⑰ RANDOM FUNCTIONの積分について

高島　已千雄

§1.　K. Karhunen, Über lineare Methoden in der Wahrscheinlichkeitsrechnung, Fennicae, Helsinki (1947), Sarja A, I. Matematica-Physicae 37 (以下[K]として引用する。これについては筆者，講究録，第6巻，第7.8号参照)に random function の積分の定義が Hilbert空間の作用素を用ひて為されてゐる。

この積分は，以前に H. Cramér, On the theory of stationary random process, Ann. of Math., vol. 41 (1940), pp. 215-230 (以下[C]として引用する，但し此処ではその定義を幾分拡張しておく。)にあげられてゐる random function の定義と異ってゐるが，後述の條件の下では両者が一致するのである。先づ両者の定義をあげ，それから一致することを示さう。

§2.　random function の積分の定義

集合Tは実軸の全部或ひはその一部分であるとする。Tを定義域とする random function $x(t)$ は二次であるとする，即ち，凡ての $t \in T$ に対して $\|x(t)\| = E\{|x(t)|^2\} < \infty$ と假定する。

そして

$$\begin{cases} E\{x(t)\} = m(t) \\ E\{x(s)\overline{x(t)}\} = r(s,t) \end{cases}$$

とおく。　尚 $x(t)-m(t)$ を更めて $x(t)$ と書けば $E\{x(t)\}=0$ となるから，はじめから $E\{x(t)\}=0$ としてよい。

また明かに $|r(s,t)|<\infty$ である。

定義域Tに於て，Lebesgue 測度が次の如く定義されてあるとする：T は有限な測度を持つ Lebesgue 可測部分集合の高々可附番個の和である。

定　義． $x(t)$ が［K］可測であるとは，如何なる $z\in L_2(x)$ に対しても $E\{z\overline{x(t)}\}$ が Lebesgue 可測である時を云ふ。

但しこゝに $L_2(x)$ は $x(t)$ の値庫 $\{x(t)\}$ の閉線状集合体である。

定理 1.　$x(t)$ が［K］可測であるための必要且つ充分な條件は $r(s,t)$ が如何なる固定した s についても t の可測函数であることである。

定　義［K］: $x(t)$ は［K］可測で，S を T の Lebesgue 可測な部分集合とする。　如何なる $z\in L_2(x)$ に対しても $E\{z\overline{x(t)}\}$ が S に関する有限な定積分を有し（Lebesgue 積分可能），且つ

$$\frac{1}{\|z\|}\left|\int_S E\{z\,\overline{x(t)}\}dt\right|$$

が有界であるならば，如何なる $z\in L_2(x)$ に対しても

$$E\{z\,\overline{X(S)}\}=\int_S E\{z\,\overline{x(t)}\}dt$$

が成立する如き一意的に定った元 $X(S)\in L_2(x)$ が存在する。

この $X(S)$ を S に関する $x(t)$ の［K］定積分と云ふ，記号：

$$X(S)=[K]\int_S x(t)dt.$$

勿論 $X(S)$ は普通の積分の性質を有する。

定義 [C]. 有限閉区間 $A \equiv [a, b]$ を

$$D_n: a = t_0^{(n)} < t_1^{(n)} < \cdots < t_{n-1}^{(n)} = b$$

と分割し，random variables の列 $\{Z_{D_n}\}$

$$Z_{D_n} = \sum_{\nu=1}^{n} x(t_\nu^{(n)})(t_\nu^{(n)} - t_{\nu-1}^{(n)})$$

を考へる。　$n \to \infty$ として

$$\max_{1 \leqq \nu \leqq n} (t_\nu^{(n)} - t_{\nu-1}^{(n)}) \to 0$$

とする。　然る時，Z_{D_n} が分割 D_n と無関係に或る random variable Z に平均收斂する場合。Z を A に関する $x(t)$ の [C] 定積分と云ふ（Riemann 式積分！）。記号：

$$Z = \underset{n \to \infty}{l.i.m}\, Z_n = [C]\int_a^b x(t)\,dt.$$

こゝで $[C]\int_a^b x(t)\,dt$ が存在するための必要且つ充分な條件をあげておかう。

補題.　$m \to m_0$ なる時 $x(t) = \underset{m \to m_0}{l.i.m}\, x_m(t)$ が存在するための必要且つ充分な條件は，

$$\lim_{m, m' \to m_0} E\left\{x_m(t)\overline{x_{m'}(t)}\right\}$$

が存在し且つ m 及び m' が m_0 に近付く近付き方に無関係であることである。　この極限値が集合 A に於て存在するならば，random function $x(t)$ の correlation function $r(s, t)$ は次の如くなる。

$$r(s, t) = \lim_{m \to m_0} E\left\{x_m(s)\overline{x_m(t)}\right\}, \qquad s, t \in A.$$

証明.　必要性は

$$E\{x(s)\overline{x(t)}\} = \lim_{m,m'\to m_0} E\{x_m(s)\overline{x_{m'}(t)}\}$$

より明か.

充分性は

$$\lim_{m,m'\to m_0} E\{|x_m(t)-x_{m'}(t)|^2\} = 0$$

より明か.　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　（終）

さて上の分割を二つ取り，夫々 D_m, D'_m とすると，

$$E\{Z_{D_m}\overline{Z}_{D_{m'}}\} = \sum_{\mu=1}^{m}\sum_{\nu=1}^{m'} r(t_\mu^{(m)}, t_\nu^{(m')})(t_\mu^{(m)}-t_{\mu-1}^{(m)})(t_\nu^{(m')}-t_{\nu-1}^{(m')})$$

となる。　そこで上の補題を用ひると，この式が謂はば二重積分の定義の式であることに注意して，次の定理を得る：

定理［C］．　$A=[a,b]$ に於て ［C］$\int_a^b x(t)dt$ が存在するための必要且つ充分な條件は，積分（Riemann）

$$\int_a^b\int_a^b r(s,t)\,ds\,dt$$

が存在することである。

一方［K］積分については（例へば筆者，p.300，定理3.4.参照）

定理［K］．　［K］$\int_S x(t)dt$ が存在するための必要且つ充分な條件は，$r(s,t)$ が $S\times S$ に關して有限積分（Lebesque）可能であることである。

尚，以下で必要な定義を與へておく。

定義．$x(t)$ が点 t で平均連續であるとは，如何なる $\varepsilon>0$ に對しても任意の $s\in D_\varepsilon(t)$ につき $\|x(s)-x(t)\|<\varepsilon$ なる如き近傍 $D_\varepsilon(t)$ が存在する時を云ふ。　$x(t)$ が集合 $S\subset T$ の如何なる点でも平均連續である時，S に於て平均連續であると云ふ。　これについて

定理 2.　$x(t)$がSに於て平均連続であるための必要且つ充分な條件は，$r(s,t)$が$S\times S$の何れの点(s,t)に於ても連続であることである.

従って$x(t)$がSに於て平均連続である場合には$r(s,t)$は，$S\times S$の何れの点に於ても連続である.

この定理と定理[C]とにより，$x(t)$がAに於て平均連続であるならば確かに　[C]$\int_a^b x(t)dt$　が存在する.

§ 3.　以下，常に$S=A\equiv[a,b]$とする。　先づ，$r(s,t)$がAに於て有界であると假定すれば，定理[C]及び定理[K]により，Riemann積分とLebesgue積分とを比較しして，[C]積分が存在すれば，[K]積分が存在することが分る。　即ちこの場合には[K]積分の方が[C]積分より廣い.

次に，$x(t)$はAに於て平均連続とすれば，定理2により，$r(s,t)$は　$A\times A$　に於て連続となり，従って有界な閉領域$A\times A$に於ては有界となる。　よってこの場合は，定理[C]及び定理[K]により，双方の$r(s,t)$の積分共に存在する。　従って[K]積分及び[C]積分が存在する。

更に次のことが成立する。

§ 4.　$S=A\equiv[a,b]$　とし，且つ$x(t)$はAに於て平均連続とする。　然る時は，Aに関する[K]定積分及び[C]定積分の両者の定義は一致する.

先づ，[C]について考へて見ると，Z_{D_n}及び$Z=\underset{n\to\infty}{l.i.m}\,Z_{D_n}$は何れも明かに$L_2(x)$の元である.　しかも，平均収斂（強収斂）するのであるから，

$$E\{zZ\}=\lim_{n\to\infty}\sum_{\nu=1}^{n}E\{z\overline{x(t_\nu^{(n)})}\}(t_\nu^{(n)}-t_{\nu-1}^{(n)}),\quad z\in L_2(x)$$

（弱收斂！）となつてゐるわけである。假定により $x(t)$ は A に於て平均連続であるから，*Schwarz* の不等式を用ひると，

$$\left| E\{ Z\overline{x(t)} \} - E\{ Z\overline{x(s)} \} \right|^2 = \left| E\{ Z[\overline{x(t)-x(t)}] \right|^2$$

$$\leqq \|Z\|^2 \cdot \|x(t)-x(s)\|^2, \quad s, t \in A$$

となり，$E\{Z\overline{x(t)}\}$ は A に於て連続である。（従つて有界でもある）．従つて $E\{Zx(t)\}$ は A に於て *Riemann* 積分可能で

$$E\{Z\overline{Z}\} = \int_a^b E\{Z\overline{x(t)}\}\,dt \qquad (*)$$

となる。

次に，［K］についても考へて見る。$x(t)$ は A に於て平均連続であるから，定理２に注意して定理１により，$x(t)$ は［K］可測となる。更に，*Schwarz* の不等式を用ひれば

$$\left| \frac{1}{\|Z\|} \int_A E\{ Z\overline{x(t)} \}\,dt \right|^2 \leqq \frac{1}{\|Z\|^2} m(A) \cdot \int_A \left| E\{ Z\overline{x(t)} \} \right|^2 dt$$

$$\leqq \frac{1}{\|Z\|^2} m(A) \cdot \|Z\|^2 \int_A E\{ |x(t)|^2 \}\,dt$$

$$= m(A) \cdot \int_A E\{ |x(t)|^2 \}\,dt$$

$$= m(A) \cdot \int_A r(t, t)\,dt.$$

従つて，区間 A に於ける $r(t,t)$ の上限を R とすれば，m を *Lebesque* 測度として

$$\left| \frac{1}{\|Z\|} \int_A E\{ Z\overline{x(t)} \}\,dt \right|^2 < m(A)^2 \cdot R$$

従つて $\frac{1}{\|Z\|} \int_A E\{ Z\overline{x(t)} \}\,dt$ は有界である．また前の場合により，$E\{Zx(t)\}$ は A の上で *Lebesque* 積分可能である．従つて $x(t)$ は［K］定積分 $X(A) = [K]\int_A x(t)\,dt$ を有する：

$$E\left\{ z\,\overline{X(A)} \right\} = \int_A E\left\{ z\,\overline{x(t)} \right\} dt \qquad (**)$$

（※）と（※※）とを見れば，$E\left\{ z\,\overline{x(t)} \right\}$ が t につき連続だから両式の右辺が一致し，この場合には両者の積分の定義が一致することが分る。

尚、統計数理研究所，風見氏の御注意によると，既にこのことは U. Grenander が証明してゐるとのことです。