㉒ 正規分布に従う二つの確率変数の比の分布に就て

奈良医大　　山本純恭

二つの確率変数 X, Y の同時分布の確率密度が

$$(1)\quad \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\exp\left[-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left\{\left(\frac{x-m_1}{\sigma_1}\right)^2-2\rho\left(\frac{x-m_1}{\sigma_1}\right)\left(\frac{y-m_2}{\sigma_2}\right)+\left(\frac{y-m_2}{\sigma_2}\right)^2\right\}\right]$$

であるとき，所謂"Index"

$$(2)\quad Z \equiv \frac{Y}{X}$$

の分布に就ては Merrill[1], Geary[2], Fieller[3], Nicholson[4] 等の研究がある。こゝでは Mixture of Distribution[5] の形で分布函数，密度函数を求め特性函数を計算したので報告する。

§1. 分布函数，密度函数

Z の分布函数を F(Z) とすれば

$$(3)\quad F(Z)\equiv P(Z\leq z)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\iint_{\frac{x}{y}\leq z}\exp\left[-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\right.$$
$$\left.\cdot\left\{\left(\frac{x-m_1}{\sigma_1}\right)^2-2\rho\left(\frac{x-m_1}{\sigma_1}\right)\left(\frac{y-m_2}{\sigma_2}\right)+\left(\frac{y-m_2}{\sigma_2}\right)^2\right\}\right]$$

ここで

$$\lambda \equiv \frac{\sigma_2}{\sigma_1}, \qquad a_i \equiv \frac{m_i}{\sigma_i} \quad (i=1,2)$$

(4)

$$h^2 \equiv \frac{1}{1-\rho^2}(a_1^2-2\rho a_1 a_2+a_2^2)=\frac{1}{1-\rho^2}\left\{\left(\frac{m_1}{\sigma_1}\right)^2-2\rho\frac{m_1 m_2}{\sigma_1\sigma_2}+\left(\frac{m_2^2}{\sigma_2}\right)\right\}$$

とおいて，変換

$$(5) \qquad x=\sigma_1 u, \quad y=\sigma_2\rho u+\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}\,v$$

を施せば

$$(6) \quad F(z)=\frac{e^{-\frac{h^2}{2}}}{2\pi}\iint\limits_{\lambda\rho+\lambda\sqrt{1-\rho^2}\frac{v}{u}\leqq z} exp\left[-\frac{1}{2}(u^2+v^2-2a_1u-2\frac{a_2-\rho a_1}{\sqrt{1-\rho^2}}v)\right]dudv$$

更に

$$(7) \quad u=r\cos\theta, \quad v=r\sin\theta$$

で r, θ に移れば

$$(8) \quad F(z)=\frac{e^{-\frac{h^2}{2}}}{2\pi}\iint\limits_{\tan\theta\leqq\frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}}\left(\frac{z}{\lambda}-\rho\right)} e^{-\frac{1}{2}r^2+(a_1\cos\theta+\frac{a_2-\rho a_1}{\sqrt{1-\rho^2}}\sin\theta)r}\, r\,dr\,d\theta .$$

$h \neq 0$ として

$$(9) \qquad \sin\alpha \equiv \frac{a_1}{h}, \qquad \cos\alpha \equiv \frac{a_2-\rho a_1}{h\sqrt{1-\rho^2}}$$

とおけば

$$(10) \quad F(z)=\frac{e^{-\frac{h^2}{2}}}{2\pi}\iint\limits_{\tan\theta\leqq\frac{z-\rho\lambda}{\lambda\sqrt{1-\rho^2}}} e^{-\frac{1}{2}r^2+rh\sin(\theta+\alpha)}\, r\,dr\,d\theta$$

級数展開して積分すると，

$$(11)\quad F(z)=\frac{e^{-\frac{h^2}{2}}}{2\pi}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{h^\nu}{\nu!}\int_0^\infty e^{-\frac{1}{2}r^2}r^{\nu+1}dr\cdot\int_{\tan\theta\le\frac{z-\rho\lambda}{\lambda\sqrt{1-\rho^2}}}\sin^\nu(\theta+\alpha)d\theta$$

$$(12)\quad \tan\Theta=\frac{z-\rho\lambda}{\lambda\sqrt{1-\rho^2}}\qquad\left(-\frac{\pi}{2}<\Theta<\frac{\pi}{2}\right)$$

とすれば

$$(13)\quad F(z)=\frac{e^{-\frac{h^2}{2}}}{2\pi}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{2^{\frac{\nu}{2}}h^\nu}{\nu!}\Gamma\left(\frac{\nu+2}{2}\right)\left\{\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\Theta}+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\overline{\Theta+\pi}}\sin^\nu(\theta+\alpha)d\theta\right\}.$$

こゝで

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\Theta+\pi}\sin^\nu(\theta+\alpha)d\theta=(-1)^\nu\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\Theta}\sin^\nu(\theta+\alpha)d\theta$$

であるから

$$(14)\quad F(z)=\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{h^2}{2}}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{2^\nu h^{2\nu}}{(2\nu)!}\Gamma\left(\frac{2\nu+2}{2}\right)\cdot 2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\Theta}\sin^{2\nu}(\theta+\alpha)d\theta.$$

これを整理すると，*Mixture of Distribution* の形で

$$(15)\quad F(z)=\sum_{\nu=0}^{\infty}e^{-\frac{h^2}{2}}\frac{\left(\frac{h^2}{2}\right)^\nu}{\nu!}F_\nu(z)$$

但し

$$(16)\quad F_\nu(z)=\frac{1}{B\left(\frac{1}{2},\nu+\frac{1}{2}\right)}\int_{-\frac{\pi}{2}+\alpha}^{\Theta+\alpha}\sin^{2\nu}\theta\,d\theta$$

$h=0$ のとき（$m_1=m_2=0$ のとき）

$$(17)\quad F(z)=F_0(z)=\frac{1}{\pi}\left(\Theta+\frac{\pi}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{\pi}\tan^{-1}\frac{\sigma_1 Z - \rho\sigma_2}{\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} + \frac{1}{2}$$

次に密度函数 $f(Z) = F'(Z)$ を求めよう。

$$(18)\quad \begin{cases} f_\nu(Z) \equiv F_\nu'(Z) = \dfrac{1}{B\left(\frac{1}{2}, \nu+\frac{1}{2}\right)} \sin^{2\nu}(\Theta+\alpha)\dfrac{d\Theta}{dZ}, \quad (\nu = 0, 1, \cdots) \\[2ex] \dfrac{d\Theta}{dZ} = \dfrac{\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}{\sigma_1^2 Z^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2 Z + \sigma_2^2} \\[2ex] \sin^{2\nu}(\Theta+\alpha) = \dfrac{1}{h^{2\nu}}\left\{\dfrac{\sigma_1(m_2\sigma_1 - m_1\rho\sigma_2)Z + \sigma_2(m_1\sigma_2 - m_2\rho\sigma_1)}{\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}\sqrt{\sigma_1^2 Z^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2 Z + \sigma_2^2}}\right\}^{2\nu} \end{cases}$$

であるから

$$(19)\quad f_\nu(Z) = \frac{1}{B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}+\nu\right)h^{2\nu}} \frac{\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}{\sigma_1^2 Z^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2 Z + \sigma_2^2}$$

$$\cdot\left\{\frac{\sigma_1(m_2\sigma_1 - m_1\rho\sigma_2)Z + \sigma_2(m_1\sigma_2 - m_2\rho\sigma_1)}{\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}\sqrt{\sigma_1^2 Z^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2 Z + \sigma_2^2}}\right\}^{2\nu}$$

従つて求める密度函数 $f(Z)$ は

$$(20)\quad f(Z) = F'(Z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} e^{-\frac{h^2}{2}} \frac{\left(\frac{h^2}{2}\right)^\nu}{\nu!} f_\nu(Z)$$

$$= \frac{1}{\pi} e^{-\frac{h^2}{2}} \frac{\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}{\sigma_1^2 Z^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2 Z + \sigma_2^2}$$

$$\times \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{2^\nu \nu!}{(2\nu)!}\left\{\frac{\sigma_1(m_2\sigma_1 - m_1\rho\sigma_2) + \sigma_2(m_1\sigma_2 - m_2\rho\sigma_1)}{\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}\sqrt{\sigma_1^2 Z^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2 Z + \sigma_2^2}}\right\}^{2\nu}$$

Fieller の求めた形に変形すれば

(21) $$f(Z)=\frac{1}{\pi}\frac{\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}{\sigma_1^2Z^2-2\rho\sigma_1\sigma_2Z+\sigma_2^2}e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left\{\left(\frac{m_1}{\sigma_1}\right)^2-2\rho\frac{m_1m_2}{\sigma_1\sigma_2}+\left(\frac{m_2}{\sigma_2}\right)^2\right\}}$$

$$+\frac{\sigma_1(m_2\sigma_1-m_1\rho\sigma_2)Z+\sigma_2(m_1\sigma_2-m_2\rho\sigma_1)}{\pi(\sigma_1^2Z^2-2\rho\sigma_1\sigma_2Z+\sigma_2^2)^{3/2}}$$

$$\times e^{-\frac{1}{2}\frac{(m_1Z-m_2)^2}{\sigma_1^2Z^2-2\rho\sigma_1\sigma_2Z+\sigma_2^2}}\int_0^{\frac{\sigma_1(m_2\sigma_1-m_1\rho\sigma_2)Z+\sigma_2(m_1\sigma_2-m_2\rho\sigma_1)}{\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}\sqrt{\sigma_1^2Z^2-2\rho\sigma_1\sigma_2Z+\sigma_2^2}}}e^{-\frac{t^2}{2}}dt.$$

となる。

特に $h=0$ ($m_1=m_2=0$ のとき) ならば

(22) $$f(Z)=f_0(Z)=\frac{1}{\pi}\frac{\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}{\sigma_1^2Z^2-2\rho\sigma_1\sigma_2Z+\sigma_2^2}$$

であって Median (mode) が $\frac{\sigma_2}{\sigma_1}\rho$, 四分位偏差が $\frac{\sigma_2}{\sigma_1}\sqrt{1-\rho^2}$ なる Canchy 分布である。

次に

(23) $$\xi=\frac{m_1Z-m_2}{\sqrt{\sigma_1^2Z^2-2\rho\sigma_1\sigma_2Z+\sigma_2^2}}$$

(24) $$k=\frac{|\sigma_1(m_2\sigma_1-m_1\rho\sigma_2)Z+\sigma_2(m_1\sigma_2-m_2\rho\sigma_1)|}{\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}\sqrt{\sigma_1^2Z^2-2\rho\sigma_1\sigma_2Z+\sigma_2^2}}$$

とおくと

(25) $$\xi^2=h^2-k^2$$

(26) $$\left|\frac{d\xi}{dZ}\right|=\frac{|\sigma_1(m_2\sigma_1-m_1\rho\sigma_2)Z+\sigma_2(m_1\sigma_2-m_2\rho\sigma_1)|}{(\sigma_1^2Z^2-2\rho\sigma_1\sigma_2Z+\sigma_2^2)^{3/2}}$$

であるから

(27) $$f(Z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{\xi^2}{2}}\left|\frac{d\xi}{dZ}\right|\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\frac{1}{k}e^{-\frac{k^2}{2}}+\int_0^k e^{-\frac{t^2}{2}}dt\right)$$

十分大きい ξ_0 に対して $|\xi|<\xi_0$ なる ξ に対して $h^2\to\infty$ のとき $k\to\infty$ であるから

$$\frac{1}{k}e^{-\frac{k^2}{2}}\to 0 \qquad \int_0^k e^{-\frac{t^2}{2}}dt\to\sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

従って

$$(28)\qquad f(z)\fallingdotseq\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\xi^2}\left|\frac{d\xi}{dz}\right|$$

これを要するに h^2 が十分大なるとき (23) によつて Z から ξ に移れば ξ は近似的に標準正規分布に従うとしてよい。

§ 2. 特性函数

先ず、$F_\nu(Z)$ の特性函数

$$(29)\qquad \varphi_\nu(t)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{itz}f_\nu(Z)\,dZ$$

を計算しよう。

$$(30)\qquad u=\frac{Z-p\lambda}{\lambda\sqrt{1-p^2}}\qquad p\equiv\cos\alpha=\frac{a_2-pa_1}{h\sqrt{1-p^2}}$$

$$q\equiv\sin\alpha=\frac{a_1}{h}$$

とすれば

$$\sin^{2\nu}(\Theta+\alpha)=\left(\frac{pu+q}{\sqrt{1+u^2}}\right)^{2\nu}.$$

であるから

$$(31)\qquad \varphi_\nu(t)=\frac{e^{ip\lambda t}}{B\left(\frac{1}{2},\nu+\frac{1}{2}\right)}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{i\lambda\sqrt{1-p^2}\,tu}\frac{(pu+q)^{2\nu}}{(1+u^2)^{\nu+1}}du$$

$$(32) \qquad w \equiv \lambda\sqrt{1-p^2}\,t$$

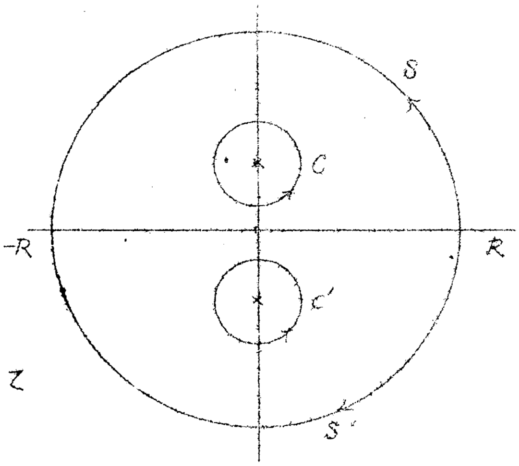
とおいて

$$(33) \qquad \frac{1}{B(\frac{1}{2}, \nu+\frac{1}{2})}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{iwu}\frac{(pu+q)^{2\nu}}{(1+u^2)^{\nu+1}}\,du$$

を計算しよう。

被積分函数の極は $\pm i$ であるから留数を計算すればよい。

$t>0\ (w>0)$ のときと $t<0\ (w<0)$ のときにわけて



$$(34) \qquad \begin{aligned} &\int_{-R}^{R} + \int_{S} = \int_{C} \qquad (w>0) \\ &\int_{-R}^{R} + \int_{S'} = -\int_{C'} \qquad (w<0) \end{aligned}$$

ここで第二項は夫々 $R\to\infty$ のとき 0 に収斂することを示そう。

$w>0$ のとき

$$u = Re^{i\theta} = R(\cos\theta + i\sin\theta)$$

とおくと $\quad du = iRe^{i\theta}d\theta \quad$ 従つて

$$\left|\int_{S} e^{iwu}\frac{(pu+q)^{2\nu}}{(1+u^2)^{\nu+1}}\,du\right| \leqq \frac{\pi R(|p|R+|q|)^{2\nu}}{(R^2-1)^{\nu+1}} \to 0 \ (R\to\infty)$$

又 $w<0$ のとき $u = Re^{-i\theta}$ とおけば

$$\left| \int_{S'} e^{i\omega u} \frac{(pu+q)^{2\nu}}{(1+u^2)^{\nu+1}} du \right| \leq \frac{\pi R(|p|R+|q|)^{2\nu}}{(R^2-1)^{\nu+1}} \to 0 \ (R\to\infty)$$

従つて求める積分値（33）は

（$0, i$）の留数を a_{-1}

（$0, -i$）の留数を a'_{-1}

とすれば

(35) $t > 0$ ($\omega > 0$) のとき $2\pi i\, a_{-1}$

$t < 0$ ($\omega < 0$) のとき $-2\pi i\, a'_{-1}$

である。 a_{-1} 及 a'_{-1} を Explicit に求めると，

(36) $$a_{-1} = \frac{1}{\nu!\, B(\frac{1}{2}\nu+\frac{1}{2})} \frac{d^\nu}{du^\nu} \left(e^{i\omega u} (pu+q)^{2\nu} (u+i)^{\nu+1} \right) \Big|_{u=i}$$

$$= \frac{1}{2\pi i} e^{-\omega-i\nu\alpha} \sum_{k=0}^{\nu} \sum_{l=0}^{\nu-k} (-1)^{\nu-k} \frac{2^{\nu-l}\nu!(\nu+l)!}{k!(2\nu-k)!\,l!(\nu-k-l)!}$$

$$\times p^k e^{-i\alpha(\nu-k)} \omega^{\nu-k-l}.$$

(37) $$a'_{-1} = -\frac{1}{2\pi i} e^{\omega+i\nu\alpha} \sum_{k=0}^{\nu} \sum_{l=0}^{\nu-k} (-1)^{\nu-k} \frac{2^{\nu-l}\nu!(\nu+l)!}{k!(2\nu-k)!\,l!(\nu-k-l)}$$

$$\times p^k e^{i\alpha(\nu-k)} (-\omega)^{\nu-k-l}$$

故に $t \geq 0$ のとき

(38) $$\varphi_\nu(t) = e^{ip\lambda t - \lambda\sqrt{1-\rho^2}\,t - i\nu\alpha}$$

$$\times \sum_{k=0}^{\nu} \sum_{l=0}^{\nu-k} (-1)^{\nu-k} \frac{2^{\nu-l}\nu!(\nu+l)!}{k!(2\nu-k)!\,l!(\nu-k-l)!} \left(\frac{a_2 - pa_1}{h\sqrt{1-\rho^2}} \right)^k$$

$$\times e^{-i\alpha(\nu-k)} (\lambda\sqrt{1-\rho^2}\, t)^{\nu-k-l}$$

同様に $t \leqq 0$ のとき

$$(39)\quad \varphi_\nu(t) = e^{i\rho\lambda t + \lambda\sqrt{1-\rho^2}\,t + i\nu\alpha}$$

$$\times \sum_{k=0}^{\nu} \sum_{\ell=0}^{\nu-k} (-1)^{\nu-k} \frac{2^{\nu-\ell}\,\nu!\,(\nu+\ell)!}{k!\,(2\nu-k)!\,\ell!\,(\nu-k-\ell)!} \left(\frac{a_2 - \rho a_1}{h\sqrt{1-\rho^2}} \right)^k$$

$$\times e^{i\alpha(\nu-k)} \left(-\lambda\sqrt{1-\rho^2}\,t\right)^{\nu-k-\ell}$$

従つて求める $\varphi_\nu(t)$ は

$$(40)\quad \varphi_\nu(t) = e^{i\rho\lambda t - \lambda\sqrt{1-\rho^2}|t|} \left(\frac{a_2 - a_1(\rho + i\sqrt{1-\rho^2}\,t^*)}{h\sqrt{1-\rho^2}} \right)^\nu$$

$$\times \sum_{k=0}^{\nu} \sum_{\ell=0}^{\nu-k} (-1)^{\nu-k} \frac{2^{\nu-\ell}\,\nu!\,(\nu+\ell)!}{k!\,(2\nu-k)!\,\ell!\,(\nu-k-\ell)!} \left(\frac{a_2 - \rho a_1}{h\sqrt{1-\rho^2}} \right)^k$$

$$\times \left(\frac{a_2 - a_1(\rho + i\sqrt{1-\rho^2}\,t^*}{h\sqrt{1-\rho^2}} \right)^{\nu-k} \left(\lambda\sqrt{1-\rho^2}\,|t|\right)^{\nu-k-\ell}$$

但し

$$t^* = \begin{cases} 1 & (t > 0) \qquad \lim_{t\to+0} t^* = 1 \\ -1 & (t < 0) \qquad \lim_{t\to-0} t^* = -1 \end{cases}$$

$F(Z)$ は $F_\nu(Z)$ の Mixture であるから，$F(Z)$ の特性函数を $\varphi(t)$ とすれば

$$(41)\quad \varphi(t) = \sum_{\nu=0}^{\infty} e^{-\frac{h^2}{2}} \frac{\left(\frac{h^2}{2}\right)^\nu}{\nu!} \varphi_\nu(t)$$

$$= e^{i\rho\lambda t - \lambda\sqrt{1-\rho^2}|t|} \sum_{\nu=0}^{\infty} e^{-\frac{h^2}{2}} \frac{\left(\frac{h^2}{2}\right)^\nu}{\nu!} \left(\frac{a_2 - a_1(\rho + i\sqrt{1-\rho^2}\,t^*)}{h\sqrt{1-\rho^2}} \right)^\nu$$

$$\times \sum_{k=0}^{\nu} \sum_{\ell=0}^{\nu-k} (-1)^{\nu-k} \frac{2^{\nu-\ell}\,\nu!\,(\nu+\ell)!}{k!\,(2\nu-k)!\,\ell!\,(\nu-k-\ell)!} \left(\frac{a_2-\rho a_1}{h\sqrt{1-\rho^2}} \right)^{k}$$

$$\times \left(\frac{a_2-a_1(\rho+i\sqrt{1-\rho^2}\,t^{*}}{h\sqrt{1-\rho^2}} \right)^{\nu-k} (\lambda\sqrt{1-\rho^2}\,|t|)^{\nu-k-\ell}$$

参考文献

(1) Merrill, A. S. : (1928) Frequency distribution of an index when both components follows the normal law. Biom., 20.

(2) Geary, R. C. : (1930) The frequency distribution of the quotient of two normal variables. J. R. S. S., 93.

(3) Fieller, E. C : (1932) The distribution of an index in a normal bivariate population : Biom., 24,

(4) Nicholson, C : (1941) A geometrical analysis of the frequency-distribution of the ratio between two variables. Biom., 32.

(5) Robbins, H . (1948) Mixture of distributions. Ann. Math. Stat. 19.