(21) 母集団が有限の場合の多項分布について

遠藤　健児

N個の元から成る集団をある基準に依つて分類したときの級を $\pi_1, \pi_2, \cdots, \pi_k$ とし，π_ν の大さを Np_ν $(\nu=1,2,\cdots,k)$ で表わす。

勿論 $\sum_{\nu=1}^{k} p_\nu = 1$ である。今このN個のうちから等確率的にn個の単位を抽出するとき，抽出されたn個のうちのπ_νに属するものの個数を n_ν $(\nu=1,2,\cdots,k)$ とすれば，nを固定したときの $(n_1, n_2, \cdots, n_k)$ の同時分布は，同時確率

$$(1)\quad P(n_1,n_2,\cdots,n_k)=\frac{n!}{n_1!\,n_2!\cdots n_k!}(Np_1)^{[n_1]}(Np_2)^{[n_2]}\cdots(Np_k)^{[n_k]}\Big/N^{[n]}$$

但し $\sum_{\nu=1}^{k} n_\nu = n$

に依つて與えられる。此処で $x^{[r]}$ は *factorial* の記号で

$$x^{[r]} = x(x-1)\cdots(x-r+1)$$

である。これは周知の事柄であるが，この分布の積率を一般的に求めるのは容易でない。

しかしながら階乗積率（*factorial moment*）に関しては，容易に一般式が求められる。

そのためには，例えば，階乗によつても，二項定理或は多項定理に対応する展開が出来ることを利用すればよい。

即ち，

$$(a+b)^{[n]}=\sum_{\nu=0}^{n}\binom{n}{\nu}a^{[\nu]}b^{[n-\nu]} \qquad (a^{[0]}=a,\ b^{[0]}=b)$$

$$(x_1+x_2+----+x_k)^{[n]}$$

$$=\sum\frac{n!}{n_1!\,n_2!---n_k!}x_1^{[n_1]}x_2^{[n_2]}---x_k^{[n_k]}$$

$$\left(\sum_{\nu=1}^{k}n_\nu=n\right).$$

となるから，(1) はこのような多項展開に依れば

$$(Np_1+Np_2+----+Np_k)^{[n]}\Big/N^{[n]}$$

を展開したときの一般項となつていることがわかる。

扨て $k_1+k_2+----+k_k=k$ とするとき，第 k 次の階乗積率は

$$E\left(n_1^{[k_1]}n_2^{[k_2]}----n_k^{[k_k]}\right)$$

$$=\sum n_1^{[k_1]}n_2^{[k_2]}---n_k^{[k_k]}\frac{n!}{n_1!\,n_2!---n_k!}(Np_1)^{[n_1]}---(Np_k)^{[n_k]}\Big/N^{[n]}$$

$$=n^{[k]}\left\{\sum{}'\frac{(n-k)!\ n^{[k]}}{(n_1-k_1)!---(n_k-k_k)!}(Np_1-k_1)^{[n_1-k_1]}---(Np_k-k_k)^{[n_k-k_k]}\right\}(Np_1)^{[k_1]}---(Np_k)^{[k_k]}\Big/N^{[n]}$$

（但しここで $\sum'$ は $[n]$ の数値が負にならない範囲で加え合わせることを意味する）と書くことが出来て，しかも上式の $\{\ \}$ は，(2) の関係から

$$\left[(Np_1-k_1)+(Np_2-k_2)+----+(Np_k-k_k)\right]^{[n-k]}$$

$$=(N-k)^{[n-k]}=N^{[n]}\Big/N^{[k]}$$

に等しい。 従つて，第 k 次の階乗積率は

$$(3)\quad \mu_{[k_1, k_2, \cdots, k_h]} = n^{[k]} (Np_1)^{[k_1]} (Np_2)^{[k_2]} \cdots (Np_h)^{[k_h]} / N^{[k]}$$

但し $\quad k = k_1 + k_2 + \cdots + k_h$

となる。 これは通常の多項分布の階常積率

$$(4)\quad \mu_{[k_1, k_2, \cdots, k_h]} = n^{[k]} (Np_1)^{k_1} (Np_2)^{k_2} \cdots (Np_h)^{k_h} / N^{k}$$

$$= n^{[k]} p_1^{k_1} p_2^{k_2} \cdots p_h^{k_h}$$

に対応する結果である。

特に二項分布の k 次の factorial moment を求めるには

$$k_1 = k, \quad k_2 = k_3 = \cdots = k_h = 0, \quad p_1 = p$$

とおけば

$$\mu_{[k]} = n^{[k]} (Np)^{[k]} / N^{[k]}$$

例 1. $$E(n_1 n_2) = \mu'_{110\cdots0} = \mu_{[1,1,0,\cdots,0]}$$

$$= n^{[2]} (Np_1)(Np_2) / N^{[2]} = \frac{n(n-1)}{N(N-1)} (Np_1)(Np_2)$$

$$E(n_1^2) = \mu'_{20\cdots0} = \mu_{[2,0,\cdots,0]} + E(n_1)$$

$$= n^{[2]} (Np_1)^{[2]} / N^{[2]} + E(n_1) = \frac{n(n-1)}{N(N-1)} (Np_1)(Np_1 - 1) + np_1$$

$$= \frac{n(n-1)}{N(N-1)} (Np_1)\left(Np_1 + \frac{N-n}{n-1}\right)$$

一般に

例 2 $$E(n_\mu n_\nu) = \frac{n(n-1)}{N(N-1)} (Np_\mu)\left(Np_\nu + \delta_{\mu\nu} \frac{N-n}{n-1}\right)$$

$$E\{(n_\mu - E(n_\mu))(n_\nu - E(n_\nu))\} = E(n_\mu n_\nu) - E(n_\mu)E(n_\nu)$$

$$= \frac{n(n-1)}{N(N-1)}(Np_\mu)(Np_\nu - \delta^*_{\mu\nu}) - (np_\mu)(np_\nu) \qquad \left(\delta^*_{\mu\nu} = \frac{N-n}{n-1}\delta_{\mu\nu}\right)$$

$$= \frac{n(n-1)}{N-1}p_\mu\{(N-1)p_\nu + (p_\nu - \delta_{\mu\nu})\} - n^2 p_\mu p_\nu$$

$$= \frac{n(n-1)}{N-1}p_\mu(p_\nu - \delta^*_{\mu\nu}) - np_\mu p_\nu$$

$$= \frac{np_\mu}{N-1}\left((n-1)(p_\nu - \delta^*_{\mu\nu}) - (N-1)p_\nu\right)$$

$$= \frac{np_\mu}{N-1}\{(n-N)p_\nu - (N-n)\delta_{\mu\nu}\}$$

$$= \frac{N-n}{N-1}np_\mu(\delta_{\mu\nu} - p_\nu)$$

例３．　大さＮの有限母集団からとられた所謂大さnの任意標本の標本平均は

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{h} X_\nu n_\nu$$

とかくことが出来る。　此処では母集団は X_ν なる測度をもつ，Np_ν 個の元から成る級 π_ν（$\nu = 1, 2, ----, h$）に分類されたものと考えるのである。

すると

$$E(\bar{x}) = \frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{h} X_\nu E(n_\nu) = \frac{1}{n}\sum X_\nu \cdot np_\nu = \sum X_\nu p_\nu = \bar{X} \quad \text{（母平均）}$$

又　$(\bar{x} - \bar{X})^2 = \frac{1}{n^2}\sum_\mu\sum_\nu X_\mu X_\nu\{n_\mu - E(n_\mu)\}\{n_\nu - E(n_\nu)\}$　であるから，例２の結果を利用すれば

$$D^2(\bar{x}) = E(\bar{x} - \bar{X})^2$$

$$= \frac{1}{n^2} \sum_{\mu} \sum_{\nu} X_\mu X_\nu \frac{N-n}{N-1} n p_\mu (\delta_{\mu\nu} - p_\nu)$$

$$= \frac{N-n}{N-1} \left\{ \frac{1}{n} \sum_{\nu} X_\nu^2 p_\nu - \frac{1}{n} \left(\sum_{\nu} X_\nu p_\nu \right)^2 \right\}$$

$$= \frac{N-n}{N-1} \cdot \frac{1}{n} \sigma^2, \qquad \sigma^2 = \sum_{\nu} (X_\nu - \bar{X})^2 p_\nu$$

On the multinomial distribution derived from finite population.

by K. Endō

A finite population π may be classefied into h classes $\pi_1, \pi_2, \cdots \pi_h$, with respect to a certain characteristic.

Let N and Np_ν be the Sizes of π and π_ν ($\nu = 1, 2, \cdots, h$) respectively, whence $\sum_{\nu=1}^{h} p_\nu = 1$.

From any sample of size n drawn from π with equal probability, we may obtain an observation $(n_1, n_2, \cdots, n_h)$, where n_ν denotes the number of units belonging to the class π_ν ($\nu = 1, 2, \cdots, h$), and $\sum_{\nu=1}^{h} n_\nu = n$.

The distribution of $(n_1, n_2, \cdots, n_h)$ for fixed n is given by the joint probability (1), where $[\ ]$ stands for the factorial, i.e., $x^{[r]} = x(x-1)\cdots(x-r+1)$.

The factorial moments of above distribution are obtained as (3) by making use of the multinomial expansion (2).

(3) Correspones to the factorial moments (4) of the ordinary multinomial distribution.