(11) Runの長さによる検定に関する数表について.

高島　己千雄

勝間　昭一郎

Non – parametric test の一つに，順列組合せの理論を応用した run による検定がある.

一般にそれぞれ m, n 個の2種類のもの a, b があり，それらを一列にならべた時，a, b の run の総数を r, s であらわし，その中で長さが $1, 2, \cdots, m$ および $1, 2, \cdots, n$ であるものをそれぞれ $r_1, r_2, \cdots, r_m$ および $s_1, s_2, \cdots, s_n$ とする。もちろんここで

$$r = \sum_{i=1}^{m} i r_i \quad , \quad s = \sum_{j=1}^{n} j s_j$$

なる関係がある.

Run の総数 $r + s = u$ の分布に関しては F.S.Swed および C.Eisenhart[1]）によって詳細な分布表が作られており，さらに A.Wald および J.Wolfowitz[2]）によって u の分布（漸近分布）が研究されている。以下において，求めたものは run の長さによる検定に関する数表である.

さて，長さ t 以上の a の run が少くとも1つあらわれる確率 $Q_1(t)$ を求めると，

$Q_1(t)$

$$= 1 - \left\{ \sum{}' \binom{n+1}{r} \sum_{i=0}^{i^*(r)} (-1)^i \binom{r}{i} \binom{m-i(t-1)-1}{r-1} \right\} \Big/ \binom{m+n}{m}$$

となる，ただしここに Σ' は $\frac{m}{t-1} \leqq r \leqq m$ の範囲の r についての和で，$i^*(r)$ は不等式

$$0 \leqq i \leqq r, \quad i \leqq \frac{m-r}{t-1}$$

を満足する最大の整数 i で，また $r > n+1$ のときは $\binom{n+1}{r} = 0$ と約束する。　全く同様にして（式の形も同様な）長さ t 以上の b の run が少くとも一つあらわれる確率 $Q_2(t)$ が求められる。

さらに，同様にして，長さ t 以上の a または b の run（したがつて a, b 両方でもよい）が少くとも一つあらわれる確率 $Q(t)$ が求められる。　すなわち

$$Q(t) = 1 - A \Big/ \binom{m+n}{m}.$$

ただしここで

$$A = \sum{}' \sum{}'' F(r,s) \sum_{i=0}^{i^*(r)} (-1)^i \binom{r}{i} \binom{m-i(t-1)-1}{r-1}$$
$$\times \sum_{j=0}^{j^*(s)} (-1)^j \binom{s}{j} \binom{n-j(t-1)-1}{s-1}$$

で，Σ'，Σ'' はそれぞれ $\frac{m}{t-1} \leqq r \leqq m$，$\frac{n}{t-1} \leqq s \leqq n$ の範囲の r, s についての和で，$i^*(r)$，$j^*(s)$ はそれぞれ不等式

$$0 \leqq i \leqq r, \quad i \leqq \frac{m-r}{t-1}\ ; \quad 0 \leqq j \leqq s, \quad j \leqq \frac{n-s}{t-1}$$

を満足する最大の整数 i, j で，$r > n+1$ のときは $\binom{n+1}{r} = 0$，$s > m+1$ のときは $\binom{m+1}{s} = 0$ と規約する．また $F(r,s)$ は．

$$F(r, s) = \begin{cases} 0 & (|r-s| > 1) \\ 1 & (|r-s| = 1) \\ 2 & (r = s) \end{cases}$$

なる函数である。

F. Mosteller は $m = n = 5, 10, 15, 20, 25$ の各場合について、$Q_1(t)$ [$Q_2(t)$] および $Q(t)$ が 0.05 以下になる最小の整数 t（これを $t_{0.05}$ と書くことにする）ならびに 0.01 以下になる最小の整数 t（これを $t_{0.01}$ と書くことにする）を表にしている。[4)]

われわれは $1 \leqq m \leqq 20$, $1 \leqq n \leqq 20$ の範囲にわたる m, n の組について、上記の $t_{0.05}$ および $t_{0.01}$ を計算した。

ここにかかげたものは $Q(t)$ に関するもので、$Q_1(t)$ [$Q_2(t)$] に関するものは次回に書くことにする。

$t = t_{0.05}$ の表

m \ n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1																				
2																				
3																				
4																				
5				5	5															
6			6	6	6	6														
7			7	7	6	6	6													
8			8	8	7	7	7	7												
9			9	8	8	7	7	7	7											
10		10	10	9	8	8	7	7	7	7										
11		11	10	10	9	8	8	8	7	7	7									
12		12	11	10	10	9	9	8	8	8	8	8								
13		13	12	11	10	10	9	9	8	8	8	8	8							
14		14	13	12	11	10	10	9	9	8	8	8	8	8						
15		15	13	12	11	11	10	10	9	9	9	8	8	8	8					
16		16	14	13	12	11	11	10	10	9	9	9	8	8	8	8				
17		17	15	14	13	12	11	11	10	10	9	9	9	9	8	8	8			
18		17	16	14	13	12	12	11	11	10	10	9	9	9	9	9	9	9		
19		18	17	15	14	13	12	12	11	11	10	10	9	[illegible]	9	9	9	9	9	
20		19	17	16	15	14	13	12	11	11	10	10	10	9	9	9	9	9	9	9

$t = t_{0.01}$ の表

m \ n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1																				
2																				
3																				
4																				
5																				
6																				
7					7	7	7													
8					8	8	8	8												
9				9	9	8	8	8	8											
10				10	10	9	9	8	8	8										
11				11	10	10	9	9	9	9	9									
12			12	12	11	11	10	10	9	9	9	9								
13			13	13	12	11	11	10	10	9	9	9	9							
14			14	13	13	12	11	11	10	10	10	9	9	9						
15			15	14	13	13	12	11	11	11	10	10	10	10	10					
16			16	15	14	13	13	12	11	11	11	10	10	10	10	10				
17			17	16	15	14	13	13	12	12	11	11	10	10	10	10	10			
18			18	17	15	15	14	13	13	12	12	11	11	11	10	10	10	10		
19			19	17	16	15	14	14	13	13	12	12	11	11	11	10	10	10	10	
20			19	18	17	16	15	14	14	13	13	12	12	11	11	11	11	10	10	10

脚　註

1). F.S. Swed and C. Eisenhart, Tables for testing randomness of grouping in a sequence of alternatives, Ann. Math. Stat., XIV (1943).

2). A. Wald and J. Wolfowitz, On a test whether two samples are from the same population. Ann. Math. Stat., XI (1940)

3) たとえば

S. S. Wilks, Mathematical Statistics, Princeton (1943), Chap. X.

成実，遠藤，鍋谷，統計解析の理論（統計数理講座，第2巻）(1951)

4) F. Mosteller, Note on an application of runs to quality control charts, Ann. Math. Stat., XII (1941).