⑱ Randomized testの分離度函数について

—— vol. 4 ⑨ の補遺 ——

お茶の水大学　工藤　弘吉

§ 序.　本誌 vol 4 ⑨ "検定力函数について"（これは power function ではない. 後に検定力函数が power function の訳語として用いられておるのを知り，分離度函数と改名した. 以後後者の名を用いることにする。）において non-randomized test の際の分離度函数についてのべた。所がその際の條件（c.c.）（p. 106）が randomized test（cf. [2], [3]）を用いることによつて除くことが出来る。ここでは Randomized test を紹介し，上のことを証明する。

§ 1.　Randomized test の定義

Ω のボレル集合族 $\mathfrak{B}$（以後これは定めておく）の上で定義された二つの確率函数 P_0, P_1 が與えられる。

定義イ）　Ω を母集団，P_0, P_1 を夫々假説，対立假説と云う。

定義ロ）　Ω で定義された measurable 函数 $\phi(\omega)$（$0 \leqq \phi(\omega) \leqq 1$）を Randomized test(1)。

註 1). もし $\phi(\omega)$ が特性函数，即ちある集合 E で 1，その補集合で 0 ならば ϕ を non-randomized test と云う。

$$\alpha = E_0(\phi) = \int_\Omega \phi(\omega)\, dP_0(\omega)$$

$$\beta = E_1(1-\phi) = 1 - E_1(\phi) = 1 - \int_\Omega \phi(\omega)\, dP_1$$

を夫々第一種及び第二種の過誤の危険率（ Ⅰe.p.，Ⅱe.p. ）と云う．勿論 $0 \leqq \alpha \leqq 1$，$0 \leqq \beta \leqq 1$ である。

定義ハ） test ϕ の Ⅰe.p.，Ⅱe.p を夫々 α，β とするとき，(α, β) なる平面上の点を ϕ の過誤点と云う． もし二つの test の過誤点が一致するときはこの二つの test は equivalent であると云う。

定義ニ） test の集合 $\Phi = \{\phi\}$ が次の條件をもつとき randomized test 系と云う，

1） Φ は $\phi^1(\omega) \equiv 1$ 及び $\phi^0(\omega) \equiv 0$ を元としてもつ

2） 大小関係，即ち

$$\phi_1(\omega) \geqq \phi_2(\omega) \qquad \text{for all } \omega \in \Omega$$

で linear ordered である．

定義ホ） randomized test 系 $\Phi = \{\phi\}$ の各 element ϕ に過誤点を対応させたときに生ずる軌跡を Φ の過誤曲線と云う

§ 2. Randomized test は Non-randomized test になおすことが出來る。

$\Omega^* = \Omega \times [0, 1]$ を作る。 ここで $[0,1]$ は $0 < \xi \leqq 1$ なるすべての実数 ξ の作る集合で × は直積をあらはす。 Ω^* の上のボレル集合族は $\mathcal{B}^* = \mathcal{B} \times \mathcal{L}$．しかし $\mathcal{L}$ は $[0, 1]$ の Lebesque 可測集合の全体で × は直積．P_i^* は $P_i(E) \cdot m(e)$ $(E \in \mathcal{B},\ e \in \mathcal{L})$ より作られる測度 $(i = 0, 1)$．

P_0^* と P_1^* を夫々［ 1 ］の帰無假説，対立假説にして non-randomized test を作り A^* を採択域，B^* を棄却域とする．

定理I. 條件附確率 $P_0(B^*|\omega)=\phi(\omega)$ とおくとき $\phi(\omega)$ は I e.p. $P_0(B^*)$, II e.p. $P_1(A^*)$ をもつ *randomized test* である. 逆に $\phi(\omega)$ が與えられたとき

$$A^*=[(\omega,\xi)\mid\phi(\omega)<\xi\leqq 1]$$

$$B^*=[(\omega,\xi)\mid 0<\xi\leqq\phi(\omega)]$$

とると $\Omega^*=A^*\cup B^*$, $A^*\cap B^*=\Lambda$ でこの *non-randomized test* の I e.p. は $E_0(\phi)$, II e.p. は $E_1(1-\phi)$ である。

（証明） i) $E_0(\phi)=\int_\Omega P_0(B^*|\omega)\,dP_0(\omega)=P_0^*(B^*)$

$$\begin{aligned}E_1(\phi)&=\int_\Omega P_0(B^*|\omega)\,dP_1(\omega)\\&=\int_\Omega P_0(\Omega^*-A^*|\omega)\,dP_1(\omega)\\&=\int_\Omega\{1-P_0(A^*|\omega)\}\,dP_1(\omega)\\&=1-\int_\Omega P_0(A^*|\omega)\,dP_1(\omega)\end{aligned}$$

しかるに $P_0(A^*|\omega)=m(\xi\mid(\xi,\omega)\in A^*)=P_1(A^*|\omega)$ であるから

$$\begin{aligned}E_1(\phi)&=1-\int_\Omega P_1(A^*|\omega)\,dP_1(\omega)=1-P_1^*(A^*)\\&=P_1^*(\Omega^*-A^*).\end{aligned}$$

逆に ii) $P_0^*(B^*)=\int_\Omega\phi(\omega)\,dP_0(\omega)=E_0(\phi(\omega))$

$$1-P_1^*(A^*)=\int_\Omega(1-\phi(\omega))\,dP_1(\omega)=E_1(1-\phi(\omega))$$

は明らか.

§ 3. (C.C.) を満すとき *randomized test* は *non-randomized test* と同じ分離度函數をもつ.

定義へ） 二つの test 系 Φ_1, Φ_2 の過誤曲線が一致するとき Φ_1 と Φ_2 とは equivalent であると云う。

定義ト） 同じ I e.p. をもつ検定中 II e.p. が最小のものを best test と云う。 test 系 Φ の各要素がすべて最良のとき最良検定系と云う。

定義チ） test 系 Φ がすべての実数 α, $0 \leqq \alpha \leqq 1$ に対応して一つ只一つの元 ϕ_α をもち，$E_0(\phi_\alpha)=\alpha$ なるとき Φ を完備された系と云う。

完備化された最良の検定系の過誤函数（曲線）を分離度函数（曲線）と云う。

定理 II. Ω^* の P_0^* P_1^* は條件（C.C）をもつ

$$(C.C)\begin{cases}\text{任意の } A^*(\in \mathcal{B}^*) \text{ は } P_i^*(A^*) \geqq p_i \text{ なる } p_i \text{ をとれば} \\ A^* \text{の部分集合 } B^*(\in \mathcal{B}^*) \text{ があり，} P_i^*(B^*)=p_i \text{ となすこと}\end{cases}$$

が出来る。（$i=1,2$）

（証明） $p_i>0$ として一般性を失はない。

$$A(\xi)=[(\omega,\xi)\mid \xi\in A^*]$$

とすると m-measure zero なる $N(\in \mathcal{L})$ をのぞいて $A(\xi)$ は $\mathcal{B}$-measurable 且つ $p_i(\xi)=P_i(A(\xi))$ も $\mathcal{B}$-measurable であり $0 \leqq p_i(\xi) \leqq 1$ である。故に

$$P_i(A)=\int_0^1 p_i(\xi)\,dm(\xi)$$

しかるに $u(x)=\int_0^x p_i(\omega)\,dm(\xi)$ は x の連続函数であるから

$$u(x_0)=p_i$$

なる x_0 が存在する。今 $B^*=A^*\cap(0,x]\times\Omega$ とすると

$$P_i(B^*)=\int_0^{x_0} p_i(\xi)\,dm(\xi)=p_i$$

定理 III. P_0, P_1 が (C.C) を満すときは Ω の P_0, P_1 を帰無假説，対立假説としての分離度函数は Ω^* の (P_0^*, P_1^*) の分離度函数と一致する。

(証明)　$Q_k = [f(\omega) \geqq k]$, $Q_k^* = [f^*(\omega, \xi) \geqq k]$

ここで $P_1 = \int f(\omega) dP_0$, $P_1^* = \int f^*(\omega, \xi) dP_0^*$ ，とする。

$$f(\omega) = f^*(\omega, \xi) \qquad \text{for all } \xi, \omega$$

であり，且

$$P_i(Q_k) = P_i^*(Q_k^*)$$

であるから $P_i(Q_k) = P_i^*(Q_k^*) = \alpha$ なる k を $k(\alpha)$ とおくと $k(\alpha)$ は (P_0, P_1) についても (P_0^*, P_1^*) についても同じものであるから，分離度函数は等しい.

定理 IV　Randomized test の分離度函数は non-randomized test の分離度函数と同じ性質をもつ。又假説が (C.C) をみたすときは最良検定は non-randomized test となし得る。

(証明) 明らか.

ついでながら假説が (C.C) をみたさぬ場合でも最良検定は non-randomized でよろしいのである。[1)]

［1］工藤： 検定力函数について，本誌 vol.4. no3. p.103～147.
［2］E.L.Lehmann and C.Stein: Most powerful test of Composite Hypotheses, I. Normal distributions. Annals of Math. Stat, Vol.19(1948) p.495.
［3］E.L.Lehman: Some principles of the Theory of testing hypotheses. Annals of Math. Stat.(1950) p.1.

(註) 1) ［3］ p.4. Theorem 3.1 をみよ.