(13) 水野の不等式について

青山博次郎

統計数理研究所水野坦氏は本講究録（注1）に於いて Tchebycheff の不等式を拡張した，標本平均を推定するための不等式として

$$P_r\left\{|\bar{x}-\bar{X}| \geqq k\sigma_{\bar{x}}\right\} \leqq \frac{1.3.5\cdots\cdots(2\lambda-1)}{k^{2\lambda}} \tag{1}$$

がある條件の下に近似的に成立することを示された。

ここで $\bar{x}$ はサンプル平均，$\bar{X}$ は母平均，$\sigma_{\bar{x}}$ は $\bar{x}$ の標準偏差とし，もとの分布が 2λ（λは正整数）次のモーメントをもち，$\frac{1}{n}$と高次モーメントの積が主要項に比べて小であるとした。

この不等式 (1) の右辺の分子は分散1なる正規分布の 2λ 次のモーメントであるから以下のべるような解析的方法によっても証明が出来るのである。

その前に種々の不等式について概観しておくことも無駄でないと思うのでそれからのべることにする。

§1. 種々の不等式について

Tchebycheff の不等式はよく知られている如く

$$P_r(|x-\bar{X}| \geqq k\sigma) \leqq \frac{1}{k^2} \tag{2}$$

この証明と全く同様にして　分布が 2λ 次のモーメント $\mu_{2\lambda}$ をもつとき

$$P_r(|x-\bar{X}| \geqq k\sigma) \leqq \frac{\mu_{2\lambda}}{k^{2\lambda}\sigma^{2\lambda}} \tag{3}$$

$\lambda = 2$ のとき Cramér は（注2）

$$P_r(|x-\bar{x}| \geqq k\sigma) \leqq \frac{\mu_4 - \sigma^4}{\mu_4 + k^4\sigma^4 - 2k^2\sigma^4} \qquad (4)$$

を出している。

また Gauss は分布が unimodal ならば

$$P_r(|x-\bar{x}| \geqq k\sigma) \leqq \frac{4}{9}\,\frac{1+\tau^2}{(k-|\tau|)^2} \qquad (5)$$

なることを証明した。（注3）ここで τ は skewness であって

$$\tau = \frac{\bar{x} - x_0}{\sigma}, \quad x_0 \text{ は mode}$$

これらの不等式で特に正規分布の時を考えてみると各式左辺の P は下表のようになる。

k	(2) 式	(3) 式 ($\lambda = 2$)	(4) 式	(5) 式	真の値
1	$\leqq 1$	$\leqq 3$	$\leqq 1$	$\leqq 0.444$	0.32
2	$\leqq 0.25$	$\leqq 0.188$	$\leqq 0.182$	$\leqq 0.111$	0.05
3	$\leqq 0.11$	$\leqq 0.037$	$\leqq 0.031$	$\leqq 0.049$	0.003

また $[-a, a]$ の上の一様分布，三角分布，楕円分布について $k = 3$ のとき (3) 式，(4) 式，(5) 式を比較すると次のようになる。

	P≦ 一様分布	真の値	P≦ 三角分布	真の値	P≦ 楕円分布	真の値
$\lambda = 1$	0.1111		0.1111		0.1111	
$\lambda = 2$	0.0222		0.0296		0.0247	
(3)式 $\lambda = 3$	0.0053	0	0.0106	0	0.0069	0

$\lambda=4$	0.0014		0.0044		0.0021	
$\lambda=5$	0.0004		0.0020		0.0007	
$\lambda=6$	0.0001		0.0010		0.0002	
$\lambda\fallingdotseq 7$	0.0000		0.0005		0.0001	
(4)式 $\lambda=2$	0.0123		0.0214		0.0154	
(5) 式	——		0.049		0.049	

$\lambda=2$ についていえば (4) 式が一番効率がよいが，λを大きくとることによって (3) 式は (4) 式より効率よく出来る。

次にサンプルの平均より母平均を推定する際は $E(\bar{x})=\bar{X}$ となる不偏推定値を用いることにすれば $\bar{x}$ の分布を用いるだけの相違で (2), (3) (4), (5) は同様に成立つ。このとき (1) 式右辺の値は下表のようになっている。

$k \backslash \lambda$	1	2	3	4	5
1	1	3 (1)	15 (1)	105 (1)	945 (1)
2	0.25000	0.18750	0.23438	0.41016	0.92285
3	0.11111	0.03704	0.02058	0.01600	0.01600

従って適当の条件の下に於て，分布の形が分らなくても k, λ を適当にえらんで能率のよい推定が出来る。即ち

$$P_r\left(|\bar{x}-\bar{X}| \geqq k\sigma_{\bar{x}}\right) \leqq 0.05 \quad (0.01)$$

に対しては $\lambda=4\,(5)$, $k=2.602\,(3.144)$ とすればよい。

(Guttman の不等式もあるが省略する　注4)

以上を見て分ることは、我々の分布について予め分っている性質が多い程能率のよい推定が出来る訳で至極当然のことといえよう。

§2. (1)式の解析的証明

こゝでは $\bar{x}$ の分布に限らず、もとの変数 x の分布について証明する。

先づ既に知られている如く、

(i) 確率変数 x は確率密度函数 $f(x)$ を有し、$f(x)$ は $(-\infty,\infty)$ で連続で二回微分可能，

(ii) λ がどんな大きい整数でも

$$\lim_{x\to\pm\infty} x^{\lambda} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} x^{\lambda} \frac{df}{dx} = 0$$

(iii) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \left|\frac{d^2 f}{dx^2}\right| e^{\frac{x^2}{4}}\, dx$ が存在

(iv) 任意の実数 θ に対し

$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{\theta x} |f(x)|\, dx$ が存在

するとき

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \Phi_n(x) \tag{6}$$

が一様収斂する。但し $\Phi_n(x)$ は n 次の Hermite 多項式 $H_n(x)$ を用いて

$$\Phi_n(x) = (-1)^n H_n(x)\, \Phi_0(x) \tag{7}$$

$$\Phi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \tag{8}$$

で表わせる。（注5）

一般性を失うことなく一次，二次モーメント μ_1, μ_2, については $\mu_1=0$, $\mu_2=1$ と仮定することができる。

このとき

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^{2\lambda}\Phi_n(x)\,dx=0 \qquad (n=2m+1) \tag{9}$$

$$= 2^{m+1}\lambda(\lambda-1)\cdots\cdots(\lambda-m)\frac{(2\lambda)!}{2^\lambda\lambda!}$$

$$(n=2m)$$

なることが容易に分るから，一様収斂性を用いて

$$\mu_{2\lambda}=\sum_{n=0}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}x^{2\lambda}\alpha_n\,\Phi_n(x)\,dx$$

$$=\frac{(2\lambda)!}{2^\lambda\lambda!}\left\{1+2^2\lambda(\lambda-1)\alpha_4+2^3\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)\alpha_6+\cdots+2^\lambda\lambda!\,\alpha_{2\lambda}\right\} \tag{10}$$

然るに

$$|\alpha_r|<\frac{KC}{\sqrt{r+2\,!}} \tag{11}$$

但し

$$C=\int_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{d^2f}{dx^2}\right|e^{\frac{x^2}{4}}dx,\quad K^2=\frac{1}{2\pi}\int_{|t|=1}\left|\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}\right|=1.18034 \tag{12}$$

従って (10) は

$$\mu_{2\lambda}<\frac{(2\lambda)!}{2^\lambda\lambda!}\left\{1+KC\left(\frac{(2^2 2!)^2}{5!}\binom{\lambda}{2}+\frac{(2^3\cdot 3!)^2}{7!}\binom{\lambda}{3}+\cdots\cdots+\frac{(2^\lambda\lambda!)}{(2\lambda+1)!}\binom{\lambda}{\lambda}\right)\right\}$$

$$=\frac{(2\lambda)!}{2^\lambda\lambda!}\left\{1+1.09C\left(\frac{8}{15}\binom{\lambda}{2}+\frac{16}{35}\binom{\lambda}{3}+\frac{128}{315}\binom{\lambda}{4}+\cdots\cdots\right)\right\} \tag{13}$$

(13) は (11) を用いて出したので非常に大きく見積ったことになる。それで通常は (13) の右辺よりずっと小さい評価式が得られる訳である。

種々の分布を取扱うとき経験的には (6) の Hermite 多項式の

展開は、せいぜい α_4 までで十分だといわれる。このときは (13) は

$$\mu_{2\lambda} < \frac{(2\lambda)!}{2^{\lambda}\lambda!}\left(1+0.29067\lambda(\lambda-1)C\right) \tag{14}$$

となる。

母平均の推定の問題では、この (13), (14) を

$$P_r\left(|\bar{x}-\bar{X}| \geqq k\sigma_{\bar{x}}\right) \leqq \frac{\mu_{2\lambda}(\bar{x})}{k^{2\lambda}\sigma_{\bar{x}}^{2\lambda}}$$

に代入して

$$P_r\left(|\bar{x}-\bar{X}| \geqq k\sigma_{\bar{x}}\right) < \frac{(2\lambda-1)(2\lambda-3)\cdots\cdots 3\cdot 1}{k^{2\lambda}}\left(1+g(\lambda, C)\right) \tag{15}$$

が得られる。但し $g(\lambda, C)$ は (13) に対しては

$$g(\lambda, C)=1.09C\left(\frac{8}{15}\binom{\lambda}{2}+\frac{16}{35}\binom{\lambda}{3}+\cdots\cdots\right) \tag{16}$$

(14) に対しては

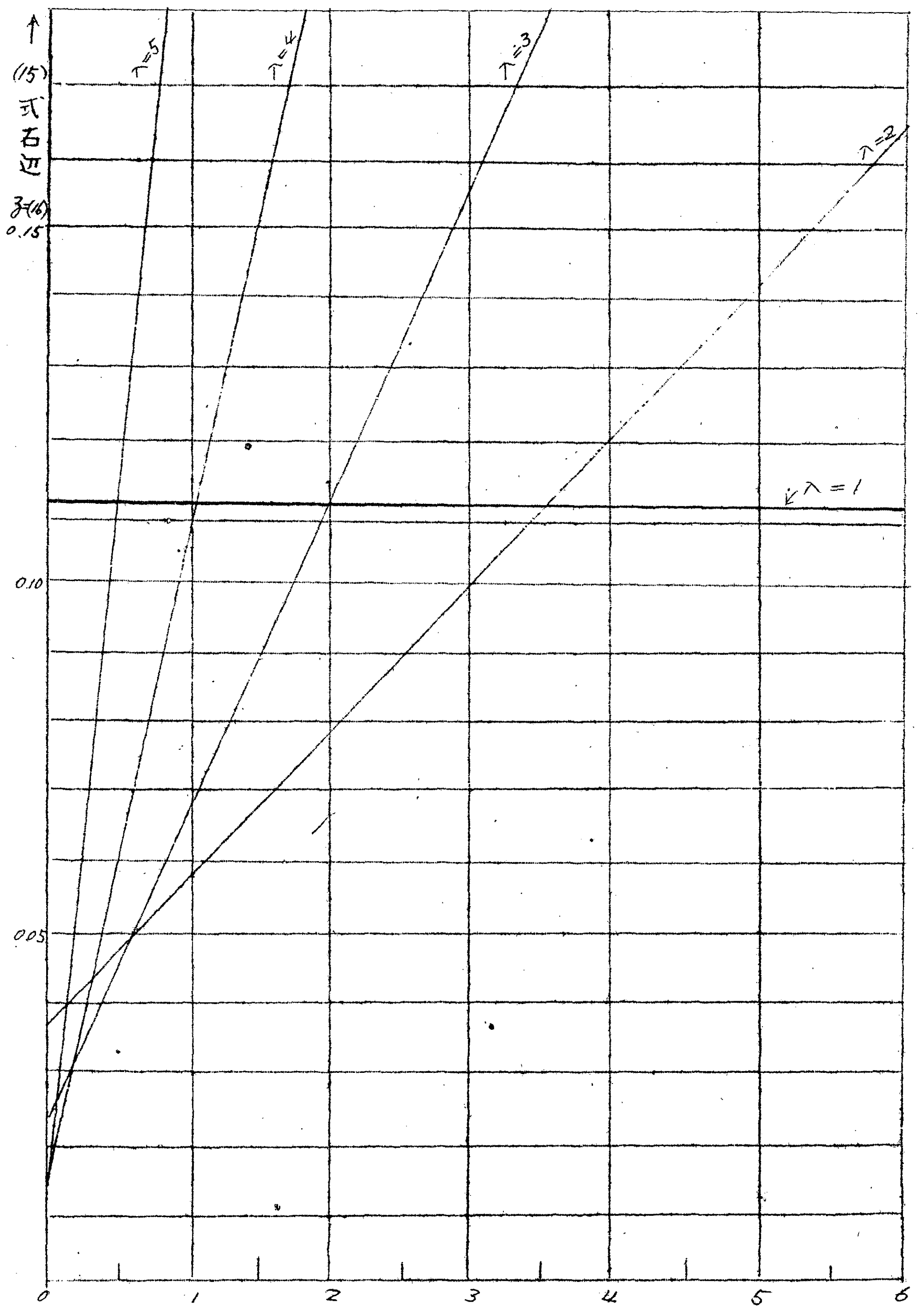
$$g(\lambda, C)=0.29067\lambda(\lambda-1)C \tag{17}$$

である。

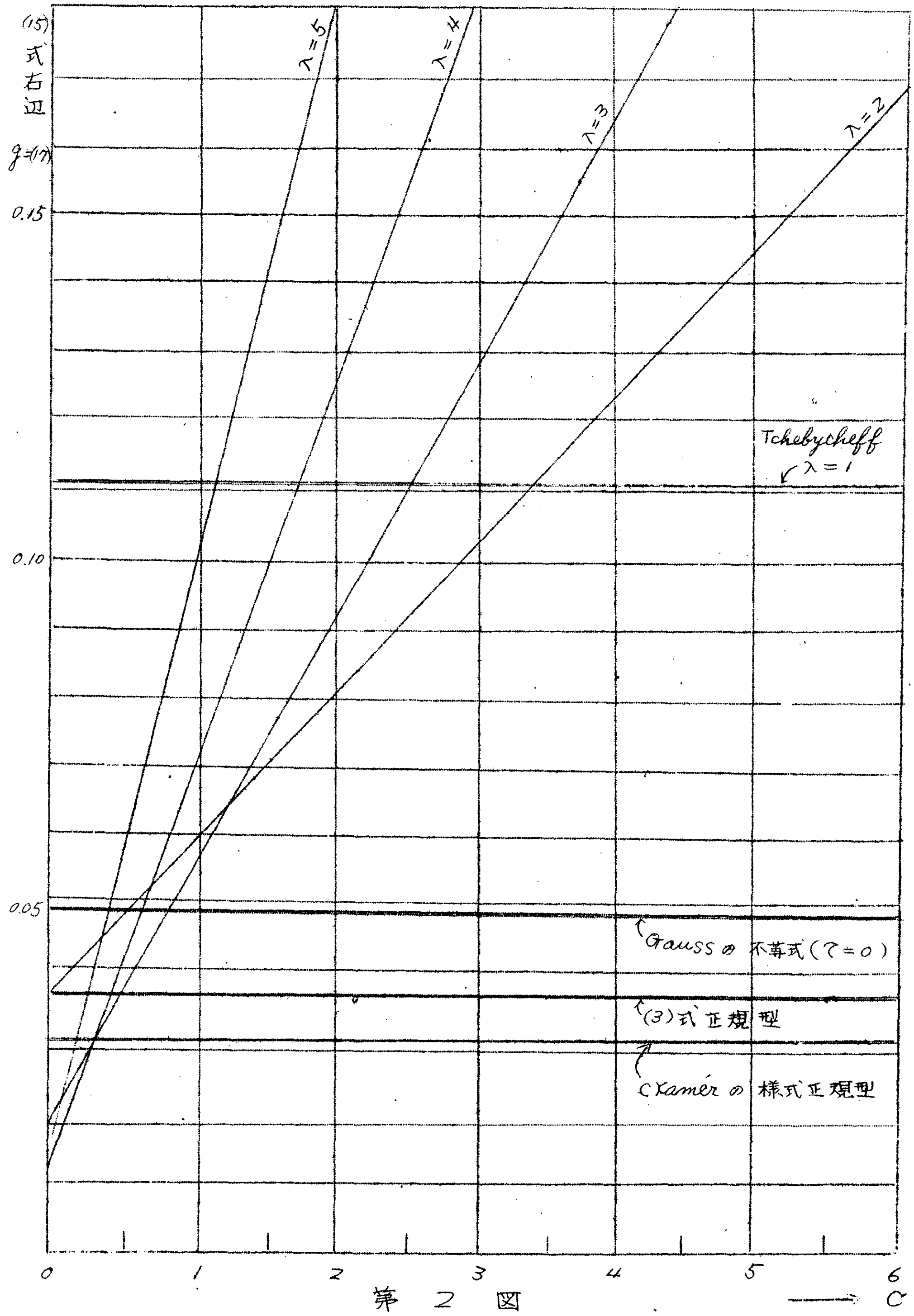
(15) に於て $g(\lambda, C)=0$ とおいた場合が (1) 式，即ち水野の不等式である。因みに $k=3$ のときの (1), (15) の右辺は下表のようになる。

また種々の不等式の関係をグラフで表わすと次の第1, 2図のようになっている。

λ	(1) 式	(15) 式	
		$g(\lambda, C)=(16)$	$g(\lambda, C)=(17)$
1	0.11111	0.11111	0.11111
2	0.03704	0.03704(1+0.5813C)	0.03704(1+0.5813C)
3	0.02058	0.02058(1+2.2423C)	0.02058(1+1.7440C)
4	0.01600	0.01600(1+5.9241C)	0.01600(1+3.4880C)
5	0.01600	0.01600(1+13.4134C)	0.01600(1+5.8134C)
10	0.18777	0.18777(1+383.6086C)	0.18777(1+26.1603C)



第 1 図



(15)
式
右
辺
g=(17)
0.15
0.10
0.05
λ=5
λ=4
λ=3
λ=2
Tchebycheff
λ=1
Gauss の 不等式（τ=0）
(3)式 正規型
Cramér の 様式正規型
0
1
2
3
4
5
6
C

第 2 図

このグラフより分る如く（第1図についていうと）cが十分小さいとき例えば $c<0.15$ のときは $\lambda=4$ または $\lambda=5$ を用いる(1)式がよく，$0.15 \leqq c < 0.2$ ならば $\lambda=4$，$0.2 \leqq c < 0.25$ なら $\lambda=3$ をとればよい。cがこれより大きくなればCramérの不等式，Gaussの不等式などが反って有効となることがある。従って(1)が有効となるのはcが十分小さいとき，例えば $f(x)=\text{const.}$ の場合や $f(x)=\alpha x+\beta$ なる連続分布の場合（これらのときは $c=0$ である），$|f''(x)|=O\left(e^{-(\frac{1}{4}+\frac{1}{\varepsilon})x^2}\right)$，$\varepsilon$は十分小さい正数なる如き場合であることが分る。

母平均の推定の問題では母集団の大きさNが十分大でサンプル数nが大きく，抽出比がそう大きくないとき

$$\sqrt{n}\,(\bar{x}-\bar{X})/\sigma = y$$

とおけば中央極限定理により

$$f(y) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{y^2}{2}} \tag{18}$$

となるから $c \doteqdot 0$ であって（(12)のままで計算すれば $c=2.434$ で $g(2, c)=1.415$ となる）

$$P_r\left\{|y-E(y)| \geqq k\right\} \leqq \frac{(2\lambda-1)(2\lambda-3)\cdots\cdots 3\cdot 1}{k^{2\lambda}}$$

即ち

$$P_r\left\{|\bar{x}-\bar{X}| \geqq k\sigma_{\bar{x}}\right\} \leqq \frac{(2\lambda-1)(2\lambda-3)\cdots 3\cdot 1}{k^{2\lambda}}$$

が成立つのである。

もし正確に(18)式で等号が成立てば勿論(1)式よりも

$$P_r\left\{|\bar{x}-\bar{X}| \geqq k\sigma_{\bar{x}}\right\} = 1-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-k}^{k} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt \tag{19}$$

を使えばよいのである。

（注 1） 水野坦：或不等式に就て（一），統数研講究録 vol. 5, No. 9 (1949)

（注 2） H. Cramér: Mathematical Methods of Statistics, Princeton Univ. Press. 1946, Part III P. 256

（注 3） K. F. Gauss: Theoria combinations observationum 又は Cramér, loc. cit P. 183

（注 4） L. Guttman: A distribution-free confidence interval for the mean, Annals of Math. Stat. 1948

（注 5） 末綱恕一： 確率論， 岩波書店