\circ, x_i^\circ) < 0$，従って，
(39)の左辺は(37)，(33)及び上式により

$$-2e^{-\frac{x_i^{\circ 2}}{2}}\left\{\frac{\partial f(x_{i+1}, x_i)}{\partial x_i} + \frac{\partial f(x_{i-1}, x_i)}{\partial x_i} + \left|\frac{\partial f(x_{i+1}, x_i)}{\partial x_{i+1}}\right| + \left|\frac{\partial f(x_{i-1}, x_i)}{\partial x_{i-1}}\right|\right\}_0$$

$$\times f(x_{i-1}^\circ, x_i^\circ) \qquad \text{-----} \qquad (40)$$

となるが $x_i^\circ < 0$ だから $x_i^\circ = \varphi(x_{i-1}^\circ, x_{i+1}^\circ)$ がみたされねばならず従って lemma 1 により(40)の$\{\ \}_0$は負となる。

依って(39)がこの場合成立つ、次に $x_i^\circ > 0$ のときは(38)の証明に注意した如く $f(x_{i-1}^\circ, x_i^\circ) > 0$ 従って(39)の左辺

は

$$-2e^{-\frac{x_i^{\circ 2}}{2}} f(x_{i-1}^\circ, x_i^\circ)$$

$$\times \left\{ \frac{\partial f(x_{i+1}, x_i)}{\partial x_i} + \frac{\partial f(x_{i-1}, x_i)}{\partial x_i} - \left| \frac{\partial f(x_{i+1}, x_i)}{\partial x_{i+1}} \right| - \left| \frac{\partial f(x_{i-1}, x_i)}{\partial x_{i-1}} \right| \right\}。$$

となるが、この場合は $x_i^\circ = \psi(x_{i-1}^\circ, x_{i+1}^\circ)$ がみたされているから $\{\ \ \}$。は正となりやはり(39)が成立つ。

以上をまとめると、(32)、(33)、(34)、(35)により、$\{k_{pq}^\circ\}$ のつくる matrix は

1) Symmetric であり

2)

$$\begin{pmatrix}
k_{11}^\circ & k_{12}^\circ & 0 & 0 & & & & \\
k_{12}^\circ & k_{22}^\circ & k_{23}^\circ & 0 & & \text{O} & & \\
0 & k_{23}^\circ & k_{33}^\circ & k_{34}^\circ & & & & \\
 & & \ddots & \ddots & \ddots & & & \\
 & \text{O} & & k_{k-3\,k-2}^\circ & k_{k-2\,k-2}^\circ & k_{k-2\,k-1}^\circ & 0 \\
 & & & 0 & k_{k-2\,k-1}^\circ & k_{k-1\,k-1}^\circ & k_{k-1\,k}^\circ \\
 & & & 0 & 0 & k_{k-1\,k}^\circ & k_{kk}
\end{pmatrix}$$

なる形をして居り

3) 対角要素はすべて負であり

4) 任意の対角要素の絶対値はその両隣りの要素の絶対値の和より大である。

以上の性質をもつことがわかったが、このような matrix は実は negative definite である。

いゝかえると、一般に実数の matrix が

1） symmetric であり

2） 対角要素の隣りの要素以外はすべて0であり，

3） 対角要素はその両隣りの要素の絶対値の和より大である。

（従って対角要素は正）

とき，それは positive matrix である。

証明 $\{a_{pq}\}$ をこのような k 次の matrix とし，その左上から i 行目までと i 列目までを取出してつくった行列の行列式

$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 & & & \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & 0 & & \bigcirc & \\ 0 & a_{23} & a_{33} & a_{34} & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & \bigcirc & & a_{i-2\,i-1} & a_{i-1\,i-1} & a_{i-1\,i} \\ & & & 0 & a_{i-1\,i} & a_{ii} \end{pmatrix}$$

を A_i とする。

$A_1>0$，$A_2>0$，-----，$A_k>0$ をいえばよい。

まず $A_1=a_{11}>0$． 又 $a_{11}>|a_{12}|$ $a_{22}>|a_{12}|$ だから明かに $A_2>0$．（$k=2$ のときも）

一般に明かに

$$A_i = a_{ii}A_{i-1} - a^2_{i-1\,i}A_{i-2} \quad \text{-------} \quad (42)$$

となるが $2\leqq i\leqq k-1$ に対しては，

$$A_i > |a_{i\,i+1}|A_{i-1} \quad \text{---- -----} \quad (43)$$

が成立つことを証明しよう。

そうすれば $A_1 = a_{11} > 0$ であるから

$$A_2 > 0,\ A_3 > 0,\ \cdots\cdots,\ A_{k-1} > 0$$

がいえる。($|a_{p,p+1}| = 0$ なる p があつてもよい)

さて,これをいうため $i=2$ のとき

$A_2 = a_{11} a_{22} - a_{12}^2$ に於て,$k \geqq 3$ のときを考えているから $a_{22} > |a_{12}| + |a_{23}|$

従って $A_2 - |a_{23}| A_1 = a_{11} |a_{12}| - |a_{12}|^2$

$a_{11} > |a_{12}|$ だからこれは正,従って (43) が成立つ.

$2 < i \leqq k-1$ に対しては帰納法を用いる。

$i = p-1$ のとき (43) が成立つことを假定する。

假定 3) により $a_{pp} > |a_{pp+1}| + |a_{p-1\,p}|$

だから (42) により

$$A_p > |a_{p\,p+1}| A_{p-1} + |a_{p-1\,p}| A_{p-1} - a_{p-1\,p}^2 A_{p-2}$$

帰納法の假定により $|a_{p-1\,p}| A_{p-1} > a_{p-1\,p}^2 A_{p-2}$

だから $i=p$ に対して (43) が証明された。

さて,これで $A_1 > 0 \cdots A_{k-1} > 0$ が証明されたから $A_k > 0$ をいえばよい。

$$A_{k-1} > |a_{k-1\,k}| A_{k-2}$$

が既に証明されたから $a_{kk} > 0$ 及び (42) より

$$A_k > a_{kk} |a_{k-1\,k}| A_{k-2} - a_{k-1\,k}^2 A_{k-2}$$

假定 3) により $a_{kk} > |a_{k-1\,k}|$ 又 $A_{k-2} > 0$ は既に証明されたから,$A_k > 0$ となる。

以 上

これで §2 の表題が完全に証明されたことになる。

方程式系 (4) の 2^k 個の解は (order をみたさないものでも)

すべて (1) の極大点であるのではないかと思うが統計的に意味がないのでしらべてみなかった。

§ 3. G_i を混せて出来る方程式系の解の中には望ましきもののないこと。

$x<y<z<0$ 且 $G(x,y,z)=0$ をみたす z は存在しない。

何故なら (7) により $z<0$, $y<0$ のとき $f(z,y)$ は z に関して単調増大である。従って, x y を negative に fix すると $G(x,y,z)=0$ 即ち $f(x,y)=f(z,y)$ をみたす z の値は, negative の範囲では $z=x$ でしかあり得ない。

これは $x<y<z$ の假定に反する。

ついでに $x \leqq y \leqq z<0$ で且 $G(x,y,z)=0$ をみたす z は, $x=y$ のときのみ存在し $z=x=y$ であることがわかった。

同様に, $0<x<y<z$ で且 $G(x,y,z)=0$ をみたす x は存在しない。ことがいえる。

従って, 1) $x<y<z \leqq u<v<w$ で且

$G(x,y,z)=0$, $G(u,v,w)=0$

を同時にみたす x,y,z,u,v,w は存在しない。(例えば $y<0$ とすると最初の式をみたす z は存在するとしても正でなければならず, 従って u, v は共に正, ところが u, v を正とすると第二の式をみたす w は存在するとしても負でなければならずこれは $v<w$ に反する。)

更に 2) $x<y<z<w$ 且 $G(x,y,z)=0$ $G(y,z,w)=0$ を同時にみたす x,y,z,w は存在するとすれば

$$x<y<0<z<w$$

でなければならないことも同様の論法でいえる。

2）から明らかに 3） $x<y<z<u<v$ で且

$$G(x,y,z)=0,\ G(y,z,u)=0,\ G(z,u,v)=0$$

を同時にみたす x, y, z, w, v は存在しない。

（1） の極値を求めるための

$$F_1=0,\ G_2=0,\ F_3=0,\ -----,\ F_k=0$$

のような 2^k 個の連立方程式の全体を $\mathcal{G}_{(F.G)}$ とあらわすことにする。

以上をまとめると．

$\mathcal{G}_{(F.G)}$ に属する方程式系の中で

1） $G_i=0$ を三つ以上含む方程式系はその解が存在してもその解は order(3) をみたさない。

2）

$$x_1^\circ < x_2^\circ < ------ < x_j^\circ < 0 < x_{j+1}^\circ < ---- < x_k^\circ ---- \quad (44)$$

なる（x_1°, ---- , x_k°）を解としてもつ方程式系で $G_i=0$ を二つ含むものがあるならば，

それは

$$F_1=0,\ ----,\ F_{j-1}=0,\ G_j=0\quad G_{j+1}=0,\ F_{j+2}=0,\ ---,\ F_k=0 \quad ---- (45)$$

でなければならない。

3）（44）のような解で $G_i=0$ を一つ含むものがあるならば，それは

$$F_1=0,\ ---,\ F_{j-1}=0,\ G_j=0,\ F_{j+1}=0,\ ----,\ F_k=0\ ---- \quad (46)$$

か或いは，

$$F_1=0,\ ----,\ F_j=0,\ G_{j+1}=0,\ F_{j+2}=0,\ ---,\ F_k=0\ ---- \quad (47)$$

でなければならない。

さて方程式系（46）で（44）のような解がある場合を考えてみ

よう。

今そういう解がいくつかあるときその任意の一つ $(x_1^\circ, \cdots, x_k^\circ)$ をとって来て、k_{jj} のその点に於ける値 k_{jj}° を計算すれば

$$k_{jj}^\circ = e^{-\frac{x_j^{\circ 2}}{2}} \left(-\frac{\partial f(x_{j-1}, x_j)}{\partial x_j} + \frac{\partial f(x_{j+1}, x_j)}{\partial x_j} \right)_0 F(x_{j-1}^\circ, x_j^\circ, x_{j+1}^\circ)$$

ここで $G(x_{j-1}^\circ, x_j^\circ, x_{j+1}^\circ) = 0$ 即ち $f(x_{j-1}^\circ, x_j^\circ) = f(x_{j+1}^\circ, x_j^\circ)$

だから $F(x_{j-1}^\circ, x_j^\circ, x_{j+1}^\circ) = 2f(x_{j-1}^\circ, x_j^\circ)$

ところが、$x_{j-1}^\circ < x_j^\circ < 0$ だから $f(x_{j-1}^\circ, x_j^\circ) < 0$

従って $F(x_{j-1}^\circ, x_j^\circ, x_{j+1}^\circ) < 0$

又、容易にわかるように、

$$\left(-\frac{\partial f(x_{j-1}, x_j)}{\partial x_j} + \frac{\partial f(x_{j+1}, x_j)}{\partial x_j} \right)_0$$

$$= e^{-\frac{x_j^{\circ 2}}{2}} \left\{ f(x_{j-1}^\circ, x_j^\circ) \Big/ \int_{x_{j-1}^\circ}^{x_j^\circ} e^{-\frac{t^2}{2}} dt + f(x_{j+1}^\circ, x_j^\circ) \Big/ \int_{x_j^\circ}^{x_{j+1}^\circ} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \right\}$$

ここで $f(x_{j-1}^\circ, x_j^\circ) = f(x_{j+1}^\circ, x_j^\circ) < 0$ だからこれも負、従って、$k_{jj}^\circ > 0$

依って $\{k_{pq}^\circ\}$ のつくる matrix は negative definite にはなり得ない。事実、$k_{jj}^\circ > 0$ ということは他の x_i° を固定しておいて、x_j° の近所で x_j を変化させるとき、x_j° で K は極小値をとることを意味する。

方程式系 (47) が (44) のような解をもつ場合もその解点に於て k_{jj} は positive になることも今と同様に証明出来る。

又、方程式系 (45) が (44) のような解をもつ時はその点に於ては $k_{jj}^\circ > 0$、$k_{j+1,j+1}^\circ > 0$ となることも同様に証明出来る。

従って Order (3) をみたすような K の極大点を求めるには、

$\mathcal{G}_{(F,G)}$ の中でただ方程式系 (4) のみを考慮すればよいことがわかった。

さてこのような考察なしにいきなり方程式系 (4) だけ考えるのは無謀である。 k が奇数の時，方程式系 (4) は明かに symmetric な解 ($x_i^\circ = -x_{k+1-i}^\circ$ ($i=1,2,\cdots,k$) をみたすもの) で，order をみたすものは存在しないが，$\mathcal{G}_{(F,G)}$ 全体の中には k が奇数の時も order をみたし symmetric な解をもつ方程式系も存在する。

事実 $k=1$ のとき $G_1=0$ 即ち $G(-\infty, x_1, \infty)=0$ は $x_1=0$ によりみたされるし，一般に $k=2k'-1$ とすると，

$$F_1=0,\ F_2=0,\ \cdots,\ F_{k'-1}=0,\ G_{k'}=0,\ F_{k'+1}=0,\ \cdots,\ F_{2k'-1}=0$$

なる方程式系は $x_1^\circ < x_2^\circ < \cdots < x_{k'-1}^\circ < 0 < x_{k'+1}^\circ < \cdots < x_{2k'-1}^\circ$

で且 $x_{k'}^\circ = 0$, $x_{k'-i}^\circ = -x_{k'+i}^\circ$

なる條件をみたす解 ($x_1^\circ, \cdots, x_{2k'-1}^\circ$) を必ず一つもっていることも §2 の証明を少し modify すれば容易に導ける。

もしも symmetric spacing を仮定して (2) を数値的に解けば，そのような解が出てくる筈である。 しかしそれは，Optimum spacing を與えない。 このような性格が母分散母平均共に未知の場合にも持込まれているのではないかと思うので，いきなり symmetric を仮定した菅伊兵衛氏の数値計算の結果 [3] の中には k が奇数の場合など或いは有害無益なものも含まれているのではないかと懸念する。 極端にいえば極小を與えるような解なら，それを用いることはわざわざ効率を下げることになるから。

§ 4. 真に Optimum なものはどれか。

Order (3) をみたし，K を最大にする $x_1, \cdots, x_k$ の組は方程式系 (4) の解の中にあることは殆んど明かであるが，尚次の

疑問に答えておかねばなるまい。

第一には，変数の領域が閉領域ではないのだから最大値が存在するかどうか．即ち x_1 等を $-\infty$ にもってゆくか，x_k 等を $+\infty$ の方に大きくしてゆくと，Kの値は方程式系(4)の解による極大値を越えるのではないかということ。

第二には，條件(3)をゆるめて等号をゆるす場合に拡張すればKの値はどうなるかということ．

この二つは，実際的には使用する観測値 $x_1, \cdots x_k$ の個数を減らすことに対応する。 使用する観測値を減らせばそれだけ効率が下ることは常識的であるが，もしその逆であれば大変である。

数学的にも常識的な結論に到達することを示しておこう。

$$\frac{\partial K}{\partial x_1} = e^{-\frac{x_1^2}{2}}\left(-f(-\infty,x_1)+f(x_2,x_1)\right)\left(f(-\infty,x_1)+f(x_2,x_1)\right)$$

任意の *fix* された x_2 に対して，$x_1 \to -\infty$ にすると，$f(x_2, x_1) \to +\infty$ になるが，任意の *negative* な x_1 に対して $f(-\infty, x_1) > -2$ 註) だから $-x_1$ を十分大きくすると $\frac{\partial K}{\partial x_1}$ は正になる。 従って x_1 を $-\infty$ の方にもってゆくと Kは減小する。

同様に $\frac{\partial K}{\partial x_k}$ は x_k を十分大きくすると負になることがいえるから $x_k \to +\infty$ のときKは減小する。

次に，第二の問に対する解答はこうである。

$K(x_1, \cdots, x_k)$の最大値は，$K(x_1, \cdots, x_k, x_{k+1})$の最大値より小さい．

$$T(a,b) \equiv \frac{\left(\int_a^b (1-t^2)\, e^{-\frac{t^2}{2}} dt\right)^2}{\int_a^b e^{-\frac{t^2}{2}} dt} \qquad \text{とすると,}$$

(1) から

$$K(x_1,\cdots,x_k)$$
$$=T(-\infty,x_1)+\sum_{i=2}^{k}T(x_{i-1},x_i)+T(x_k,\infty)$$

となる。

$K(x_1,\cdots,x_k)$ の最大点の一つを $x_1^\circ,\cdots,x_k^\circ\ (x_1^\circ<\cdots<x_k^\circ)$ とする。今これに新しく分点を加える。x_i° と x_{i+1}° の間に一つ x_p を入れると K は

$$K(x_1^\circ,\cdots,x_i^\circ,x_p,x_{i+1}^\circ,\cdots x_k^\circ)$$
$$-K(x_1^\circ,\cdots x_i^\circ,x_{i+1}^\circ,\cdots x_k^\circ)$$
$$=T(x_i^\circ,x_p)+T(x_p,x_{i+1}^\circ)-T(x_i^\circ,x_{i+1}^\circ)$$

だけ変化する。これが負にならぬことを示す。

一般に $a<b<c$ のとき

$$T(a,b)+T(b,c)-T(a,c)\geq 0 \quad\cdots\cdots\quad (45)$$

なることを示せばよい。

簡単のため $\int_a^b e^{-\frac{t^2}{2}}dt$ 等を $\int_a^b$ であらわし，

$\int_a^b(1-t^2)e^{-\frac{t^2}{2}}dt$ 等を $\int_a^b\odot$ であらわすと，

$\int_a^b>0\ \int_b^c>0\ \int_a^c>0$ だから (45) の左辺に $\int_a^b\int_b^c\int_a^c$ をかけたものが負にならぬことを示せばよい。即ち

$$\left(\int_a^b\odot\right)^2\int_b^c\int_a^c+\left(\int_b^c\odot\right)^2\int_a^b\int_a^c-\left(\int_a^c\odot\right)^2\int_a^b\int_b^c$$

が正なることをいう。

$$\text{上式}=\left(\int_a^b\odot\right)^2\int_b^c\left(\int_a^b+\int_b^c\right)+\left(\int_b^c\odot\right)^2\int_a^b\left(\int_a^b+\int_b^c\right)$$
$$-\left(\int_a^b\odot+\int_b^c\odot\right)^2\int_a^b\int_b^c$$

$$= \left(\int_a^b \int_b^c \odot - \int_a^b \odot \int_b^c \right)^2 \geq 0 \quad \text{-------} \qquad (46)$$

$K(x_1^\circ, \cdots, x_i^\circ, x_p, x_{i+1}^\circ, \cdots, x_k^\circ)$ は $K(x_1, \cdots, x_{k+1})$ の最大値より大きくないから $K(x_1^\circ, \cdots, x_i^\circ, x_p, x_{i+1}^\circ, \cdots, x_k^\circ)$ が，$K(x_1, \cdots, x_{k+1})$ の最大値に等しくないことをいえば先に述べた解答が出来るわけである。

ところで (46) の等式が成立つ（ 0 となる）のは

$$\int_a^b (1-t^2) e^{-\frac{t^2}{2}} dt \Big/ \int_a^b e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \int_b^c (1-t^2) e^{-\frac{t^2}{2}} dt \Big/ \int_b^c e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

のときに限られる．即ちこの場合容易にわかるように，$f(a, b) = f(c, b)$ のときである。従ってつまり等号が成立つときは

$$G(x_{i-1}^\circ, x_p, x_{i+1}^\circ) = 0$$

依って §3 から明かなように $x_1 = x_1^\circ$, $x_2 = x_2^\circ$, ---- , $x_{i-1} = x_{i-1}^\circ$, $x_i = x_p$ $x_{i+1} = x_i^\circ$ $x_{i+2} = x_{i+1}^\circ$ ---- , $x_{k+1} = x_k^\circ$ は $K(x_1, \cdots x_{k+1})$ の最大点ではない。

これで $K(x_1, \cdots, x_k)$ の order をみたす最大点は，方程式系 (4) の order をみたす ($k+1$) 組の解の中にあることが確定された。

さて，この $k+1$ 組の中でどれが最大点であるか？ この問に対する完全な解答は残念ながらまだ出来ていないが，次の事がほゞたしかである。（小川先生等も k の小さい時の数値計算から予見して居られることと思う）

1) k が偶数のときは symmetric なもの

2) k が奇数のときは symmetric に最も近いもの，即ち正の x_i° の個数と負の x_i° の個数の差が 1 であるような解が最大点である。（一般に order をみたす ($k+1$) 組の解の中で，正の x_i° の個数が p 個で負のものの個数が $k-p$ 個のものと，

負のものがp個で正のものが$k-p$個であるものは同じ効率を与えることは解の対称性から明かである）

解の対称性といったのは，

$\mathcal{Y}_{(\varphi,\psi)}$に属する方程式系の解の一意性及び$\varphi,\psi$の対称性及び(6)から明かなように，orderをみたす$(k+1)$組の解のうち，x_jまでが負でx_{j+1}から先が正のものを$x_1^0(j), x_2^0(j), \cdots\cdots, x_k^0(j)$とすると，

$$x_i^0(j) = -x^0_{k+1-i}(k-j) \quad (i = 1, \cdots\cdots, k)$$
$$(j = 0, \cdots\cdots, k)$$

が成立つことである。

さて，上記の最大点に関する予測を一般に証明するには実は次の事が言えればよい。それは，方程式系(4)の解の中

$$x_1^0 < x_2^0 < \cdots\cdots < x_j^0 < 0 < x_{j+1}^0 < \cdots\cdots < x_k^0 \quad で$$
$$j-(k-j) \geq 2$$

なるものでは$x_k^0 < -x_1^0$である。

何故かといえば実は一般に

$$x_1 < x_2 < \cdots\cdots < 0 < \cdots\cdots < x_k \quad で且 \quad x_2 < -x_k$$

とすると，$x_k < y$で且

$$K(x_1, x_2, \cdots\cdots, x_k) < K(x_2, x_3, \cdots\cdots, x_k, y) \quad (47)$$

となるようなyが存在するのである。

その証明は，

$$K(x_1, x_2, \cdots\cdots, x_k) - K(x_2, \cdots\cdots, x_k, y)$$
$$= T(-\infty, x_1) + T(x_1, x_2) + T(x_k, \infty)$$
$$-T(-\infty, x_2) - T(x_k, y) - T(y, \infty)$$

明かに$T(b, a) = T(a, b) = T(-b, -a)$であるから

上式 $= (T(-\infty, x_1) + T(x_1, x_2) - T(-\infty, x_2))$

$\quad - (T(-x_k, -y) + T(-\infty, -y) - T(-\infty, -x_k))$

これが負になるような y が $x_k < y < \infty$ に存在することを示せばよい。　今 $y = -x_1$ とすると

上式 $= (T(x_1, x_2) - T(-\infty, x_2)) - (T(x_1, -x_k) - T(-\infty, -x_k))$ ---- (48)

ところで $T(x, Z) - T(-\infty, Z)$ を Z の函数とみて Z に関して微分すると

$$\left\{ 1 - 2Z^2 \frac{\int_{x_1}^{Z} (1-t^2) e^{-\frac{t^2}{2}} dt}{\int_{x_1}^{Z} e^{-\frac{t^2}{2}} dt} - \frac{\left(\int_{x_1}^{Z} t^2 e^{-\frac{t^2}{2}} dt\right)^2}{\left(\int_{x_1}^{Z} e^{-\frac{t^2}{2}} dt\right)^2} \right\} e^{-\frac{Z^2}{2}}$$

$$- \left\{ 1 - 2Z^2 \frac{\int_{-\infty}^{Z} (1-t^2) e^{-\frac{t^2}{2}} dt}{\int_{-\infty}^{Z} e^{-\frac{t^2}{2}} dt} - \frac{\left(\int_{-\infty}^{Z} t^2 e^{-\frac{t^2}{2}} dt\right)^2}{\left(\int_{-\infty}^{Z} e^{-\frac{t^2}{2}} dt\right)^2} \right\} e^{-\frac{Z^2}{2}}$$

$$= \left(\frac{\int_{x_1}^{Z} t^2 e^{-\frac{t^2}{2}} dt}{\int_{x_1}^{Z} e^{-\frac{t^2}{2}} dt} - \frac{\int_{-\infty}^{Z} t^2 e^{-\frac{t^2}{2}} dt}{\int_{-\infty}^{Z} e^{-\frac{t^2}{2}} dt} \right) \left(2Z^2 - \frac{\int_{x_1}^{Z} t^2 e^{-\frac{t^2}{2}} dt}{\int_{x_1}^{Z} e^{-\frac{t^2}{2}} dt} - \frac{\int_{-\infty}^{Z} t^2 e^{-\frac{t^2}{2}} dt}{\int_{-\infty}^{Z} e^{-\frac{t^2}{2}} dt} \right)$$

$$= (-f(x_1, Z) + f(-\infty, Z))(f(x_1, Z) + f(-\infty, Z))$$

$x_1 < Z < 0$ の範囲で考えると $f(x_1, Z) < 0$, $f(-\infty, Z) < 0$

又 $f(x, Z)$ は x の単調増大函数だから $-f(x, Z) + f(-\infty, Z) < 0$

従って $x_1 < Z < 0$ の範囲で $T(x_1, Z) - T(-\infty, Z)$ は単調増大である。　假定から $x_2 < -x_k < 0$ だから (48) は negative

従って $y = -x_1$ とすれば (47) はみたされる。

そこで上の予想 即ち負のものの個数が正のものの個数より２個以上多いという條件の下に於ける $K(x_1, ----, x_k)$ の極大点に於ては $x_k^\circ < -x_2^\circ$ であることが言えたとすれば

$$K(x_1^\circ, ---- x_k^\circ) < K(x_2^\circ, ---, x_k^\circ, -x_1^\circ)$$

で，この右辺は負のものの個数を一つ減じ，正のものの個数を一つ増した條件の下での極大点より大きくない。

従って正，負の x_i の個数の差が k が奇数のとき 1 になるまでは（k が偶数のときは 0 になるまでは）個数の差が少いほど極大値は大となる。

このことは正のものの個数が負のものの個数より大のときにもいえる。　それは解の対称性から明かである。

従って最大値に関する上記の予想が証明されるのである。

即ち方程式系（4）の解についてもう少しくわしい事がわかれば最大値の問題も全部解決してしまうのであるが，それをこのような初等的な方法で行うには $f(x, y)$ に関して lemma 1 位の知識では間に合わないように思われる。

（以　上）

後　記：　すっかり完全に仕上げてから発表しようと思っていたが，これ以上この種の問題に取組んでいることが許されなくなったので一応今までに得た結果を述べることにした。

さきの母平均未知の場合についての解析が初等的な方法で案外あっさり片附いたので，今度の場合も同じ程度だろうと思ったのがそもそもの誤りで私にとっては随分面倒なものであった。――――ごたごた書きならべただけで以上の本文はほとんど trival なことの連続であったが，附録の初等計算に実に骨が折れた。――――母分散母平均共に未知の場合の解析は，何かあっさりゆく方法でも頭に浮ばない限り，私には出来そうもない。

最後に，小川．丸山両先生，飯沼健司君．及び樋口八重子に夫々前と同じ意味に於て感謝の意を表する。

参　照　文　献

1）小川潤次郎：　系統統計量：講究録6巻10号

1）J. Ogawa：
Contributions to the Theory of Systematic Statistics I.
：Osaka Mathematical Journal
Vol. 3. No. 2. 1951.

2）樋口伊佐夫：　或る方程式系の解の存在と一意性について：　講究録8巻1～2号

3）菅　伊兵衛：　順序づけ統計量による平均及び標準偏差の推定，　科学 Vol. 22. No. 12. 1952.

註

一般に $x<0$ のとき $\int_{-\infty}^{x}(x^2-t^2+2)e^{-\frac{t^2}{2}}dt>0$.

$x<0$ だから，部分積分 $\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{t^2}{2}}=-\frac{1}{x}e^{-\frac{x^2}{2}}-\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{t^2}e^{-\frac{t^2}{2}}dt$

をつかえば上式の左辺は　$-2xe^{-\frac{x^2}{2}}+\int_{-\infty}^{x}(1-\frac{x^2}{t^2})e^{-\frac{t^2}{2}}dt$

となるが，積分範囲では $x^2<t^2$.　だから明かに正となる。

附　　録

単なる初等微積分の計算であるが，私がこの仕事をなすにあたつて時間と労力との大部分はこれに費したのである。

$e^{-\frac{t^2}{2}}$ と t の函数との積の積分が多いので $\int_x^y f(t)e^{-\frac{t^2}{2}}dt$ を一般に $\int_x^y f(t)$ と略記する。

そうでないものは $\int_x^y g(t)dt$ と dt を略さない。

従つて例えば $\int_{-\infty}^{x}$ は $\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}dt$ の意，$\int_x^y (x^2-t^2)$ は，$\int_x^y (x^2-t^2)e^{-\frac{t^2}{2}}dt$ の意である。

附　　録　　I

x，y の如何にかゝわらず常に

$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2} > 0 \left(\frac{d^2 f(\pm\infty,y)}{dy^2} > 0 \quad \text{を含む} \right)$$

であることの証明.

$$f(-x,y) = \int_{-x}^{y}(y^2-t^2)\Big/\int_{-x}^{y} = \int_{x}^{-y}(y^2-t^2)\Big/\int_{x}^{-y} = f(x,-y)$$

だから任意の y_0 に対して

$$\left[\frac{\partial^2 f(-x,y)}{\partial y^2}\right]_{y=y_0} = \left[\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2}\right]_{y=-y_0}$$

従つて $x \leqq 0$ なる x について（$x=-\infty$ のときを含めて）証明すればよい。

1). $x = y$ のとき

$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2} = 2+2\left[\left(\frac{e^{-\frac{y^2}{2}}}{\int_x^y}\right)^2 \frac{\int_c^y (y^2-t^2)}{\int_x^y} - y\frac{e^{-\frac{y^2}{2}}}{\int_x^y}\right] + \frac{ye^{-\frac{y^2}{2}}}{\int_x^y} f(x,y)$$

$x \to y$ とすると右辺の[　　]の中は $-\frac{1}{3}(1+y^2)$ となり最後の項は y^2 となる。依って

$$\lim_{x\to y} \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2} = \frac{4}{3} + \frac{1}{3}y^2 > 0$$

2). $y > 0 \geq x$ 且つ $f(x,y) \geq 0$ のとき

$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2} = 2\left(1-y\frac{e^{-\frac{y^2}{2}}}{\int_x^y}\right) + \left(y\frac{e^{-\frac{y^2}{2}}}{\int_x^y} + 2\left(\frac{e^{-\frac{y^2}{2}}}{\int_x^y}\right)^2\right) f(x,y)$$

$$= 2\ \frac{-xe^{-\frac{x^2}{2}} + \int_x^y t^2}{\int_x^y} + \left(y\frac{e^{-\frac{y^2}{2}}}{\int_x^y} + 2\left(\frac{e^{-\frac{y^2}{2}}}{\int_x^y}\right)^2\right) f(x,y) > 0$$

3). $y > 0 \geq x$ 且 $f(x,y) < 0$ のとき

先づ $f(x,y) < 0$ 即ち $\int_x^y (y^2 - t^2) < 0$ だから $|x| > y$ でなければならない。

$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2} = \left[1 - \frac{e^{-\frac{y^2}{2}}}{\int_x^y}\left\{2y - \frac{e^{-\frac{y^2}{2}}}{\int_x^y} f(x,y)\right\}\right]$$

$$+ \left[1 + \left\{\left(\frac{e^{-\frac{y^2}{2}}}{\int_x^y}\right)^2 + \frac{ye^{-\frac{y^2}{2}}}{\int_x^y}\right\} f(x,y)\right]$$

この二つの[　　]の中が夫々正になることを証明する。
先づ第一の[　　]の中が正なることをいうには $\int_x^y \neq 0$ だから $\left(\int_x^y\right)^2$ をかけたものが正．　即ち

$$\left(\int_x^y\right)^3-2ye^{-\frac{y^2}{2}}\int_x^y+\left(e^{-\frac{y^2}{2}}\right)^2\int_x^y(y^2-t^2)>0$$

をいえばよい。

$$\text{左辺}=\int_x^y\left(\int_x^y-ye^{-\frac{y^2}{2}}\right)^2-\left(e^{-\frac{y^2}{2}}\right)^2\int_x^y t^2$$

$$=\int_x^y\left(\int_x^y t^2-xe^{-\frac{x^2}{2}}\right)^2-\left(e^{-\frac{x^2}{2}}-\int_x^y t\right)^2\int_x^y t^2$$

平方を展いてくくりなおすと，

$$=\int_x^y t^2\left[\int_x^y\int_x^y t^2-\left(\int_x^y t\right)^2\right]+2e^{-\frac{x^2}{2}}\int_x^y(t-x)\int_x^y t^2$$

$$+\left(e^{-\frac{x^2}{2}}\right)^2\int_x^y(x^2-t^2)$$

ここで $\int_x^y t\int_x^y-\left(\int_x^y t\right)^2\geq\int_x^y\int_x^y t^2-\left(\int_x^y|t|\right)^2\geq 0$

(Schwarz) を用いて第一項は非負　第二項は明か

に正，第三項は $|x|>y$ だから正，依って全体は正となる。

次に第二の [　　] の中が正となることを証明する。

$$\left(\int_x^y\right)^3+\left(e^{-\frac{y^2}{2}}\right)^2\int_x^y(y^2-t^2)+ye^{-\frac{y^2}{2}}\int_x^y(y^2-t^2)\int_x^y>0$$

をいえばよい。

$$\text{左辺}=\int_x^y\left[\left(\int_x^y\right)^2-ye^{-\frac{y^2}{2}}\int_x^y t^2\right]-\left(e^{-\frac{y^2}{2}}\right)^2\int_x^y t^2+\left(ye^{-\frac{y^2}{2}}\right)^2\int_x^y$$

$$+y^3e^{-\frac{y^2}{2}}\left(\int_x^y\right)^2$$

最後の二項は正だから

$$\int_x^y\left[\left(\int_x^y\right)^2-ye^{-\frac{y^2}{2}}\int_x^y t^2\right]-\left(e^{-\frac{y^2}{2}}\right)^2\int_x^y t\geq 0$$

をいえばよい。

左辺 $= \int_x^y \Big[y e^{-\frac{y^2}{2}} \int_x^y - x e^{-\frac{x^2}{2}} \int_x^y + \int_x^y t^2 \int_x^y - \int_x^y (1-t^2) \int_x^y t^2$

$\quad - x e^{-\frac{x^2}{2}} \int_x^y t^2 \Big] - \left(e^{-\frac{x^2}{2}} - \int_x^y t\right)^2 \int_x^y t^2$

$= y e^{-\frac{y^2}{2}} \left(\int_x^y\right)^2 + \int_x^y t^2 \int_x^y t^2 \int_x^y - \left(\int_x^y t\right)^2 \int_x^y t^2 - x e^{-\frac{x^2}{2}} \left(\int_x^y\right)^2$

$\quad - x e^{-\frac{x^2}{2}} \int_x^y t^2 \int_x^y - \left(e^{-\frac{x^2}{2}}\right)^2 \int_x^y t^2 + 2 e^{-\frac{x^2}{2}} \int_x^y t \int_x^y t^2$

$= y e^{-\frac{y^2}{2}} \left(\int_x^y\right)^2 + \int_x^y t^2 \left[\int_x^y t^2 \int_x^y - \left(\int_x^y t\right)^2 \right] + 2 e^{-\frac{x^2}{2}} \int_x^y \int_x^y (t-x)$

$\quad - x e^{-\frac{x^2}{2}} \int_x^y (1-t^2) \int_x^y - \left(e^{-\frac{x^2}{2}}\right)^2 \int_x^y t^2.$

最初の三項は夫々正となるから最後の二項が非負なることを示せばよい。

$- x e^{-\frac{x^2}{2}} \left(\int_x^y\right)^2 + x e^{-\frac{x^2}{2}} \int_x^y t^2 \int_x^y - \left(e^{-\frac{x^2}{2}}\right)^2 \int_x^y t^2$

$= - yx e^{-\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2}} \int_x^y + x^2 \left(e^{-\frac{x^2}{2}}\right)^2 \int_x^y - x e^{-\frac{x^2}{2}} \int_x^y t^2 \int_x^y$

$\quad + x e^{-\frac{x^2}{2}} \int_x^y t^2 \int_x^y - \left(e^{-\frac{x^2}{2}}\right)^2 \int_x^y t^2$

$= - yx e^{-\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2}} \int_x^y - \left(e^{-\frac{x^2}{2}}\right)^2 \int_x^y (x^2 - t^2)$

$y > 0,\ x < 0 \quad |x| > y$ だから，この各々は非負．依つて証明された。

4) $x < y \leqq 0$ のとき（$x = -\infty$ のときを含む）

$$2 + y \frac{e^{-\frac{y^2}{2}}}{\int_x^y} f(x,y) + 2 \left(\frac{e^{-\frac{y^2}{2}}}{\int_x^y} \right)^2 f(x,y) - 2y \frac{e^{-\frac{y^2}{2}}}{\int_x^y} > 0$$

をいうため， $x < y \leqq 0$ に対して

$$F(x,y) \equiv 2\left(\int_x^y\right)^3 + ye^{-\frac{y^2}{2}}\int_x^y(y^2-t^2) + 2\left(e^{-\frac{y^2}{2}}\right)^2\int_x^y(y^2-t^2)$$
$$-2e^{-\frac{y^2}{2}}\left(\int_x^y\right)^2 > 0$$

であることをいえばよい。 ところで $x<y\leqq 0$ のとき $\partial F/\partial y>0$ なることをいえば $F(x,x)=0$ だから $y>x$ に対して、$F(x,y)>0$ がいえる。 さて

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \left[4(1+y^2)\left(\int_x^y\right)^2 - 3ye^{-\frac{y^2}{2}}\int_x^y(y^2-t^2) + (1-y^2)\int_x^y\int_x^y(y^2-t^2)\right] \times e^{-\frac{y^2}{2}}$$

故に $0\geqq y>x$ のとき常に $[\cdot\quad]$ の中が正であることをいえばよい。

i) $y=0$ のとき $[\quad]$ は

$$4\left(\int_x^0\right)^2 - \int_x^0\int_x^0 t^2 = \int_x^0\left[3\int_x^0 + \int_x^0(1-t^2)\right] = \int_x^0\left[3\int_x^0 - xe^{-\frac{x^2}{2}}\right]$$

$x<0$ だからこれは正 ($x=-\infty$ のときも)

ii) $y \lneqq 0$ のとき

$$4(1+y^2) - 3ye^{-\frac{y^2}{2}}\frac{\int_x^y(y^2-t^2)}{\left(\int_x^y\right)^2} + (1-y^2)\frac{\int_x^y(y^2-t^2)}{\int_x^y} > 0 \quad ----- \quad (50)$$

をいう。 先づ $x<y<0$ なる範囲では左辺は x に関して単調増大である。 左辺を x について微分すると、

$$\left\{e^{-\frac{x^2}{2}}\Big/\left(\int_x^y\right)^3\right\} \times \left\{3ye^{-\frac{y^2}{2}}\int_x^y(2t^2-x^2-y^2) + (y^2-1)\int_x^y(t^2-x^2)\int_x^y\right\} \quad \cdots\cdots \quad (51)$$

となるからこれが正であることをいうために第二の $\{\quad\}$ の中が

$x<y<0$ のとき正であることをいえばよい。そこで第二の

$\{\ \}$ の中を x について偏微分すると,

$$-e^{-\frac{x^2}{2}}(y^2-1)\int_x^y(t^2-x^2)-2(y^2-1)x\left(\int_x^y\right)^2+3ye^{-\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{2}}(y^2-x^2)$$

$$-6xye^{-\frac{y^2}{2}}\int_x^y$$

$$=-y^2e^{-\frac{x^2}{2}}\int_x^y(t^2-x^2)+e^{-\frac{x^2}{2}}\int_x^y(t^2-x^2)-2y^2x\left(\int_x^y\right)^2$$

$$+2x\int_x^y+3ye^{-\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{2}}(y^2-x^2)-6xye^{-\frac{y^2}{2}}\int_x^y$$

$$=y^3e^{-\left(\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}\right)}-y^2x\left(e^{-\frac{x^2}{2}}\right)^2-y^2e^{-\frac{x^2}{2}}\int_x^y+x^2y^2e^{-\frac{x^2}{2}}\int_x^y$$

$$+e^{-\frac{x^2}{2}}\int_x^y(t^2-x^2)+2xye^{-\frac{y^2}{2}}\int_x^y-2y^2e^{-\frac{x^2}{2}}\int_x^y+2y^2x\int_x^y\frac{1}{t^2}\int_x^y$$

$$+2x\left(\int_x^y\right)^2+3ye^{-\left(\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}\right)}(y^2-x^2)-6xye^{-\frac{y^2}{2}}\int_x^y$$

$$=4y^3e^{-\left(\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}\right)}-3y^2e^{-\frac{x^2}{2}}\int_x^y-x^2ye^{-\left(\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}\right)}-x^2y^2e^{-\frac{x^2}{2}}\int_x^y\frac{1}{t^2}$$

$$+e^{-\frac{x^2}{2}}\int_x^y(t^2-x^2)-4xye^{-\frac{y^2}{2}}\int_x^y+2y^2x\int_x^y\frac{1}{t^2}\int_x^y+2x\left(\int_x^y\right)^2$$

$$-3x^2ye^{-\left(\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}\right)}$$

$$=4ye^{-\frac{y^2}{2}}\left[(y^2-x^2)e^{-\frac{x^2}{2}}-x\int_x^y\right]-3y^2e^{-\frac{x^2}{2}}\int_x^y$$

$$-x^2y^2e^{-\frac{x^2}{2}}\int_x^y\frac{1}{t^2}+2x\int_x^y\frac{y^2}{t^2}\int_x^y+2x\left(\int_x^y\right)^2$$

$x<y<0$ のとき第二項以下は負，第一項で

$$(y^2-x^2)e^{-\frac{x^2}{2}}-x\int_x^y=e^{-\frac{x^2}{2}}\int_x^y\frac{t}{2}\,dt-x\left(\int_x^y\right)$$

$$=\int_x^y\left(\frac{t}{2}e^{-\frac{x^2}{2}}-xe^{-\frac{t^2}{2}}\right)dt$$

ここで

$$0 < e^{-\frac{x^2}{2}} < e^{-\frac{t^2}{2}},\quad 0 > \frac{t}{2} > x \quad 故に \quad \frac{t}{2}e^{-\frac{x^2}{2}} - xe^{-\frac{t^2}{2}} > 0$$

従って第一項も負，依って $x<y<0$ の範囲では（51）の第二の｛　｝の中は x の単調減小函数，しかも $x=y$ のとき 0 だから $x<y<0$ の範囲で（51）の第二の｛　｝の中は常に正となる。従って（51）が $x<y<0$ で常に正となり，その範囲で（50）の左辺は x に関して単調増大である。

従って $y<0$ のとき常に

$$\boxed{(50)の左辺} > 4(1+y^2) - 3ye^{-\frac{y^2}{2}} \frac{\int_{-\infty}^{y}(y^2-t^2)}{\left(\int_{-\infty}^{y}\right)^2} + (1-y^2)\frac{\int_{-\infty}^{y}(y^2-t^2)}{\int_{-\infty}^{y}}$$

$$\cdots\cdots \quad (52)$$

依って（52）の右辺が $y<0$ のとき常に正であることをいえば，（50）は証明される。

そのため先づ $y<0$ のとき

$$(y^2+5)\int_{-\infty}^{y}(y^2-t^2) + (2y^2+4)\int_{-\infty}^{y} = 3\int_{-\infty}^{y}\left(1-\frac{y^2}{t^2}\right)^2$$

及び

$$\int_{-\infty}^{y}(y^2-t^2) + 2\int_{-\infty}^{y} = \int_{-\infty}^{y}\left(1-\frac{y^2}{t^2}\right)$$

なる二つの等式の成立つことを注意しておく。

（何れも部分積分により容易に検証出来る）

さて，（52）の右辺に $\left(\int_{-\infty}^{y}\right)^2$ をかけると

$$4(1+y^2)\left(\int_{-\infty}^{y}\right)^2 + (1-y^2)\int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{y}(y^2-t^2) - 3ye^{-\frac{y^2}{2}}\int_{-\infty}^{y}(y^2-t^2)$$

$$= 4(1+y^2)\left(\int_{-\infty}^{y}\right)^2 + \int_{-\infty}^{y}(1-y^2-3+3t^2)\int_{-\infty}^{y}(y^2-t^2)$$

$$= 4(1+y^2)\left(\int_{-\infty}^{y}\right)^2 - 3\int_{-\infty}^{y}(y^2-t^2)\int_{-\infty}^{y}(y^2-t^2) + 2\int_{-\infty}^{y}(y^2-1)\int_{-\infty}^{y}(y^2-t^2)$$

$$= 2\left[2(y^2+4)\left(\int_{-\infty}^{y}\right)^2\right] - 12\left(\int_{-\infty}^{y}\right)^2 - 12\int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{y}(y^2-t^2)$$

$$-3\left(\int_{-\infty}^{y}(y^2-t^2)\right)^2 + 2(y^2+5)\int_{-\infty}^{y}(y^2-t^2)\int_{-\infty}^{y}$$

$$= 2\left[2(y^2+4)\left(\int_{-\infty}^{y}\right)^2 + (y^2+5)\int_{-\infty}^{y}(y^2-t^2)\int_{-\infty}^{y}\right]$$

$$-3\left[\int_{-\infty}^{y}(y^2-t^2) + 2\int_{-\infty}^{y}\right]^2$$

ここで上の等式をつかえば

$$= 3\left[\int_{-\infty}^{y}\left(1-\frac{y^2}{t^2}\right)^2\int_{-\infty}^{y} - \left(\int_{-\infty}^{y}\left(1-\frac{y^2}{t^2}\right)\right)^2\right] + 3\int_{-\infty}^{y}\left(1-\frac{y^2}{t^2}\right)^2\int_{-\infty}^{y}$$

Schwarz の不等式により第一項は非負，第二項は正だからこれは正．

5)．$0 > x > y$ のとき

$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2} = 2 - ye^{-\frac{y^2}{2}}\frac{\int_y^x(y^2-t^2)}{\left(\int_y^x\right)^2} + 2\left(\frac{e^{-\frac{y^2}{2}}}{\int_y^x}\right)^2\frac{\int_y^x(y^2-t^2)}{\int_y^x} + 2y\frac{e^{-\frac{y^2}{2}}}{\int_y^x}$$

だから

$$2\left(\int_y^x\right)^3 + 2ye^{-\frac{y^2}{2}}\left(\int_y^x\right)^2 - ye^{-\frac{y^2}{2}}\int_y^x\int_y^x(y^2-t^2) + 2e^{-\frac{y^2}{2}}\int_y^x(y^2-t^2) > 0$$

をいえばよい。　左辺は $x=y$ のとき 0 だから，これを x に関して偏微分したもの．

$$e^{-\frac{x^2}{2}}\left[6\left(\int_y^x\right)^3 + 4ye^{-\frac{y^2}{2}}\int_y^x - ye^{-\frac{y^2}{2}}\int_y^x(y^2-t^2) - ye^{-\frac{y^2}{2}}(y^2-x^2)\int_y^x\right.$$

$$\left. + 2\left(e^{-\frac{y^2}{2}}\right)^2(y^2-x^2)\right]$$

が $0 > x > y$ のとき正であればよい。即ち [　] の中が $0>x>y$ のとき正であればよい。　$x=y$ のとき [　] の中は 0 となるから再び [　] の中の x に関する偏導函数が $0 > x > y$ のとき正で

あることをいえばよい。

[　　] の中を x に関して偏微分すると、

$$2\left[6e^{-\frac{x^2}{2}}\int_y^x + 2ye^{-\left(\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}\right)} - y(y^2-x^2)e^{-\left(\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}\right)} + xye^{-\frac{y^2}{2}}\int_y^x - 2x\left(e^{-\frac{y^2}{2}}\right)^2\right]$$

$$= 2\left[4e^{-\frac{x^2}{2}}\int_y^x + 2x\left\{\left(e^{-\frac{x^2}{2}}\right)^2 - \left(e^{-\frac{y^2}{2}}\right)^2\right\} + 2e^{-\frac{x^2}{2}}\int_y^x t^2 - y(y^2-x^2)e^{-\left(\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}\right)} + xye^{-\frac{y^2}{2}}\int_y^x\right]$$

$$= 2\left[4e^{-\frac{x^2}{2}}\int_y^x - 2e^{-\frac{x^2}{2}}\int_y^x xt - 2e^{-\frac{y^2}{2}}\int_y^x xt + 2e^{-\frac{x^2}{2}}\int_x^y t^2 - y(y^2-x^2)e^{-\left(\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}\right)} + xye^{-\frac{y^2}{2}}\int_y^x\right]$$

$$= 2\left[4e^{-\frac{x^2}{2}}\int_y^x + 2e^{-\frac{x^2}{2}}\int_y^x (t^2-xt) + e^{-\frac{y^2}{2}}\int_y^x (xy-xt) + e^{-\frac{y^2}{2}}\int_y^x \left(2yte^{-\frac{x^2}{2}} - xte^{-\frac{t^2}{2}}\right)dt\right]$$

$y<t<x<0$ だから　$t(t-x)>0,\ x(y-t)>0$

また　$yt>xt>0$　　$e^{-\frac{x^2}{2}} > e^{-\frac{t^2}{2}} > 0$　故に

$2yte^{-\frac{x^2}{2}} - xte^{-\frac{t^2}{2}} > 0$　従って各項正となる。

これですべての場合について　$\partial^2 f(x,y)/\partial y^2 > 0$　が証明された。

附　録　II

lemma 1. の証明．　後半は符号に注意すれば前半と全く同様に証明出来るから，前半のみ示す。　即ち，

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}+\frac{\partial f(z,y)}{\partial y}+\left|\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right|+\left|\frac{\partial f(z,y)}{\partial z}\right| \quad \text{-----} \qquad (53)$$

は $y=\varphi(x,z)$ をみたす x,y,z に対しては常に *non-positive* であること且 0 になるのは $x=y=z$ のときに限ることを証明する。

先づ x,y,z の大小正負に関して x,z が共に負のときは，$y=\varphi(x,z)$ をみたす y は x と z との間にある（本文§1）から，等号の成立つ場合を除くと次の八通りの場合が考えられる。

1). $x<y<z<0$　　5) $y<0<x<z$

2). $z<y<x<0$　　6) $y<0<z<x$

3) $x<y<0<z$　　7) $y<x<0<z$

4) $z<y<0<x$　　8) $y<z<0<x$

ところで（53）は x と z とに関して対称であるから 1), 3), 5) 7) の四つの場合について考えれば十分である。

先づ最初に $a\neq b$ で $a\leq 0$, $b\leq 0$ のとき

$$\int_a^b t^3\int_a^b-\int_a^b t^2\int_a^b t<0 \quad \text{----------} \qquad (54)$$

又 $a\neq b$ で $a\geq 0$, $b\geq 0$ のとき上式の左辺は正となることを注意しておこう。

何故なら（54）の左辺を b について偏微分すると

$$e^{-\frac{b^2}{2}}\int_a^b(b^3+t^3-t^2b-b^2t)=e^{-\frac{b^2}{2}}\int_a^b(b-t)^2(b+t)$$

となりこれは，$a<b\leq 0$ のとき負　$b<a\leq 0$　のとき正となる．　しかも $a=b$　のとき（54）の左辺 $=0$ 故に何れにしても

$a \leq 0$ 且 $b \leq 0$ のとき(54)が成立つ。

$a \neq b$, $a \geq 0$ $b \geq 0$ のとき正となることも同様である。

さて $$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = 2y + \frac{e^{-\frac{y^2}{2}}\int_x^y (t^2-y^2)}{\left(\int_x^y\right)^2} = 2y - \frac{e^{-\frac{y^2}{2}}}{\int_x^y} f(x,y)$$

$$\frac{\partial f(z,y)}{\partial y} = 2y + \frac{e^{-\frac{z^2}{2}}\int_z^y (t^2-y^2)}{\left(\int_z^y\right)^2} = 2y - \frac{e^{-\frac{z^2}{2}}}{\int_z^y} f(z,y)$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}\int_x^y (x^2-t^2)}{\left(\int_x^y\right)^2} = \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\int_x^y} f(y,x)$$

$$\frac{\partial f(z,y)}{\partial z} = \frac{e^{-\frac{z^2}{2}}\int_z^y (z^2-t^2)}{\left(\int_z^y\right)^2} = \frac{e^{-\frac{z^2}{2}}}{\int_z^y} f(y,z)$$

であるが,

1) の場合. $f(y,x) > 0$. $f(y,z) < 0$ となるから

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} > 0, \qquad \frac{\partial f(z,y)}{\partial z} > 0$$ となる。

故に

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} + \frac{\partial f(z,y)}{\partial y} + \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} + \frac{\partial f(z,y)}{\partial z} < 0$$ をいえばよい。

上式の左辺 $= 4y + \left\{\left(x^2 e^{-\frac{x^2}{2}} - y^2 e^{-\frac{y^2}{2}}\right)\int_x^y + \left(-e^{-\frac{x^2}{2}} + e^{-\frac{y^2}{2}}\right)\int_x^y t^2\right\} \Big/ \left(\int_x^y\right)^2$

$$+ \left\{\left(z^2 e^{-\frac{z^2}{2}} - y^2 e^{-\frac{y^2}{2}}\right)\int_z^y + \left(-e^{-\frac{z^2}{2}} + e^{-\frac{y^2}{2}}\right)\int_z^y t^2\right\} \Big/ \left(\int_z^y\right)^2$$

$$= 4y + \left\{\int_x^y t^3 \int_x^y - 2\int_x^y t \int_x^y - \int_x^y t^2 \int_x^y t\right\} \Big/ \left(\int_x^y\right)^2$$
$$+ \left\{\int_z^y t^3 \int_z^y - \int_z^y t^2 \int_z^y t - 2\int_z^y t \int_z^y\right\} \Big/ \left(\int_z^y\right)^2$$

$$= \left\{4y\int_x^y\int_z^y - 2\int_x^y t\int_z^y - 2\int_z^y t\int_x^y\right\}\Big/\left(\int_x^y\int_z^y\right)$$

$$+\left\{\int_x^y t^3\int_x^y - \int_x^y t^2\int_x^y t\right\}\Big/\left(\int_x^y\right)^2 + \left\{\int_z^y t^3\int_z^y - \int_z^y t^2\int_z^y t\right\}\Big/\left(\int_z^y\right)^2$$

（54）によれば最後の二項は夫々負になるから最初の項が負になることを示せばよい。　$x<y<z$ だから $\int_y^z\int_x^y>0$ 又 $y<0$ だから第一項の分母分子とも z から y までの積分を y から z までの積分におきかえ，然る後に分子に y をかけたもの．

$$4y^2\int_x^y\int_y^z - 2\int_x^y yt\int_y^z - 2\int_y^z yt\int_x^y$$

が正であることをいえばよい。

$$\text{上式} = \int_x^y(y-t)^2\int_y^z + \int_y^z(y-t)^2\int_x^y + \int_x^y(y^2-t^2)\int_y^z + \int_x^y\int_y^z(y^2-t^2)$$

となるが，x, y, z は $y=\varphi(x,z)$ をみたすべきであるから

$$\int_x^y(y^2-t^2)\Big/\int_x^y + \int_z^y(y^2-t^2)\Big/\int_z^y = 0$$

をみたすべきであり，従って上式の最後の二項はきえる，依って

$$\text{上式} = \int_x^y(y-t)^2\int_y^z + \int_y^z(y-t)^2\int_x^y > 0$$

以上

3）の場合

明かに $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}>0$ であるが $\dfrac{\partial f(z,y)}{\partial z}$ は正負 0 何れの場合もある。　依って先ず

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} + \frac{\partial f(z,y)}{\partial y} + \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} + \frac{\partial f(z,y)}{\partial z} \quad \cdots\cdots \quad (55)$$

が負になることを示そう。

1）の場合の時の計算から

$$\text{上式} = \frac{1}{y}\left\{\int_x^y (y-t)^2 \int_y^z + \int_y^z (y-t)^2 \int_x^y\right\} \Big/ \left(\int_x^y \int_y^z\right)$$

$$+ \left(\int_x^y t^3 \int_x^y - \int_x^y t^2 \int_x^y t\right) \Big/ \left(\int_x^y\right)^2 + \left(\int_x^y t^3 \int_z^y - \int_z^y t^2 \int_z^y t\right) \Big/ \left(\int_z^y\right)^2$$

となるわけであるが，これを更に変形すると $= \left\{\int_y^z \frac{(y-t)^2}{y} \int_y^z + \int_y^z t^3 \int_y^z - \int_y^z t^2 \int_y^z t\right\} \Big/ \left(\int_y^z\right)^2$

$$+ \left\{\int_x^y \frac{(y-t)^2}{y} \int_x^y + \int_x^y t^3 \int_x^y - \int_x^y t^2 \int_x^y t\right\} \Big/ \left(\int_x^y\right)^2 \quad \text{-----} \quad (56)$$

ここで第一項の｛　　｝の中は，

$$= \int_y^z (y-t)^2 \frac{z}{y} e^{-\frac{z^2}{2}} - e^{-\frac{y^2}{2}} \int_y^z (y-t)^2 + \int_y^z t^3 \int_y^z - \int_y^z t^2 \int_y^z t$$

$$+ \int_y^z (y-t)^2 \int_y^z \frac{t^2}{y}$$

$$= \frac{z}{y} e^{-\frac{z^2}{2}} \int_y^z (y-t)^2 + \frac{1}{y} \int_y^z (y-t)^2 \int_y^z t^2 + \Big[-y^2 e^{-\frac{y^2}{2}} \int_y^z$$

$$+ 2y e^{-\frac{y^2}{2}} \int_y^z t - e^{-\frac{y^2}{2}} \int_y^z t^2 + \int_y^z (t^3 - 2t) \int_y^z + 2 \int_y^z t \int_y^z$$

$$+ e^{-\frac{z^2}{2}} \int_y^z t^2 - e^{-\frac{y^2}{2}} \int_y^z t^2 \Big]$$

明かに第一項，第二項は負で［　　］の中は

$$= -z^2 e^{-\frac{z^2}{2}} \int_y^z - 2 e^{-\frac{y^2}{2}} \int_y^z t^2 + e^{-\frac{z^2}{2}} \int_y^z t^2 + 2 \int_y^z t z e^{-\frac{z^2}{2}} + 2 \int_y^z t \int_y^z t^2$$

$$= -e^{-\frac{z^2}{2}} \int_y^z (z-t)^2 < 0$$

従って（56）の第一項は負　$x < y < 0$ だから（54）をつかって（56）の第二項が負になることは容易にわかる。　　以上．

次に

$$-\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} + \frac{\partial f(z,y)}{\partial y} + \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial f(z,y)}{\partial z}$$

が負になることを示そう。

$$上式 = (55) - \lambda \frac{\partial f(z,y)}{\partial z}$$

$$= \int_x^y (y-t)^2 \Big/ \left(y \int_x^y\right) + \left(\int_x^y t^3 \int_x^y - \int_x^y t^2 \int_x^y t\right) \Big/ \left(\int_x^y\right)^2$$

$$+ \left(\int_y^z t^3 \int_y^z - \int_y^z t^2 \int_y^z t\right) \Big/ \left(\int_y^z\right)^2 + 2e^{-\frac{z^2}{2}} \int_y^z (z^2 - t^2) \Big/ \left(\int_y^z\right)^2$$

$$+ \int_y^z (y-t)^2 \Big/ \left(y \int_y^z\right)$$

$$= \int_x^y (y-t)^2 \Big/ \left(y \int_x^y\right) + \left(\int_x^y t^3 \int_x^y - \int_x^y t^2 \int_x^y t\right) \Big/ \left(\int_x^y\right)^2$$

$$+ \int_y^z (y-t)^2 \int_y^z t^2 \Big/ \left\{ y \left(\int_y^z\right)^2 \right\}$$

$$+ e^{-\frac{z^2}{2}} \left[\int_y^z (y-t)^2 \frac{z}{y} - \int_y^z (z-t)^2 + 2\int_y^z (z^2 - t^2) \right] \Big/ \left(\int_y^z\right)^2$$

ここで第一項，第二項，第三項は何れも負であることは明かである。　従って第四項の［　］の中が非正であることをいえばよい。即ち

$$\int_y^z \left[(y-t)^2 \frac{z}{y} - (z-t)^2 + 2(z^2 - t^2) \right] \leq 0 \qquad \text{----} \quad (57)$$

をいえばよい。

$$(57) の左辺 = \frac{1}{y} \int_y^z \left[yz(z+y) + (z-3y)t^2 \right]$$

$$= \frac{1}{y} \int_y^z \left[(z-y)(yz+t^2) + 2y(yz-t^2) \right]$$

となるが今これが正であると假定すると $y<0$, $z>0$　従って又 $yz - t^2 < 0$　だから　$\frac{1}{y} \int_y^z (z-y)(yz+t^2) > 0$　でなければならぬ。

すると $z > 0 > y$ から $\int_y^z (yz+t^2) < 0$　でなければならぬ。故に $yz \int_y^z < -\int_y^z t^2$.

依って

$$0<\frac{1}{y}\int_y^z\left[yz(z+y)-3(y-z)t^2\right]<\frac{1}{y}\int_y^z\left[yz(z+y)+3(y-z)yz\right]$$
$$=4yz\int_y^z<0$$

となり矛盾。 従って (57) が成立つ。

以 上

5) の場合

$\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f(z,y)}{\partial z}$ は正にも負にもなる。

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}+\frac{\partial f(z,y)}{\partial y}+\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}+\frac{\partial f(z,y)}{\partial z}$$

は 3) の場合 (56) を導出したと同じ計算から

$$=\left\{\left(\int_y^x t^3\int_y^x-\int_y^x t^2\int_y^x t\right)\Big/\left(\int_y^x\right)^2+\int_y^x(y-t)^2\Big/\left(y\int_y^x\right)\right\}$$
$$+\left\{\left(\int_y^z t^3-\int_y^z t^2\int_y^z t\right)\Big/\left(\int_y^z\right)^2+\int_y^z(y-t)^2\Big/\left(y\int_y^z\right)\right\}\cdots\cdots \quad (58)$$

第一の { } の中に $\left(\int_y^x\right)^2$ をかけたものは

$$=\int_y^x(t^3-2t)\int_y^x+\int_y^x 2t\int_y^x-\int_y^x t^2\int_y^x t+\frac{x}{y}e^{-\frac{x^2}{2}}\int_y^x(x-t)^2$$
$$-e^{-\frac{y^2}{2}}\int_y^x(y-t)^2+\frac{1}{y}\int_y^x t^2\int_y^x(y-t)^2$$
$$=-x^2e^{-\frac{x^2}{2}}\int_y^x+y^2e^{-\frac{y^2}{2}}\int_y^x+2\int_y^x t\int_y^x-\int_y^x t^2\int_y^x t+\frac{x}{y}e^{-\frac{x^2}{2}}\int_y^x(y-t)^2$$
$$-y^2e^{-\frac{y^2}{2}}\int_y^x+2ye^{-\frac{y^2}{2}}\int_y^x t-e^{-\frac{y^2}{2}}\int_y^x t^2+\frac{1}{y}\int_y^x t^2\int_y^x(y-t)^2$$
$$=-x^2e^{-\frac{x^2}{2}}\int_y^x+2xe^{-\frac{y^2}{2}}\int_y^x t-2ye^{-\frac{y^2}{2}}\int_y^x t+2\int_y^x t\int_y^x t^2$$
$$-\int_y^x t^2\int_y^x t+2ye^{-\frac{y^2}{2}}\int_y^x t-e^{-\frac{y^2}{2}}\int_y^x t^2+\frac{x}{y}e^{-\frac{x^2}{2}}\int_y^x(y-t)^2+\frac{1}{y}\int_y^x t^2\int_y^x(y-t)^2$$

$$= -e^{-\frac{x^2}{2}}\int_y^x (x-t)^2 + e^{-\frac{x^2}{2}}\int_y^x t^2 + \int_y^x t^2 \int_y^x t - e^{-\frac{y^2}{2}}\int_y^x t^2 + \frac{x}{y} e^{-\frac{x^2}{2}}\int_y^x (y-t)^2$$

$$+ \frac{1}{y}\int_y^x t^2 \int_y^x (y-t)^2$$

$$= -e^{-\frac{x^2}{2}}\int_y^x (x-t)^2 + \frac{x}{y} e^{-\frac{x^2}{2}}\int_y^x (y-t)^2 + \frac{1}{y}\int_y^x t^2 \int_y^x (y-t)^2$$

となり　$y<0<x$　なることを考えるとこの各項は負になることは明か。

同様に（58）の第二の括弧の中は $\left(\int_y^z\right)^2$ をかけると

$$-e^{-\frac{z^2}{2}}\int_y^z (z-t)^2 + \frac{z}{y} e^{-\frac{z^2}{2}}\int_y^z (y-t)^2 + \frac{1}{y}\int_y^z t^2 \int_y^z (y-t)^2 < 0$$

となるから（58）は負になる。

次に

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} + \frac{\partial f(z,y)}{\partial y} + \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial f(z,y)}{\partial z}$$

$$= \left\{\left(\int_y^x t^3 \int_y^x - \int_y^x t^2 \int_y^x t\right)\Big/\left(\int_y^x\right)^2 + \int_y^x (y-t)^2\Big/\left(y\int_y^x\right)\right\}$$

$$+ \left\{\left(\int_y^z t^3 \int_y^z - \int_y^z t^2 \int_y^z t\right)\Big/\left(\int_y^z\right)^2 + \int_y^z (y-t)^2\Big/\left(y\int_y^z\right)\right.$$

$$\left. + 2e^{-\frac{z^2}{2}}\int_y^z (z^2-t^2)\Big/\left(\int_y^z\right)^2\right\}$$

第一の｛　｝は，上の結果により負，第二の｛　｝中は 3）の後の場合と同じ計算で

$$\int_y^z (y-t)^2 \int_y^z t^2 \Big/ \left\{y\left(\int_y^z\right)^2\right\} + e^{-\frac{z^2}{2}}\int_y^z \left\{yz(y+z) + (z+3y)t^2\right\} \Big/ \left\{y\left(\int_y^z\right)^2\right\}$$

となり 3）の場合の時と同じ理由で負になる。

同様に

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} + \frac{\partial f(z,y)}{\partial y} - \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} + \frac{\partial f(z,y)}{\partial z}$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}+\frac{\partial f(z,y)}{\partial y}-\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}-\frac{\partial f(z,y)}{\partial z} \quad も$$

負になることがいえる。

7）の場合

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}>0 \quad となる。$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}+\frac{\partial f(z,y)}{\partial y}+\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}+\frac{\partial f(z,y)}{\partial z}$$

は 3）及び 5）の場合と同じく（56）の形に導ける。

（56）の最初の｛ ｝の中は，$y<x<0$ のときに負なら，$x<y<0$ のときも同じく負であることは明かで 3）のときと同じ理由で負になる。

又，第二の｛ ｝の中が負であることは 5）の場合と同じである。即ち第二の｛ ｝の中には x が含まれて居らず，5）の場合これが負になることは x に無関係に $y<0$，$z>0$ なることだけから結論したのであるからである。

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}+\frac{\partial f(z,y)}{\partial y}+\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}-\frac{\partial f(z,y)}{\partial z}$$

も前の場合と同様に 3）の場合と 5）の場合の結果を組合せることにより容易に負になることを結論し得る。

さて等号がある場合を考えよう。

先づ 1）の場合で等号をゆるすとすると，$x=y$ の時も，$y=z$ のときも $x=y=z$ でなければならない。結局，

9）$x=y=z<0$　10）．$x<y<z=0$，11）．$x=y=z=0$

の三つの場合を考えればよい。

次に 3）の場合で等号をゆるすと，$y=0$ となるのは 11）の場合に限られるから，

12) $x = y < 0 < z$　　10) $x < y < 0 = z$

の場合であつて，あとの場合は 10)と同じだから新たに 12)の場合だけ考えればよい。

次に，5) の場合等号をゆるすとすると，

13). $y < 0 = x < z$　　14) $y < 0 < x = z$

を考えればよい。その他のときは 11) の場合に帰するからである。

更に 7) の場合で等号をゆるすことを考えてもすべて今までの場合と一致する。

従って 9), 10), 11), 12), 13), 14) の場合について検討すればよい。

先づ

$$\lim_{x \to y} \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = y$$

$$\lim_{x \to y} \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = -y.$$

だから 9) 及び 11) の場合は，(53) は 0 となる。

1) の場合の証明で $z = 0$ としても何ら差支えないから 10) のときにも (53) は負になる。

12) の場合，

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} + \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = 0 \quad となるから$$

$$\frac{\partial f(z, y)}{\partial y} + \left| \frac{\partial f(z, y)}{\partial z} \right| \quad を考えればよい。$$

この場合 $f(y, y) + f(z, y) = 0$ がみたさるべきであり，

$f(y, y) = 0$ 従って $f(z, y) = 0$

従って $\dfrac{\partial f(z, y)}{\partial y} = 2y$ となる。

$$\frac{\partial f(z,y)}{\partial y}+\frac{\partial f(z,y)}{\partial z}=\frac{2y(\int_y^z)^2-e^{-\frac{z^2}{2}}\int_y^z(z^2-t^2)}{(\int_z^y)^2}$$

$$分子=\left[2yze^{-\frac{z^2}{2}}\int_y^z-2y^2e^{-\frac{y^2}{2}}\int_y^z+2y\int_y^z t^2\int_y^z-z^2e^{-\frac{z^2}{2}}\int_y^z+e^{-\frac{z^2}{2}}\int_y^z t^2\right]$$

$$=-(z-y)^2e^{-\frac{z^2}{2}}\int_y^z-y^2e^{-\frac{y^2}{2}}\int_y^z+2y\int_y^z t^2\int_y^z+e^{-\frac{z^2}{2}}\int_y^z t^2$$

ところで　$f(z,y)=0$　即ち　$\int_y^z y^2=\int_y^z t^2$　だから

$$上式=-(z-y)^2e^{-\frac{z^2}{2}}\int_y^z-\int_y^z t\int_y^z t^2+2y\int_y^z t^2\int_y^z$$

$$=-(z-y)^2e^{-\frac{z^2}{2}}\int_y^z+\int_y^z(y-t)\int_y^z t^2+y\int_y^z t^2\int_y^z$$

各項は負となるからこれは負

次に

$$\frac{\partial f(z,y)}{\partial y}-\frac{\partial f(z,y)}{\partial z}=\frac{2y(\int_y^z)^2+e^{-\frac{z^2}{2}}\int_y^z(z^2-t^2)}{(\int_z^y)^2}\quad\cdots\cdots(59)$$

この場合　$\int_y^z y^2=\int_y^z t^2$　だから

$$e^{-\frac{z^2}{2}}\int_y^z(z^2-t^2)=(z^2-y^2)e^{-\frac{z^2}{2}}\int_y^z$$

従って　$|z|<|y|$　のときは（59）は負となる。

$z>|y|$　のとき

（57）により　$\int_y^z\left[(y-t)^2\frac{z}{y}-(z-t)^2+2(z^2-t^2)\right]\leq 0$

この左辺を　$\int_y^z y^2=\int_y^z t^2$　として計算すると、

$$2\int_y^z(yz-y^2)+\int_y^z(z^2-t^2)\leq 0$$

となる。　従って（59）の $\int_y^z(z^2-t^2)$ を $-2\int_y^z(yz-y^2)$ でおき

かえると（59）より大になる。　従ってそれが負になることを示せば十分である。

つまり　$2y\left(\int_y^z\right)^2-2e^{-\frac{z^2}{2}}(yz-y^2)\int_y^z<0$　をいえばよい。

それには　$\int_y^z - e^{-\frac{z^2}{2}}(z-y)>0$　をいえばよい。

この左辺は　$ze^{-\frac{z^2}{2}}-ye^{-\frac{y^2}{2}}+\int_y^z t^2-ze^{-\frac{z^2}{2}}+ye^{-\frac{z^2}{2}}$

$$=\int_y^z (t^2-yt)$$

$$=\int_y^0 t(t-y)+\int_0^{-y} t(t-y)+\int_{-y}^z t(t-y)$$

$$=\int_0^{-y} t(t-y)+\int_{-y}^0 t(t+y)+\int_{-y}^z t(t-y)$$

$$=-y\int_0^{-y} t+\int_{-y}^z t(t-y)$$

第一項は明かに正で第二項も integrand は正だから正。

以上。

13）の場合は 5）の場合に於て $x=0$ としても問題はないからやはり（53）は負

14）の場合，5）の時の証明に於て x と z との大小の関係は問題にならないからやはり負である。

以上すべての場合についての証明が出来た。

Zur Eigenschaften der Lösungen eines Gewissen Gleichungssystems.

— Anmerkungen an die Abhandlung von Herrn Dr. J. Ogawa, "Contributions to the Theory of Systematic Statistics I." — II —

Isao Higuti

Herr Dr. J. Ogawa hat, in seiner Abhandlung, daß, um die Streuung einer statistischen Gesammtheit vermittels "Systematic Statistics" zu mutmaßen, ist es best solche "Spacing", welche die Größe K (1) Maximum machen aufzunehmen, abgeleitet.

Un solchen Maximumpunkt auszufinden, darf man von der Lösungen des Gleichungssystems (2) aussuchen.

Aber aus dem systematische statistischen Gesichtpunkte ist es nötig daß die Ordnung (3) gilt.

Ich hat in diesem Arbeit gefunden und bewiesen, daß ——

1) Mit Rücksicht auf der Ordnung (3), ist es

hinreichend, nur das System (4), wo

$$F_i = \frac{\int_{x_{i-1}}^{x_i}(x_i^2-t^2)e^{-\frac{t^2}{2}}dt}{\int_{x_{i-1}}^{x_i}e^{-\frac{t^2}{2}}dt} + \frac{\int_{x_i}^{x_{i+1}}(x_i^2-t^2)e^{-\frac{t^2}{2}}dt}{\int_{x_i}^{x_{i+1}}e^{-\frac{t^2}{2}}dt}$$

zu behandeln

2) Das System (4) hat 2^k Lösungen, und bestimmt man die Anzahl von positiver Wurzeln, dann gibt es eine und nur eine Lösung.

3) Also hat (4) eben $(k+1)$ Lösungen, die die Ordnung (3) erfüllt.

Alle diese $(k+1)$ Lösungen sind zwar Maximumpunkte von K.

Aber leider kann ich nicht das Problem, „Welche von $(k+1)$ Lösungen den K den größten Wert annehmen läßt?" logisch auslösen

Jan. 30. 1953