⑩ 平方和の独立性について

遠藤　健児

分散分析法に於て実際に取扱われるものは多くは，二次形式の統計量のうちでも特に平方和の形の統計量である。　しかもその様な平方和はそれを含む或る平方和の成分として與えられるものである。　一般に或る平方和がいくつかの平方和の和とかき表わされると云ふこと，例えば

$$\sum_i \sum_j (x_{ij}-\bar{x}_{..})^2 = \sum_i \sum_j \left\{(x_{ij}-\bar{x}_{i.})+(\bar{x}_{i.}-\bar{x}_{..})\right\}^2$$

$$= \sum_i \sum_j (x_{ij}-\bar{x}_{i.})^2+\sum_i \sum_j (\bar{x}_{i.}-\bar{x}_{..})^2$$

となることは次の様な関係を使つて導かれるものである。即ち

$$\begin{cases} x_{ij}-\bar{x}_{..}=(x_{ij}-\bar{x}_{i.})+(\bar{x}_{i.}-\bar{x}_{..}) \\ \sum_i \sum_j (x_{ij}-\bar{x}_{i.})(\bar{x}_{i.}-\bar{x}_{..})=0 \end{cases}$$

この場合，積和が0となることと，成分たる二つの平方和が互に独立に分布することゝの関係について考察したのであるが，その結果は，殆んどそのまゝの形で，広島大学の T. Ogasawara, M. Takahashi 両氏が既に発表された結果[1]のうちに特別な場合として含まれていることを最近になつて知つた。　此処では問題の出発点と，いくつかの課せられた條件の本質性とを分散分析法に関連して明らかにすると云ふ意味で，求め得た結果を一応報告しておく。

$x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n$ を分散が全一の正規分布に従つて独立に分布する変量とする．　$x_1, \cdots\cdots, x_n$ をこの順序に成分に持つ縦

ヴエクトルを $\mathfrak{x}$ で表わす。　すると平方和は，その加える順序を定めておけば，ある n 行 n 列の行列 A に依つて $A\mathfrak{x}$ と云うヴエクトルの内積として

$$(A\mathfrak{x})'(A\mathfrak{x}) = \mathfrak{x}'A'A\mathfrak{x}$$

と書き示される。　此処で $A'A$ は勿論対稱行列であるから，$\mathfrak{x}'A'A\mathfrak{x}$ は一つの二次形式を表わす。

例えば平方和 $\sum_i (x_i - \bar{x})^2$ 　$(\bar{x} = \sum_i x_i/n)$ については

$$A = \begin{pmatrix} 1-\frac{1}{n}, & -\frac{1}{n}, & \cdots\cdots, & -\frac{1}{n} \\ -\frac{1}{n} & 1-\frac{1}{n} & \cdots\cdots & -\frac{1}{n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\frac{1}{n} & -\frac{1}{n} & \cdots\cdots & 1-\frac{1}{n} \end{pmatrix}$$

となる。　この様な行列 A を成分行列と呼ぶことにする。　このとき或る平方和が二つの平方和の和として表わされると云うことは，始めにあげた例についてみても明かな様にその成分行列の間に次の関係が成り立つことを示す。

(1)　　$A = A_1 + A_2$

$$A'A = (A_1 + A_2)'(A_1 + A_2)$$

(2)　　$= A_1'A_1 + A_2'A_2$

又は　$A_1'A_2 + A_2'A_1 = 0$

最后の條件は積和が 0 なることを示すものである。　一方二つの二次形式 $\mathfrak{x}'A_1'A_1\mathfrak{x}$ と $\mathfrak{x}'A_2'A_2\mathfrak{x}$ とが互に独立に分布するための完全條件[2]は

(3)　　$A_1'A_1A_2'A_2 = 0$

である。

処で (1) と (2) だけからは (3) は結論されないのであつて，(3) を導くためには更に次の條件を加えねばならない。

(4) A_1, A_2 はいづれも対稱行列である．即ち

$$A_1' = A_1, \quad A_2' = A_2$$

(5) $$A^2 = A$$

<u>定理 1</u>．
$$A = A_1 + A_2$$
$$A'A = A_1'A_1 + A_2'A_2$$

であるとき，$A_1' = A_1$，$A_2' = A_2$ 且つ $A^2 = A$ ならば $\mathfrak{x}'A_1'A_1\mathfrak{x}$ と $\mathfrak{x}'A_2'A_2\mathfrak{x}$ とは互に独立に分布する。しかもこのときには

(6) $$A_1^2 = A_1 \quad , \quad A_2^2 = A_2$$

となる。

最初に挙げた例についてはこれらの條件 (1)，(2)，(4)，(5) がすべて成立つことが容易に検証出來る。

定理 1 の証明．(4) によつて $A = A_1 + A_2$ は対称行列であり，しかも $A^2 = A$ だから適当に直交行列 P を選べば

$$P'AP = \begin{pmatrix} E^* & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

の形になるものとしてよい。E^* は r 行 r 列の単位行列 $(r \leqq n)$ である。処で (2) 及び (3) に依れば

$$A = A_1 + A_2 = A^2 = A'A = A_1'A_1 + A_2'A_2$$

なる関係があるから

(7) $$P'AP = P'A_1P + P'A_2P$$
$$= (P'A_1P)'(P'A_1P) + (P'A_2P)'(P'A_2P)$$

となる。 従って $P'A_1P$ 及び $P'A_2P$ は夫々

$$\begin{pmatrix} A_1^* & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} A_2^* & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

の形の行列でなければならない。 但し A_1^*, A_2^* はいづれも r 行 r 列の対称行列である。 何故ならば, $P'A_1P$ 及び $P'A_2P'$ の第 j 列の列ヴエクトルを夫々 u_{1j}, u_{2j} $(j>r)$ とすれば, (7) の両辺の (j,j) 元素を比較して得る関係

$$0 = u_{1j}^2 + u_{2j}^2$$

から $u_{1j}=u_{2j}=0$ なることを結論出来るからである。

故に (7) の関係は

$$E^* = A_1^* + A_2^* = A_1^{*2} + A_2^{*2}$$

となることを示す。 従って

$$A_1^{*2} = (E^* - A_2^*)^2 = E^* - 2A_2^* + A_2^{*2}$$

$$= E^* - 2A_2^* + E^* - A_1^{*2} = 2A_1^* - A_1^{*2}$$

$$\therefore \quad A_1^{*2} = A_1^*. \quad \text{同様にして} \quad A_2^{*2} = A_2^*.$$

又 $$A_1^*A_2^* = A_1^*(E^* - A_1^*) = A_1^* - A_1^{*2} = 0$$

故にこの結果から

$$(P'A_iP)'(P'A_iP) = (P'A_iP)^2 = P'A_iP \qquad (i=1,2)$$

$$(P'A_1P)(P'A_2P) = 0$$

となること, 換言すれば (6) 及び $A_1A_2=0$ の成立することが分る。 此処で $A_2'=A_2$ だから $A_1A_2=0$ から (3) が成立することが分る。

定理 1 は二つ以上の成分に分ける場合に関するものに拡張出来る。

定　理　2.　　平方和 $y'A'Ay$ について

$$(8) \qquad A = A_1 + A_2 + A_3 + \cdots\cdots$$

とかけるとき，積和が0と云う関係をつかつて順次に平方和の形の k 個の成分に分割出来るものとする。　即ち

$$(9) \qquad A'A = (A_1 + A_2 + A_3 + \cdots)'(A_1 + A_2 + A_3 + \cdots)$$

$$= A_1'A_1 + (A_2 + A_3 + \cdots)'(A_2 + A_3 + \cdots\cdots)$$

$$= A_1'A_1 + A_2'A_2 + (A_3 + \cdots)'(A_3 + \cdots\cdots)$$

$$= A_1'A_1 + A_2'A_2 + A_3'A_3 + \cdots\cdots$$

このとき

$$(10) \qquad A_i' = A_i \qquad (i = 1, 2, 3, \cdots, k)$$

$$(11) \qquad A^2 = A'$$

ならば，成分たる平方和のうちのどの二つをとつてもそれは互に独立に分布し且つ

$$(12) \qquad A_i'^2 = A_i \qquad (i = 1, 2, 3, \cdots, k)$$

となる。

証　明.　　数学的帰納法に依る．$k = 2$ のときは定理1に他ならない．　$k = s$ のときに定理2が成立すると仮定する。$k = s + 1$ 　のときには先づ（9）の最初の二行と

$$C = A_2 + A_3 + \cdots\cdots + A_{s+1}$$

が対称であることを使えば定理1に依つて

$$(13) \qquad \begin{cases} A_1^2 = A_1, \qquad C^2 = C \\ A_1(A_2 + A_3 + \cdots) = (A_2 + A_3 + \cdots)A_1 = 0 \end{cases}$$

次に（9）の第二行以下を使えば

$$C'C = A_2'A_2 + (A_3 + \cdots)'(A_3 + \cdots)$$

$$= A_2'A_2 + A_3'A_3 + \cdots$$

となり，しかも $C'C = C' = C$ であるから帰納法の假定に依つて

$$(14) \quad \begin{cases} A_i^2 = A_i & (i = 2, 3, \cdots, s+1) \\ A_i A_j = 0 & (i =, j = 2, 3, \cdots, s+1 ; \ i \neq j) \end{cases}$$

又 (13) に依つて $A_1(A_2 + A_3 + \cdots) = 0$ だから

$$\begin{aligned} 0 &= A_1(A_2 + A_3 + \cdots)A_i & (i \geqq 2) \\ &= A_1 A_i^2 & ((14)\text{ に依る}) \\ &= A_1 A_i & (\quad \text{〃} \quad) \end{aligned}$$

即ち

$$(15) \qquad A_1 A_i = 0 \qquad (i = 2, 2, \cdots, s+1)$$

(13), (14), (15) は $k = s+1$ の場合に定理２が正しいことを示している。

注意 1. 上述の定理に於て対称性の條件を取除くことは出來ない。例えば

$$A_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

の場合については定理１は成立しない。

注意 2 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ を何らかの方法でいくつかの級に分類して番号をつけかえたものを

$$x_{11}, \cdots, x_{1n_1} ; x_{21}, \cdots, x_{2n_2} ; \cdots ; x_{m1}, \cdots, x_{mn_m} \quad \left(\sum_{i=1}^{m} n_i = n\right)$$

とする。級平均を $\bar{x}_i$ で表わすとき，例えば

$$\sum_i \sum_j (x_{ij} - \bar{x}_i)^2$$

の如き平方和の成分行列Aは一般に対称行列となる。
今

$$x_{ij} - \bar{x}_{i\cdot} = \sum_k \sum_l a_{ij,kl}\, x_{kl}$$

とすれば　　$A = (a_{ij,kl})$　であるが，

$$a_{ij,kl} = a^{(1)}_{ij,kl} + a^{(2)}_{ij,kl}\left(-\frac{1}{n_i}\right)$$

であつて二つの係数 $a^{(1)}, a^{(2)}$ は，番号の組 (i,j) と (k,l) とが或る分類に於て共通な級に属するかどうかに依つて 1 か 0 かの値をとる。　この様な (i,j) と (k,l) との間の関係は対称であるから当然

$$a_{ij,kl} = a_{kl,ij}$$

である。　この関係は多重分類の場合にも同様に成り立つ，　又ラテン方格法の様に，番号の組 (i,j) に更にいくつかの分類を重ねる場合でも同様である。

注　意　3.　単位形式の平方和 $\varphi'\varphi$ については (11) の條件は trivial である。

以上のことから，定理 2 は，分散分析の際に単位形式を積和が 0 と云う條件をつかつて順次に平方和の成分に分割するとき，普通に得られる平方和の成分は，一般にどの二つも互に独立に分布することを示している。

次に二つの平方和 $\varphi'A_1'A_1\varphi$ と $\varphi'A_2'A_2\varphi$ とが互に独立に分布するためには (3) が成立することが必要且つ十分であるが，(3) は又 A_1 と A_2 との行 vector の直交性 $A_1A_2' = 0$ と同等である。　即ち

定　理　3.　二つの平方和 $\varphi'A_1'A_1\varphi$ と $\varphi'A_2'A_2\varphi$ とが互に独立に分布するための必要且十分な條件は，二つの成分行列 A_1 及び A_2 の行ヴェクトルが互に直交すること，即ち

(16)　　$A_1A_2' = A_2A_1' = 0$

となることである。

証　明．　(3) ⟶ (16) は明らかである。　逆に(16)が成り立つならば，

$$(A_1A_2'A_2A_1')'(A_1A_2'A_2A_1') = A_1A_2'A_2\cdot A_1'A_1A_2'A_2\cdot A_1' = 0$$

従つて　$A_1A_2'A_2A_1' = (A_2A_1')'(A_2A_1') = 0$

故に

$$A_2A_1' = 0$$

列ヴエクトルの相互間の直交性については，この様なことは一般に云えないのであるが A_1+A_2 が直交行列なるときには列ヴエクトルの直交性は独立性と同等である。

定　理　4．　$T = A_1+A_2+\cdots\cdots+A_k$ が直行行列ならば次の二つの条件は同等である。

(17)　$A_iA_j' = 0$　$(i,j=1,2,\cdots\cdots,k;\quad i\neq j)$

(18)　$A_i'A_j = 0$　$(i,j=1,2,\cdots\cdots,k;\quad i\neq j)$

証　明　$k=3$ の場合について証明する。
先づ列ヴエクトルの直交性(18)を假定すると

$$T'T = E = (A_1+A_2+A_3)'(A_1+A_2+A_3)$$
$$= A_1'A_1 + (A_2+A_3)'(A_2+A_3)$$

であつて，$A_1'A_1$ が対称であるから直交変換 P を適当にとれば

$$E = P'A_1'A_1P + P'(A_2+A_3)'(A_2+A_3)P$$

(19)
$$P'A_1'A_1P = \left(\begin{array}{cc|c} \lambda_1 & 0 & \\ & \ddots & 0 \\ 0 & \lambda_r & \\ \hline & 0 & 0 \end{array}\right)$$

(20)
$$P'(A_2+A_3)'(A_2+A_3)P = \left(\begin{array}{cc|cc} \beta_1 & 0 & & \\ & \ddots & & 0 \\ 0 & \beta_r & & \\ \hline & & 1 & 0 \\ & 0 & & \ddots \\ & & 0 & 1 \end{array}\right)$$

となる。　此処で A_1P の列 vector を $b_{11}, b_{12}, \cdots, b_{1n}$ とすれば $(A_1P)'(A_1P)$ が上述の様な対角行列となることから，$b_{1j}=0 \ (j=r+1,\cdots,n)$ であつて $b_{11},\cdots,b_{1r}$ は互に直交し，しかも (19) に依つて $b_{1i}^2=\lambda_i>0 \ (i=1,2,\cdots,r)$ でなければならない。　従つてこれら r 個の vector は線型独立である。　又 $(A_2+A_3)P$ の列 vector を $b_{21}, b_{22}, \cdots, b_{2n}$ とするとき，例えば $\beta_1 \neq 0$ とすれば (20) に依れば $\beta_1=b_{21}^2\neq 0$，即ち $b_{21}\neq 0$ であつてしかも $b_{2i}b_{2j}=0 \ (i\neq j)$ である。

このことは $b_{21},\cdots,b_{2n}$ のうち少くとも $n-r_1+1$ 個が線型独立なることを示す。

しかも $P'A_1'\cdot(A_2+A_3)P=0$ であるから b_{1i} と b_{2j} とは互に直交する。　従つて $r_1+(n-r_1+1)=n+1$ 個の n 次元のヴェクトル

$$b_{11},\cdots\cdots,b_{1,r};\ b_{21},\ b_{2,r+1}\cdots\cdots,b_{2,n}.$$

が線型独立であることとなつて矛盾をひき起す。

従つて $\beta_1=0$，　同様に考えれば $\beta_i=0 \ (i=1,2,\cdots,r)$ となる。　故に

$$\left(\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline 0 & \begin{matrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{matrix}\end{array}\right)=\{(A_2+A_3)P\}'\{(A_2+A_3)P\}$$
$$=(A_2P)'(A_2P)+(A_3P)'(A_3P).$$

このことから，定理 1 の証明と同様にして

$$A_2P=(0\cdots 0\ \tau_{2,r+1}\cdots\tau_{2,n}),\quad A_3P=(0\cdots 0\ \tau_{3,r+1}\cdots\tau_{3,n}).$$

一方 (19) に依れば $A_1P=(b_{11}\cdots b_{1r}\,0\cdots 0)$ であるから $A_1P(A_2P)'=0$，$A_1P(A_3P)'=0$，　即ち

$$A_1A_2'=0\ ,\quad A_1A_3'=0\ .$$

A_1 の代りに A_2 をとつて考えれば同様にして

$$A_2A_1'=0\qquad A_2A_3'=0$$

となることが分る。　故に（18）→（17）

逆に（17）が成立つものとすれば，$A_i' = B_i$　$(i=1,2,3)$

$T' = S$　とおけば

$$S = B_1 + B_2 + B_3$$

であつて　$S'S = TT' = E$，　しかも　$B_i' B_j = A_i A_j' = 0$　$(i \neq j)$

故に上述の結果を用いれば　$B_i B_j' = A_i' A_j = 0$　$(i \neq j)$

故に（17）→（18）

注意 4　　一般に

$$\mathrm{rank}\ A = \mathrm{rank}\ A'A$$

であるから平方和　$y'A'Ay$　の自由度は成分行列 A の階級として定義することが出来る。

即ち，$y'A'Ay$　が χ^2 ― 分布に従うとき，その自由度は $A'A$ の階数，従つて成分行列 A の階数に等しい。

---

[1]　T. Ogasawara and M. Takahashi : Independence of quadratic quantities in a normal system. Jour. of science of the Hiroshima Univ., Ser. A, Vol. 15, NO. 1. (1950)

[2]　J. Ogawa : On the indendence of quadratic forms in a non-central normal system. Osaka Mathematical Journal, Vol. 2, No. 2. (1950)

On the independance of sums of squares.

by K. Endō

Let $\underline{x}$ denote the column vector with components $X_1, X_2, \cdots\cdots, X_n$. Where X'S are n independent random variables normally distributed with common variance σ^2.

Taking an approapriate linear transformation of $\underline{x}$ represented by a real matrix A of order n.n, any sum of squares may be written as the quadratic from $\underline{x}'A'A\underline{x}$.

Theorem 1. Assume that a sum of squares $\underline{x}'A'A\underline{x}$ may be broken up into two sums of squares, $\underline{x}'A_1'A_1\underline{x}$ and $\underline{x}'A_2'A_2\underline{x}$, by making use of relations $A = A_1 + A_2$ and $A_1'A_2 + A_2'A_1 = 0$ (the cross term is 0).

If $A_1' = A_1$, $A_2' = A_2$ and $A^2 = A$, then these two components $\underline{x}'A_1'A_1\underline{x}$ and $\underline{x}'A_2'A_2\underline{x}$ are mutually independent and $A_1^2 = A_1$, $A_2^2 = A_2$.

Theorem 2. Assume that a sum of squares $\underline{x}'A'A\underline{x}$ may be broken up successively into several sums of squares as follows:

$$A = A_1 + A_2 + A_3 + \cdots\cdots$$

$$\begin{aligned} A'A &= (A_1 + A_2 + A_3 + \cdots\cdots)'(A_1 + A_2 + A_3 + \cdots\cdots) \\ &= A_1'A_1 + (A_2 + A_3 + \cdots\cdots)'(A_1 + A_3 + \cdots\cdots) \\ &= A_1'A + A_2'A_2 + (A_3 + \cdots\cdots)'(A_3 + \cdots\cdots) \\ &= A_1'A_1 + A_2'A_2 + A_3'A_3 + \cdots\cdots \end{aligned}$$

If $A_i' = A_i$ $(i = 1, 2, \cdots)$ and $A^2 = A$, then any two of these sums of squares, $\gamma' A_i' A_i \gamma$ and $\gamma' A_j' A_j \gamma$ $(i \neq j)$ are mutually independent and $A_i^2 = A_i$ $(i = 1, 2, \cdots)$.

Theorem 3. A necessary and sufficient condition that two sums of squares $\gamma' A_1' A_1 \gamma$ and $\gamma' A_2' A_2 \gamma$ are mutually independent is $A_1 A_2' = 0$.

Theorem 4. If $T = A_1 + A_2 + \cdots + A_k$ is orthogonal, then the following two conditions (1) and (2) are equivalent.

$$(1) \quad A_i A_j' = 0 \qquad (i, j = 1, 2, \cdots, k;\ i \neq j)$$

$$(2) \quad A_i' A_j = 0 \qquad (i, j = 1, 2, \cdots, k;\ i \neq j)$$