(1) 或る方程式系の解の存在と一意性について

―――小川先生の論文に寄すI―――

樋口伊佐夫

大阪大学小川潤次郎先生が"系統統計量"(講究録6巻10号)という論文の中で *Optimum spacing* をきめるための方程式系を導いて居られるが，その解の数学的解析が未だなされていない。

統数研丸山文行氏にその解析を行うようすゝめられた。母分散の既知の場合と，母平均が既知の場合と二通りあるが，母分散が既知の場合は比較的簡単なように思えたので，まず手をつけて一応解決した。以下これを報告する。

問題は

$$
(1)\begin{cases}
2x_1+\dfrac{e^{-\frac{x_1^2}{2}}}{\int_{-\infty}^{x_1}e^{-\frac{t^2}{2}}dt}+\dfrac{e^{-\frac{x_2^2}{2}}-e^{-\frac{x_1^2}{2}}}{\int_{x_1}^{x_2}e^{-\frac{t^2}{2}}dt}=0\\[2ex]
2x_i+\dfrac{e^{-\frac{x_i^2}{2}}-e^{-\frac{x_{i-1}^2}{2}}}{\int_{x_{i-1}}^{x_i}e^{-\frac{t^2}{2}}dt}+\dfrac{e^{-\frac{x_{i+1}^2}{2}}-e^{-\frac{x_i^2}{2}}}{\int_{x_i}^{x_{i+1}}e^{-\frac{t^2}{2}}dt}=0\\
\qquad\qquad\qquad\qquad (i=2,\cdots\cdots,k-1)\\
2x_k+\dfrac{e^{-\frac{x_k^2}{2}}-e^{-\frac{x_{k-1}^2}{2}}}{\int_{x_{k-1}}^{x_k}e^{-\frac{t^2}{2}}dt}+\dfrac{-e^{-\frac{x_k^2}{2}}}{\int_{x_k}^{\infty}e^{-\frac{t^2}{2}}dt}=0
\end{cases}
$$

この系の実根が存在して，かつ唯一組に限る。しかもその根を（$x_1^\circ, x_2^\circ, \cdots, x_k^\circ$）とすると，

$$x_i^\circ + x_{k+1-i}^\circ = 0 \quad (i = 1, 2, \cdots, k)$$

が成立つということである。

すでに，小川先生が指摘されているように，各 x_i を $-x_i$ でおきかえると第 i 番目の方程式はもとの方程式系の第 $k+1-i$ 番目の方程式そのものになるから，根の唯一性（小川先生の予見）が証明出来れば $x_i^\circ + x_{k+1-i}^\circ = 0$ は自動的にいえることになる。そこで私に課せられた仕事は根の存在と唯一性の証明を與えることである。

この仕事に際して用いた手段は，数値計算で見透しをつけてそれに理くつをつけるという，きわめて野暮且つ初等的なものであるが，そういう手段で成功した例として面白いと思っている。もっと別な方法で簡単な，きれいな，或いはより一般的な証明が出来るであろうが，今の所そういう努力をするつもりはない。

私達の証明で解決のカギとなったのは

$$(2)\quad \begin{cases} x_1 = v_1 \\ x_2 = v_1 + v_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_k = v_1 + v_2 + \cdots\cdots + v_k \end{cases}$$

なる一対一変数変換の発見であった。依って問題の方程式系の，$x_1, \cdots\cdots, x_k$ にこれを入れた $v_1, \cdots\cdots, v_k$ の方程式系について根の存在及び唯一性の証明をする。

§ 1　準備の不等式

a, b の如何にかかわらず，$a \neq b$ なら常に

$$\text{(A)} \quad \boxed{\left(\int_a^b e^{-\frac{t^2}{2}}dt\right)^2 > \left(be^{-\frac{b^2}{2}} - ae^{-\frac{a^2}{2}}\right)\int_a^b e^{-\frac{t^2}{2}}dt + \left(e^{-\frac{b^2}{2}} - e^{-\frac{a^2}{2}}\right)^2}$$

証明：

$$\left(\int_a^b e^{-\frac{t^2}{2}}dt\right)^2 = \left\{\int_a^b (1-t^2)e^{-\frac{t^2}{2}}dt + \int_a^b t^2 e^{-\frac{t^2}{2}}dt\right\}\int_a^b e^{-\frac{t^2}{2}}dt$$

$$= \left(be^{-\frac{b^2}{2}} - ae^{-\frac{a^2}{2}}\right)\int_a^b e^{-\frac{t^2}{2}}dt + \int_a^b t^2 e^{-\frac{t^2}{2}}dt \int_a^b e^{-\frac{t^2}{2}}dt$$

この式の最後の項に，Schwarz の不等式

$$\int_a^b t^2 e^{-\frac{t^2}{2}}dt \int_a^b e^{-\frac{t^2}{2}}dt > \left(\int_a^b te^{-\frac{t^2}{2}}dt\right)^2 = \left(e^{-\frac{b^2}{2}} - e^{-\frac{a^2}{2}}\right)^2$$

を用いると証明は終る。

（こゝで $a > b$, $b < a$ の何れでも成立つことを注意しておく）

特に $a \to -\infty$ とすると

$$\text{(B)} \begin{cases} \boxed{\left(\int_{-\infty}^b e^{-\frac{t^2}{2}}dt\right)^2 - \left(e^{-\frac{b^2}{2}}\right)^2 - be^{-\frac{b^2}{2}}\int_{-\infty}^b e^{-\frac{t^2}{2}}dt > 0} \\ b \to +\infty \text{ とすると} \\ \boxed{\left(\int_a^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}dt\right)^2 - \left(e^{-\frac{a^2}{2}}\right)^2 + ae^{-\frac{a^2}{2}}\int_a^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}dt > 0} \end{cases}$$

さらに，a, b の如何にかゝわらず，$a \neq b$ なら

$$\text{(C)} \quad \boxed{b\int_a^b e^{-\frac{t^2}{2}}dt + e^{-\frac{b^2}{2}} - e^{-\frac{a^2}{2}} > 0, \quad a\int_a^b e^{-\frac{t^2}{2}}dt + e^{-\frac{b^2}{2}} - e^{-\frac{a^2}{2}} < 0}$$

証明　　左辺 $= \int_a^b b e^{-\frac{t^2}{2}} dt - \int_a^b t e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \int_a^b (b-t) e^{-\frac{t^2}{2}} dt$

$b > a$ なら $b > t > a$ の範囲で integrand は正になり $a < b$ なら integrand は負になるから　左辺 > 0

同様に第二の不等式も証明出来る。

この不等式の特別の場合として

(D)　$$\boxed{b \int_a^b e^{-\frac{t^2}{2}} dt + e^{-\frac{b^2}{2}} > 0, \quad a \int_a^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt - e^{-\frac{a^2}{2}} < 0}$$

不等式 (A) 及び (C) を組合せると容易に $a \neq b$ なら常に

(E)
$$\boxed{\begin{array}{l} \left(\int_a^b e^{-\frac{t^2}{2}} dt\right)^2 + a e^{-\frac{a^2}{2}} \int_a^b e^{-\frac{t^2}{2}} dt + e^{-\frac{a^2}{2}} \left(e^{-\frac{b^2}{2}} - e^{-\frac{a^2}{2}}\right) \\ \left(\int_a^b e^{-\frac{t^2}{2}} dt\right) - b e^{-\frac{b^2}{2}} \int_a^b e^{-\frac{t^2}{2}} dt - e^{-\frac{b^2}{2}} \left(e^{-\frac{b^2}{2}} - e^{-\frac{a^2}{2}}\right) \end{array}}$$

なることがわかる。

§ 2. 函数 F, G, H の定義とその性質

$$G(x, y) \equiv \frac{e^{-\frac{x^2}{2}} - e^{-\frac{y^2}{2}}}{\int_x^y e^{-\frac{t^2}{2}} dt}$$

$\lim_{x \to \infty} G(x, y)$ 等を $G(\infty, y)$ 等とあらわす。

$$F(x, y, Z) \equiv 2y - G(x, y) - G(y, Z)$$

$$\begin{cases} H_1(v_1, v_2) \equiv F(-\infty, v_1, v_1 + v_2) \\ H_i(v_1, v_2, \cdots\cdots, v_{i+1}) \equiv F\left(\sum_{j=1}^{i-1} v_j, \sum_{j=1}^{i} v_j, \sum_{j=1}^{i+1} v_j\right) \quad (i \geq 2) \end{cases}$$

と定義する。

明かに $G(x, y) = G(y, x)$, $G(-x, -y) = -G(x, y)$

$x \neq y$ なる所では $G(x, y)$ は x に関しても y に関しても glatt である。又 $x \to y$ のとき $G(x, y) \to y$ となるから，$G(x, x) = x$ とすれば $G(x, y)$ は x, y の何れに関してもいたる所で glatt な函数となる。

さて $x \neq y$ のとき

$$\frac{\partial G(x,y)}{\partial x} = \frac{-xe^{-\frac{x^2}{2}}\int_x^y e^{-\frac{t^2}{2}}dt - e^{-\frac{x^2}{2}}\left(e^{-\frac{y^2}{2}} - e^{-\frac{x^2}{2}}\right)}{\left(\int_x^y e^{-\frac{t^2}{2}}dt\right)^2}$$

$$\frac{\partial G(x,y)}{\partial y} = \frac{ye^{-\frac{y^2}{2}}\int_x^y e^{-\frac{t^2}{2}}dt + e^{-\frac{y^2}{2}}\left(e^{-\frac{y^2}{2}} - e^{-\frac{x^2}{2}}\right)}{\left(\int_x^y e^{-\frac{t^2}{2}}dt\right)^2}$$

で，分母は正，分子は不等式 (C) により正となることがわかる。

また $\lim\limits_{y \to x} \dfrac{\partial G(x,y)}{\partial x} = 1$

だから

$$\boxed{\frac{\partial G(x,y)}{\partial x}, \quad \frac{\partial G(x,y)}{\partial y} \quad \text{は常に正である}}$$

特別な場合として $\dfrac{dG(x,\infty)}{dx}$, $\dfrac{dG(-\infty,y)}{dy}$ 等も常に正であることがわかる。

つぎに，$F(x, y, z)$ も x, y, z の何れについても glatt で，$F(x, y, z) = F(z, y, x)$ であるが

$$\frac{\partial F(x,y,z)}{\partial x} = -\frac{\partial G(x,y)}{\partial x}, \quad \frac{\partial F(x,y,z)}{\partial z} = -\frac{\partial G(y,z)}{\partial z}$$

だから

$$\boxed{\frac{\partial F(x,y,z)}{\partial x} \quad \text{及び} \quad \frac{\partial F(x,y,z)}{\partial z} \quad \text{は常に負}}$$

ところで

$$1-\frac{\partial G(x,y)}{\partial y}=\frac{\left(\int_x^y e^{-\frac{t^2}{2}}dt\right)^2-ye^{-\frac{y^2}{2}}\int_x^y e^{-\frac{t^2}{2}}dt-e^{-\frac{y^2}{2}}\left(e^{-\frac{y^2}{2}}-e^{-\frac{x^2}{2}}\right)}{\left(\int_x^y e^{-\frac{t^2}{2}}dt\right)^2}$$

で $x \neq y$ のとき分母は正**, 分子は不等式(E)により正，同様に $y \neq z$ なら

$$1-\frac{\partial G(y,z)}{\partial z}>0.$$ また

$$\frac{\partial F(x,y,z)}{\partial y}=\left(1-\frac{\partial G(x,y)}{\partial y}\right)+\left(1-\frac{\partial G(y,z)}{\partial y}\right)$$

だから

$$\boxed{x=y=z \text{ でないならば } \frac{\partial F(x,y,z)}{\partial y}>0}$$

特に

$$\frac{\partial F(-\infty,y,z)}{\partial y}>0,\quad \frac{\partial F(-\infty,y,z)}{\partial z}<0$$

$$\frac{\partial F(x,y,\infty)}{\partial x}<0,\quad \frac{\partial F(x,y,\infty)}{\partial y}>0$$

が常に成立つ。つぎに不等式(A)をつかうと

$1-\dfrac{\partial G(x,x+y)}{\partial x}$ は $y \neq 0$ なら常に正であることがわかる。

全く同様に $1-\dfrac{\partial G(x+y,x+y+z)}{\partial x}$ も $z \neq 0$ なら正となるから

$$\frac{\partial F(x,x+y,x+y+z)}{\partial x}=\left(1-\frac{\partial G(x,x+y)}{\partial x}\right)+\left(1-\frac{\partial G(x+y,x+y+z)}{\partial x}\right)$$

は $y=0$ 且つ $z=0$ の場合をのぞき正である。

同様に $\dfrac{\partial F(x,x+y,x+y+z)}{\partial y}$ も $y=0$ 且つ $z=0$ なる場

註. ** $x \to y$ とするとこれは 0 になる。

合をのぞき正であることがわかる。　又常に

$$\frac{\partial F(x, x+y, x+y+z)}{\partial z} = - \frac{\partial G(x+y, x+y+z)}{\partial z} < 0$$

Fの偏導函数のこれらの定符号性をつかうとたゞちにつぎのことがわかる。

(3)

$0 = v_2 = v_3 = \cdots\cdots = v_{i+1}$ ならざる限り

$$\frac{\partial H_i(v_1, \cdots\cdots, v_{i+1})}{\partial v_j} > 0 \quad (j = 1, \cdots, i)$$

また常に

$$\frac{\partial H_i(v_1, \cdots\cdots, v_i, \infty)}{\partial v_j} > 0 \quad (j = 1, \cdots\cdots, i)$$

$$\frac{\partial H_i(v_1, \cdots\cdots, v_{i+1})}{\partial v_{i+1}} < 0$$

すなわち $H_i(v_1, v_2, \cdots\cdots, v_{i+1})$ は任意の固定された $v_1, \cdots\cdots, v_i$ に対して v_{i+1} の函数として単調減少である。
また $v_2 = v_3 = \cdots\cdots = v_{i+1} = 0$ 以外では v_j $(j = 1, \cdots, i)$ の函数として単調増大である。$H_i(v_1, \cdots\cdots, v_i, \infty)$ はどの argument についても単調増大である。

つぎに，

$$F(x, x, \infty) = x - G(x, \infty) = \left(x \int_x^\infty e^{-\frac{t^2}{2}} dt - e^{-\frac{x^2}{2}}\right) \Big/ \int_x^\infty e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

で分子は正で分母は不等式（D）により負になるから $F(x, x, \infty) < 0$.　このことから

(4)　$\boxed{i \geqq 2 \text{ に対しては } H_i(v_1, \cdots\cdots, v_{i-1}, 0, \infty) < 0}$

がたゞちにわかる。

初等的計算により

$$\lim_{y\to\infty}\{x+y-G(x+y,\infty)\}=0$$ を得るから

$$F(x,x+y,\infty)=\{x+y-G(x,x+y)\}+\{x+y-G(x+y,\infty)\}$$

で $\lim_{y\to\infty} G(x,x+y)=G(x,\infty)<\infty$ に注意すればただちに

$\lim_{y\to\infty} F(x,x+y,\infty)=\infty$。 すなわち

(5) $$\boxed{\lim_{v_i\to\infty} H_i(v_1,\cdots\cdots,v_i,\infty)=\infty}$$

さらに、初等的計算により

$$\lim_{x\to-\infty}\{(x+y)-G(x+y,x)\}=\begin{cases}0 & (y>0 \text{ のとき})\\ y & (y<0 \text{ のとき})\end{cases}$$

となることを知るが、

$$x+y-G(x+y,x)=x+y-G(x+y,x+y-y)$$

としてみると

$$\lim_{x\to-\infty}\{(x+y)-G(x+y,x+y+z)\}=\begin{cases}-z & (z>0)\\ 0 & (z<0)\end{cases}$$

これ等をつかってただちに、$y>0$ かつ $z>0$ のとき

$$\lim_{x\to-\infty} F(x,x+y,x+y+z)=-z$$

となることがわかる。 H_i についていえばこのことは

(6) $$\boxed{\begin{array}{l} i\geq 2 \text{ に対して } v_i>0,\ v_{i+1}>0 \text{ のとき}\\ \lim_{v_1\to-\infty} H_i(v_1,\cdots\cdots,v_i,v_{i+1})=-v_{i+1}\end{array}}$$

$$H_1(v_1,v_2)=(v_1-G(-\infty,v_1))+(v_1-G(v_1,v_1+v_2))$$

だから $H_1(v_1,v_2)$ に対しては

(7) $$\boxed{v_2>0 \text{ なら } \lim_{v_1\to-\infty} H_1(v_1,v_2)=-v_2}$$

が成立つ。

つぎに

$$F(x;x+y,x+y)=\left\{(x+y)\int_x^{x+y} e^{-\frac{t^2}{2}}dt-e^{-\frac{x^2}{2}}+e^{-\frac{(x+y)^2}{2}}\right\}\Big/\int_x^{x+y} e^{-\frac{t^2}{2}}dt$$

で，不等式(C)により分子は正，$y>0$ なら分母は正だから，H_i に対しては

$$(8)\qquad \boxed{v_i>0 \text{ ならば } H_i(v_1,\cdots\cdots,v_i,0)>0}$$

が成立つ。 特に H_1 については，不等式(D)をつかって

$$(9)\qquad \boxed{\text{常に}\quad H_1(v_1,0)>0}$$

を言うことが出來る。

§3 問題の解答

$k=1$ のとき

問題は $F(-\infty,x,\infty)=0$ すなわち $H_1(v_1,\infty)=0$ の根は，$v_1=0$ のみであることを証明することである。

$H_1(v_1,\infty)$ は v_1 の連続函数で v_1 について単調増大((3)による)である。

一方 $H_1(0,\infty)=-G(-\infty,0)-G(0,\infty)=0$ だから $v_1=0$ は $H_1(v_1,\infty)=0$ の唯一の根である。

これによりついでに

$$(10)\qquad \boxed{H_1(v_1,\infty)\begin{cases}>0 & (v_1>0)\\ <0 & (v_1<0)\end{cases}}$$

を知る。

$k=2$ のとき

方程式系は $\begin{cases} H_1(v_1, v_2)=0 \\ H_2(v_1, v_2, \infty)=0 \end{cases}$

$v_1>0$ のとき $\lim_{v_2\to\infty} H_1(v_1, v_2) = H_1(v_1, \infty) > 0$ （(10) による）。しかも (3) により任意の v_1 に対して $H_1(v_1, v_2)$ は，v_2 の函数として単調減小。

故に，$v_1>0$ のときは任意の v_2 に対して $H_1(v_1, v_2)>0$ また $H_1(0, v_2)=0$ なる v_2 は存在しない。（$k=1$ のときの結果 $H_1(0, v_2)>0$）。だから $H_1(v_1, v_2)=0$ をみたす (v_1, v_2) は $v_1 \geqq 0$ のところには存在しない。

つぎに $v_1<0$ のとき，まず (10) により $\lim_{v_2\to\infty} H_1(v_1, v_2)<0$ 又 (9) により $H_1(v_1, 0)>0$ しかも $H_1(v_1, v_2)$ は v_1, v_2 の何れに関しても glatt で v_2 に関して単調減小だから，任意の $v_1(<0)$ の近傍で $H_1(v_1, v_2)=0$ によってこれをみたす一価連続函数 $v_2=u_1(v_1)$ が一意にきまる。これをつないでゆくと，$v_1<0$ の範囲で定義された一価連続函数 $v_2=u_1(v_1)$ を得るが，$H_1(v_1, u_1)$ は恒等的にきえる。又このことから明かに，$u_1(v_1)>0$ である。

即ち $H_1(v_1, v_2)=0$ をみたす v_1 は負，v_2 は正でなければならない。ところで

$$\frac{\partial u_1}{\partial v_1} = -\frac{\partial H_1(v_1, v_2)}{\partial v_1} \Big/ \frac{\partial H_1(v_1, v_2)}{\partial v_2}$$

に於て右辺に (3) を用いると，$\partial u_1/\partial v_1>0$ 故に u_1 は v_1 の函数として単調増大である。さて

$\lim_{v_1\to-\infty} u_1(v_1) = 0$ である。

証　明：　$u_1(v_1)$ は常に正で単調増大だから $v_1 \to -\infty$ のとき負でない有限の極限 α に収束する。　ところが $\alpha \neq 0$（すなわち，$\alpha > 0$）とすると矛盾が起る。

何故なら，(7) によれば $H_1(v_1, v_2)$ の v_1 に関する連続性から v_2 を（正に）きめておくと，ある正数 $M(v_2)$ が存在し，$v_1 < -M(v_2)$ なら常に $H_1(v_1, v_2) < 0$。　ところが $\alpha > 0$ としたから $v_1 < -M(\alpha)$ なら，常に $H_1(v_1, \alpha) < 0$.

今 $v_1^0 < -M(\alpha)$ なる一つの数 v_1^0 に対して $H_1(v_1^0, v_2)$ を考えるとこれは v_2 の単調減小函数で $H_1(v_1^0, \alpha) < 0$ だから $H_1(v_1^0, v_2) = 0$ をみたす v_2 は α より小

即ち $u_1(v_1^0) < \alpha = \lim_{v_1 \to -\infty} u_1(v_1)$

これは u_1 の単調増大性と矛盾する。　證明終り。

また

$$\underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{\lim_{v_1 \to 0-} u_1(v_1) = \infty \quad \text{である。}}$$

證　明：　$\lim_{v_1 \to 0-} u_1(v_1) \neq \infty$ とすると，$u_1(v_1)$ の単調増大性から $\lim_{v_1 \to 0-} u_1(v_1) = \beta$ なる β が存在し $\beta \geq 0$.

ところで $k=1$ の結果から $H_1(0, \infty) = 0$　$H_1(0, v_2)$ の単調減小性から $H_1(0, \beta) > 0$　故に連続性から $|v_1| < \varepsilon(\beta)$ なら $H_1(v_1, \beta) > 0$ なるような $\varepsilon(\beta)$ が存在する。　$0 < -v_1^0 < \varepsilon(\beta)$ なる v_1^0 を一つ固定し $H_1(v_1^0, v_2)$ を考えると，v_2 に関する単調減小性から $H_1(v_1^0, v_2) = 0$ となる v_2 は β より大きい　即ち $\beta < u_1(v_2^0)$　これは $u_1(v_1)$ の単調増大性に反する。

つぎに (4) により $H_2(v_1, 0, \infty) < 0$.

(5) から $\lim_{v_1 \to \infty} H_2(v_1, v_2, \infty) = \infty$.　$H_2(v_1, v_2, \infty)$ の v_2 に関する偏導函数が常に正であること及び *glattheit* を考慮に入れると，$H_2(v_1, w_1(v_1), \infty) = 0$ を恒等的にみたす，$v_2 = w_1(v_1)$ なる一価連続函数がすべての v_1 の近傍で一意的にきまる。

それをつないで $-\infty < v_1 < \infty$ で定義された函数 $v_2 = w_1(v_1)$ を得る。 又明かに $w_1(v_1) > 0$ である。

$w_1(v_1)$ は glatt で

$$\frac{d w_1(v_1)}{d v_1} = - \frac{\partial H_2(v_1, v_2 \infty)}{\partial v_1} \Big/ \frac{\partial H_2(v_1, v_2, \infty)}{\partial v_2}$$

は (3)により負となるから，$w_1(v_1)$ は単調減少函数である。

$u_1(v_1)$ は単調増大で v_1 が $-\infty$ から 0 にゆくとき，0 から $+\infty$ にゆく，一方 $w_1(v_1)$ は正でしかも単調減少だから $u_1(v_1) = w_1(v_1)$ をみたす v_1 はただ一つ存在する。

その v_1 を $a_1(2)$ とし，$u_1(a_1(2)) = a_2(2)$ とすると，勿論 $a_2(2)$ はただ一つで $v_1 = a_1(2)$ $v_2 = a_2(2)$ が問題の方程式系の唯一の解であることはいうまでもない。

$k = 1$ のときの方程式の唯一の根 0 を $a_1(1)$ であらわすと，今の証明から明かに

$$a_1(2) < a_1(1) \qquad a_2(2) > 0$$

一般の k に対して

数学的帰納法による．

まず次の事柄を証明する。

$$(11) \left\{ \begin{array}{l} H_1(v_1, v_2) = 0 \\ H_2(v_1, v_2, v_3) = 0 \\ \text{--- ---------} \\ H_i(v_1, v_2, \cdots, v_{i+1}) = 0 \end{array} \right\}$$ なる方程式系を S_i，

$$(12) \left\{ \begin{array}{l} H_1(v_1, v_2) = 0 \\ H_2(v_1, v_2, v_3) = 0 \\ \text{---------} \\ H_{i-1}(v_1, v_2, \cdots, v_i) = 0 \\ H_i(v_1, \cdots, v_i, \infty) = 0 \end{array} \right\}$$ なる方程式系を T_i

とする。

假定： $i=2,3,\cdots\cdots,n-1$ については次のことが成立つ。

(i_a) T_i の根は存在してただ一つ。

それを $v_1=a_1(i),\ v_2=a_2(i),\cdots,v_i=a_i(i)$ とする。

(ii_a) $a_1(i)<a_1(i-1)<\cdots\cdots<a_1(2)<0$

(iii_a) S_{i-1} をみたす v_i と v_1 とは次の函数関係によってむすばれる。 $v_i=u_{i-1}(v_1)$ は $v_1<a_1(i-1)$ で定義された一価連続微分可能な函数で単調で増大， かつ

$\lim_{v_1\to-\infty}u_{i-1}(v_1)=0,\quad \lim_{v_1\to a_1(i-1)-0}u_{i-1}(v_1)=\infty$

(iv_a) $v_1\geq a_1(i-1)$ では S_{i-1} をみたす $v_j(j=1,\cdots,i)$ は存在しない。

(v_a) $v_i\leq 0$ のところにも S_{i-1} をみたす $v_j(j=1,\cdots,i)$ は存在しない。

この假定の下で

(i_b) T_n の根は存在してただ一つ，それを

$$v_1=a_1(n),\cdots\cdots,v_n=a_n(n)\quad とする。$$

(ii_b) $a_1(n)<a_1(n-1)$

(iii_b) S_{n-1} をみたす v_n と v_1 との間には次の関係がある。 $v_n=u_{n-1}(v_1)$ は $v_1<a_1(n-1)$ で定義された一価連続微分可能な函数で単調増大，かつ

$$\lim_{v_1\to-\infty}u_{n-1}(v_1)=0,\quad \lim_{v_1\to a_1(n-1)-0}u_{n-1}(v_1)=\infty$$

(iv_b) $v_1\geq a_1(n-1)$ のところでは S_{n-1} をみたす v_j $(j=1,\cdots\cdots,n)$ は存在しない。

(v_b) $v_n\leq 0$ のところにも S_{n-1} をみたす v_j $(j=1,\cdots,n)$ は存在しない。

これが証明されたとすれば，$i=2$ のときは假定 $(i_a)-(V_a)$ はすべてみたされていることは $k=2$ のときの証明ですべて述べたところであるから，すべての n について終結 $(i_b)-(V_b)$ がいえることになる。

まづ (V_b) の証明

$S_{i-1}\ (i=1,\cdots,n-1)$ をすべてみたさなければ S_{n-1} はみたされないから (V_a) により S_{n-1} をみたす $v_2,\cdots,v_{n-1}$ はすべて正。ところで S_{n-1} をみたすためには $H_{n-1}(v_1,\cdots,v_n)=0$ がみたされねばならぬ。

$H_{n-1}(v_1,\cdots,v_n)$ の v_n に関する単調減小性から $v_{n-1}>0$ なら $H_{n-1}(v_1,\cdots,v_{n-1},0)>0$ ゆえに $v_2,\cdots,v_{n-1}>0$ 且 $v_n\leq 0$ のところには $H_{n-1}(v_1,\cdots,v_{n-1},v_n)=0$ をみたす v_n は存在しない，このことからただちに (V_b) が帰結される。以上

(iV_b) の証明

S_{n-1} をみたす $v_1,v_2,\cdots,v_{n-1}$ は当然 $S_1,S_2,\cdots,S_{n-2}$ をみたさねばならないから假定 (iii_a) 及び (V_b) によってこれは $v_1,\cdots,v_n$ の n 次空間 R_n の中で $v_2=u_1(v_1),\cdots,v_{n-1}=u_{n-2}(v_1)$, $v_n>0$ によってきめられる集合 $\mathcal{L}_n$ の中にある。

$u_1,u_2,\cdots,u_{n-2}$ の単調性（假定 iii_a）及び假定 (ii_a) から，

$a_1(n-1)<a_1(n-2),\ a_2(n-1)<a_2(n-2),\ \cdots\ a_{n-2}(n-1)<a_{n-1}(n-2).$

今 $\mathfrak{M}_{n-1}$ を $v_1<a_1(n-1),\ 0<v_2<a_2(n-1),\cdots,0<v_{n-1}<a_{n-1}(n-1)\}$ できめられる R_{n-1} の部分集合，$\mathfrak{N}_{n-1}$ を，$\{a_1(n-1)\leq v_1<a_1(n-2),\ a_2(n-1)\leq v_2<a_2(n-2),\ \cdots,\ a_{n-1}(n-1)\leq v_{n-1}\}$ できめられる R_{n-1} の部分集合とし，$0<v_n<\infty$ を $R_1(v_n)$ であらわすと，$u_1,u_2,\cdots,u_{n-2}$ の単調増大性及び (V_b) から集合 $\mathcal{L}_n$ は $(\mathfrak{M}_{n-1}\cup\mathfrak{N}_{n-1})\times R_1(v_n)$ に含まれることがわかる。

よって R_n の中で $(\mathfrak{M}_{n-1}\cup\mathfrak{N}_{n-1})\times R_1(v_n)$ 以外には S_{n-1} を

みたす点はない。　ところで $\mathfrak{N}_{n-1} \times \mathcal{R}(v_n)$ では常に，
$H_{n-1}(v_1, ----, v_n) > 0$．　なぜなら (3) により $H_{n-1}(v_1, v_2, ----$
$v_{n-1}, \infty)$ は $v_1, ---, v_{n-1}$ のどの v_j についても単調増大であるから，$a_1(n-1) \leq v_1$，$a_2(n-1) \leq v_2$，---，$a_n(n-1) \leq v_{n-1}$ に対して　$H_{n-1}(v_1, v_2, ---, v_{n-1}, \infty) \geq H_{n-1}(a_1(n-1), --- a_{n-1}(n-1), \infty)$
ところが $a(n-1), ----, a_{n-1}(n-1)$ は T_n の解だから右辺は 0．　故に $H_{n-1}(v_1, v_2, ---, v_{n-1}, \infty) \geq 0$．
ところが $H_{n-1}(v_1, ---, v_{n-1}, v_n)$ は v_n の函数として単調増大だから　$H_{n-1}(v_1, ---, v_{n-1}, \infty) > H_{n-1}(v_1, ---, v_{n-1}, v_n)$
故に $\mathfrak{N}_{n-1} \times \mathcal{R}_1(v_n)$ では常に $H_{n-1}(v_1, ---, v_n) > 0$　これは，(IV$_b$) の成立つことを含んでいる。　　　　　　　　以　上

(iii$_b$) の証明

(iV$_b$) の証明からもっぱら $\mathfrak{M}_{n-1} \times \mathcal{R}_1(v_n)$ で考えればよい。
$\mathfrak{M}_{n-1}$ のどんな点に対しても $H_{n-1}(v_1, ----, v_n)$ は v_n の値如何により正にも負にもなり得る。

なぜなら，$H_{n-1}(v_1, ---, v_{n-1}, \infty)$ の各 Argument についての単調増大性により，$\mathfrak{M}_{n-1}$ の $v_1, ----, v_{n-1}$ に対しては，

$$\lim_{v_n \to \infty} H_{n-1}(v_1, ---, v_{n-1}, v_n) = H_{n-1}(v_1, ---, v_{n-1}, \infty)$$
$$< H_{n-1}(a_1(n-1), ---, a_{n-1}(n-1), \infty) = 0$$

故に十分大きな v_n に対しては負になる。　一方 $H_{n-1}(v_1, --, v_n)$ は v_n に関して単調減少で，$v_1, ----, v_n$ の何れについても glatt な函数だから，$\mathfrak{M}_{n-1}$ の任意の点の近傍で，一価で各 Argument について連続微分可能な函数 $v_n = \overline{U}_{n-1}(v_1, ---, \overline{U}_{n-1})$ が一意にきまり $H_{n-1}(v_1, ---, v_{n-1}\overline{U}_{n-1}) = 0$ がその近傍で恒等的にみたされる
$\mathfrak{M}_{n-1}$ は，連結領域だからそれをつないで $\mathfrak{M}_{n-1}$ で $H_{n-1}(v_1, ------, v_{n-1}, \overline{U}_{n-1}) = 0$　をみたすような一価函数 $\overline{U}_{n-1}(v_1, ---$，

$, v_{n-1})$ が一意にきまる。これは各 Argument について連続だから，これに $u_1, \cdots, u_{n-2}$ を代入すると，$v_1 < a_1(n-1)$ で定義された一価連続函数 $v_n = u_{n-1}(v_1)$ を得る。

さてこうしてつくった u_{n-1} は微分可能で

$$\frac{du_{n-1}}{dv_1} = -\left(\frac{\partial H_{n-1}(v_1, \cdots, v_n)}{\partial v_1} + \sum_{j=2}^{n-1} \frac{\partial H_{n-1}(v_1, \cdots, v_n)}{\partial v_j} \frac{du_{j-1}}{dv_1} \right)$$

$$\div \left(\frac{\partial H_{n-1}(v_1, \cdots v_n)}{\partial v_n} \right) \quad \text{であるが}$$

$\mathfrak{M}_{n-1}$ では $v_j \ (j \geq 2)$ は正だから (3) から

$$\frac{\partial H_{n-1}(v_1, \cdots v_n)}{\partial v_j} \quad (j = 1, \cdots, n-1) \quad \text{はすべて正}$$

又仮定 (iiia) から $\dfrac{du_{j-1}}{dv_1} \ (j = 2, \cdots, n-1)$ もすべて正

又 (3) から $\dfrac{\partial H_{n-1}(v_1, \cdots v_n)}{\partial v_n} < 0$ 　よって $\dfrac{du_{n-1}}{dv_1} > 0.$

また (V_b) から $u_{n-1}(v_1) > 0$ 依って $\lim\limits_{v_1 \to -\infty} u_{n-1} = \alpha$ なる極限が存在し $\alpha \geq 0$, 一方 $\lim\limits_{v_1 \to -\infty} H_{n-1}(v_1, \cdots, v_n)$ は $v_n > 0, v_{n-1} > 0$ のとき $-v_n$ になる　故に $\mathfrak{M}_{n-1} \times \mathfrak{R}_1(v_n)$ では $\lim\limits_{v_1 \to -\infty} H_{n-1}(v_1, \cdots, v_n) < 0$ 　$\alpha > 0$ とすると $(v_1 (<0), u_1(v_1), \cdots, u_{n-1}(v_1), \alpha)$ は $\mathfrak{M}_{n-1} \times \mathfrak{R}_1(v_n)$ に入る。H_{n-1} の v_1 に関する連続性と v_n に関する単調減小性，及び $u_n(v_1)$ の単調増大性を用いると，$k = 2$ の時と同様にして容易に $\lim\limits_{v_1 \to -\infty} u_{n-1}(v_1) = 0$ が得られる。

さらに $v_1 \to a_1(n-1)$ とすると假定 (ia) 及び (iiia) から $u_1 \to a_2(n-1)$, $u_2 \to a_3(n-1), \cdots, u_{n-1} \to a_{n-2}(n-1)$。ところで $H_{n-1}(a_1(n-1), \cdots, a_{n-1}(n-1), v_n)$ を考えるとこれは v_n の単調減小函数で T_{n-1} に関する假定 (ia) から

$H_{n-1}(a_1(n-1), \cdots, a_{n-1}(n-1), \infty) = 0$. 故に

$H_{n-1}(a_1(n-1), \cdots, a_{n-1}(n-1), v_n) > 0$

これから，前と同様な議論で $\lim_{v_1 \to a_1(n-1)-0} u_{n-1}(v_1) = \infty$ が結論出来る。これで（iii_a）が証明された。

（i_b）及び（ii_b）の証明

（4）により $H_n(v_1, \cdots, v_{n-1}, 0, \infty) < 0$.

また（5）により $\lim_{v_n \to \infty} H_n(v_1, \cdots, v_n, \infty) = \infty$

故に $H_n(v_1, \cdots, v_n, \infty)$ は v_n の値如何により正をも負をもとり得る。又この函数の glattheit 及び v_n に関する単調増大性により $H_n(v_1, \cdots, v_{n-1}, \overline{W}_{n-1}, \infty) = 0$ を恒等的にみたす一価函数 $v_n = \overline{W}_{n-1}(v_1, \cdots, v_{n-1})$ が一意にきまる。$\overline{W}_{n-1} > 0$ であることもわかる。この W_{n-1} に $u_1(v_1), \cdots\cdots, u_{n-1}(v_1)$ を入れると $v_1 < 0$ で定義された一価連続函数 $v_n = w_{n-1}(v_1)$ を得る。$w_{n-1} > 0$.

$$\frac{dw_{n-1}}{dv_1} = -\left(\frac{\partial H_n(v_1, \cdots, v_n, \infty)}{\partial v_1} + \sum_{j=2}^{n-1} \frac{\partial H_n(v_1, \cdots, v_n, \infty)}{\partial v_j} \frac{du_{j-1}}{dv_1} \right)$$
$$\div \left(\frac{\partial H_n(v_1, \cdots, v_n, \infty)}{\partial v_n} \right)$$

（3）及び（iii_a）から各偏導函数は正である。依って $\frac{dw_{n-1}}{dv_1} < 0$

$w_{n-1}(v_1)$ は単調減小で常に正であるし，v_1 が $-\infty$ から $a_1(n-1)$ にゆくとき $u_{n-1}(v_1)$ は 0 から ∞ に単調に増大する。

だから $w_{n-1}(v_1) = u_{n-1}(v_1)$ をみたす v_1 は必ず存在し唯一にかぎる。それを $v_1 = a_1(n)$ とすると $a_1(n) < a_1(n-1)$ であり，$u_i(a_1(n)) = a_{i+1}(n)$ $(i = 1, \cdots, n-1)$ とすると，$a_{i+1}(n) < a_{i+1}(n-1)$ $a_n(n) > 0$ であることはただちにわかる。この $a_1(n), \cdots, a_n(n)$ が T_n の唯一の根であることは言ふまでもない。

以　上

さて一般の $n \geq 2$ に対して終結がすべて言えることになつた。特に (i_k) が我々の目的であつたのだから解の存在と一意性の証明が完結したわけである。

尚この証明の副産物としてもとの方程式系（x_i の方程式系）の根を $x_1^\circ(k), x_2^\circ(k), \cdots\cdots, x_k^\circ(k)$ とあらわす（カッコの中の k は方程式が k 個ある時の根であることを示す。）と

1） $x_1^\circ(k) < x_2^\circ(k) < \cdots\cdots < x_k^\circ(k)$

2） $x_i^\circ(k) < x_i^\circ(k-1) \quad (i = 1, 2, \cdots\cdots, k-1)$

3） $x_{i+1}^\circ(k) > x_i^\circ(k-1) \quad (i = 1, 2, \cdots\cdots, k-1)$

これらの性質がついでに証明されたことになる。何故かといえば $a_2(k), a_3(k), \cdots\cdots, a_k(k)$ がすべて正なること（(v_k) の結果）から 1）は明かであり，2）は (iv_k) 及び $u_1(v_1), \cdots$ $, u_{k-2}(v_1)$ の単調増大性から明かで，3)は，2）と方程式系の対称性とからほとんど明かである。

2）と 3）とを合わせると，k 個の時の根は $k-1$ 個の時の根により分離されるということを意味し，小川先生の論文中にある数値表にあらわれているきれいな特徴を証明したことになる。

又，根の一意性が証明されたとしても，1）が成立たなかつたら統計の問題から導き出されたこの方程式系の意義が危険にさらされたかも知れない。

最後に，小川．丸山両先生の激励と，同僚飯沼健司君の熱心な理論的助言，妻八重子の数値計算の手傳がなかつたなら，私はこの証明を遂行する勇気を失つたであろう。

これらの人々に心からの感謝を申述べたい。

ZUR EXISTENZ UND EINDEUTIGKEIT DER LÖSUNG EINES GEWISSEN GLEICHUNGSSYSTEMS

——— *Anmerkung an die Abhandlung Von Hrrn Dr. J. Ogawa, "Contributions to the Theory of Systematic Statistics".* ———

ISAO HIGUTI

Diese kleine Arbeit soll sich dem Beweis dafür widmen, daß das Gleichungssystem (1), das von Herrn Ogawa in seiner wie oben genannten Abhandlung als die "optimun spacing" zu bestimmende Gleichungen abgeleitet wurden, eine und nur eine Lösung reeller Wurzeln hat. Die Sache, schon vorausgesehen von Herrn Ogawa, war jedoch keinesweges logisch begründet.

Um dies zu beweisen benutzen wir die lineare Substitution (2). Seien F, G, H die Funktionen, die durch die am Anfangsteil des § 2 dargestellte Formeln definiert sind, so geht unseres System in dasselbe, wie an (12) $i = K$ gesetzt wird, über, was unter T_k verstanden. Mit vorbereitende Ungleichheiten (A) – (E), kann man leicht die Definitäten (3) der partiellen Ableitungen von H_i erhalten. Ferner haben H_i die Eigenschaften (4) – (9), die auch nach einfacher Berechnung geprüft werden Können.

Durch passender Anwendung der elementären Theorie der unentwickelten Funktionen an diesen Eigenschaften, können wir zum Schluß gelangen, daß auf einer Halblinie $V_1 < a_1(K-1)(<0)$ eine Funktion $V_k = W_k(V_1)$, die die erste $k-2$ und die letzte Gleichungen von T_k simultan genügend, stets positiv, monoton abnehmend ist, und eine Funktion $V_k = U_k(V_1)$, die die erste $k-1$ Gleichungen von T_k gleichzeitig befriedigt und deren Wert stetig · stetig monoton-zunehmend von 0 nach ∞ sich verändert, indem man V_1 von $-\infty$ nach $a_1(K-1) - 0$ variiert, sich finden

Übrigens können wir darauf schließen, daß in $a_1(K-1) \leq V_1$ gibt es keine V_1 die alle Gl. von T_k gleichzeitig erfüllt. Hieraus folgt unsere Behauptung ohne Schwierigkeit.

Es wäre mir unmöglich gewesen, diese Arbeit auszuführen, ohne Ermutung von Herrn Ogawa und von Herrn F. Maruyama, theoretische Ratschläge meines kameraden Herrn K. Iinuma, und numerische Hilfsrechnung meiner Frau Y. H. So möchte ich meine angenehme Pflicht, ihnen herzlich zu danken, erfüllen.