(29) ASYMPTOTIC PROPERTIES OF MAXIMUM LIKELIHOOD ESTMATES IN THE CASE OF SEVERAL UNKNOWN PARAMETERS.

塩　谷　　實

1. 摘　要. *Maximum Likelihood Estimators* が一般に p 個の場合 $n \to \infty$ の時 *Consistent* であり *Asymptotically normal* であり更に *Joint asymptotically efficient*[1] であることは周知のことである。しかし *Consistent* であることの証明は *Unknown Parameters* が p 個である一般の時は見かけられない。本論文では *Dugue*[2] の証明した *Unknown Parameter* が 1 個の場合の拡張を述べる。しかしその証明は彼の証明の直接の拡張では得られなかつたのであるが尤度聯立方程式を行列表示し第 3 節 (17) で定義したベクトル系列 $\theta_1, \theta_2, \cdots$ を考へ $|\theta_\nu - \theta_0|, |\theta_1 - \theta_0|, |\theta_{\nu+1} - \theta_\nu|$ を評価する事に依つて目的を達したのである。
証明にあたついろいろ指導していただいた統計数理研究所第二部，鍋谷清治氏には厚く感謝の意を捧げるものである。

2. 記　號　$f(x_1, \cdots, x_k ; \theta_1, \cdots, \theta_p)$ で p 個の *unknown parameters* を含む k 変数の頻度函数を表し，此れを簡單に $f(x ; \theta_1, \cdots, \theta_p)$ と書く。又，

積分記号も簡単に $\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial}{\partial\theta_i}f(x;\theta_1,\cdots,\theta_p)\,dx_1\cdots dx_k$ を，$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial}{\partial\theta_i}f(x;\theta_1,\cdots,\theta_p)\,dx$ などと書く。

尤度函数を L で表はす。即ち $x_1,\cdots,x_n$ を独立として

$$L=f(x_1;\theta_1,\cdots,\theta_p)f(x_2;\theta_1,\cdots,\theta_p)\cdots f(x_n;\theta_1,\cdots,\theta_p).$$

任意の函数 $\varphi(x)$ に対し $f(x;\theta_1,\cdots,\theta_p)$ に関する平均値を $E[\varphi(x)]$ で表はす。即ち

$$E[\varphi(x)]=\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)f(x;\theta_1,\cdots,\theta_p)\,dx$$

である。

$P(S)$ で $\{x_{1\alpha},x_{2\alpha},\cdots,x_{k\alpha};\alpha=1,2,\cdots,n\}$ の同時確率函数を表はす事にする。即ち kn 次元の標本空間に於ける確率函数である。

更に本論文を通じて肉太のギリシヤ文字でベクトルを表はし肉太のローマ字の大文字でマトリックスを表はすことにする。例へば

$$\boldsymbol{\theta}=\begin{pmatrix}\theta_1\\ \theta_2\\ \vdots\\ \theta_p\end{pmatrix}\qquad \mathbf{B}=\begin{pmatrix}B_{11} & B_{12} & \cdots & B_{1p}\\ B_{21} & B_{22} & \cdots & B_{2p}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ B_{p1} & B_{p2} & \cdots & B_{pp}\end{pmatrix}$$

の様である。

3. 最尤推定子の一致性の証明

［定理］ A を p 次元の parameter space に於ける non-digenerate interval とし，parameter points の真の値 $\boldsymbol{\theta}_0=(\theta_{10},\cdots,\theta_{p0})$ は A の内点であるとする。更に次の三つの條件が充されておるものとする。

1. 殆んど総ての x に対して，

$$\frac{\partial}{\partial\theta_i}\log f(x;\theta_1,\cdots,\theta_p),\quad \frac{\partial^2}{\partial\theta_i\partial\theta_j}\log f(x;\theta_1,\cdots,\theta_p)$$

$$\frac{\partial^3}{\partial\theta_i\partial\theta_j\partial\theta_k}\log f(x;\theta_1,\cdots,\theta_p)$$

$$(\, i=1,2,\cdots,p,\quad j=1,2,\cdots,p,\quad k=1,2,\cdots,p\,)$$

が A に属するすべての θ に対して存在する。

2.) A に属する総ての θ に対して

$$\left|\frac{\partial}{\partial\theta_i}f(x;\theta_1,\cdots\theta_p)\right|<F(x),\quad \left|\frac{\partial^2}{\partial\theta_i\partial\theta_j}f(x;\theta_1,\cdots,\theta_p)\right|<G(x)$$

$$\left|\frac{\partial^3}{\partial\theta_i\partial\theta_j\partial\theta_k}f(x;\theta_1,\cdots,\theta_p)\right|<H(x)$$

なる $\theta_1,\cdots,\theta_p$ に無関係な函数 $F(x)$, $G(x)$ $H(x)$ が存在する。但し $F(x)$, $G(x)$ は $(-\infty,\infty)$ で積分可能であり且つ $H(x)$ は

$$\int_{-\infty}^{\infty}H(x)f(x;\theta_1,\cdots,\theta_p)\,dx<M$$

なる様な函数である。 茲に M は θ_i, $i=1,\cdots,p$ には無関係な常数である。

3. A に於ける総ての θ に対して

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{\partial}{\partial\theta_i}\log f(x;\theta_1,\cdots,\theta_p)\right]\left[\frac{\partial}{\partial\theta_j}\log f(x;\theta_1,\cdots,\theta_p)\right]f(x;\theta_1,\cdots,\theta_p)dx$$

$$=g_{ij}$$

は有限で，此等を要素として作られる行列 $\{g_{ij}\}=G$ は正値行列である。

以上の條件の下に尤度方程式

$$\frac{\partial}{\partial\theta_i}\log L=0\qquad i=1,2,\cdots,p$$

は $n \to \infty$ の時パラメーターの真の値 $\theta_0 = (\theta_{10}, \cdots, \theta_{p0})$ に確率収斂する解を持ち，且つその解は漸近的同時正規分布に従ひ，漸近的効率は 1 である。

定理の証明は尤度方程式の解が θ_0 に確率収斂することのみを示す。漸近的正規分布になること及び漸近的効率が 1 であることは最尤推定子の一致性がわかれば多次元の場合の Lindeberg-Lévy の定理によつて普通見られる如く証明される。茲では一致性のみを証明する。

［一致性の証明］ 假定1）に依り A に属する総ての θ に対して

$$(1)\quad \frac{\partial \log f}{\partial \theta_i} = \left(\frac{\partial \log f}{\partial \theta_i}\right)_0 + \sum_{j=1}^{p}(\theta_j - \theta_{j0})\left(\frac{\partial^2 \log f}{\partial \theta_i \partial \theta_j}\right)_0 + \frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{p}(\theta_j - \theta_{j0})\left(\frac{\partial^3 \log f}{\partial \theta_i \partial \theta_j \partial \theta_k}\right)_*$$

$$(i = 1, 2, \cdots\cdots, p)$$

と書くことが出来る。但し符号 $(\ )_0$ は真の Parameter Point $\theta_0 = (\theta_{10}, \cdots, \theta_{p0})$ に於ける値であり，$\left(\frac{\partial^3 \log f}{\partial \theta_i \partial \theta_j \partial \theta_k}\right)_*$ は θ と θ_0 の間の点 θ_* に於ける値である。θ_0 は A の内点であるから θ_* は矢張り A に属する。斯くして尤度方程式を次の様に書くことが出来る。

$$\frac{1}{n}\frac{\partial \log L}{\partial \theta_i} = \frac{1}{n}\sum_{\alpha=1}^{n}\left(\frac{\partial \log f_\alpha}{\partial \theta_i}\right) + \frac{1}{n}\sum_{\alpha=1}^{n}\left\{\sum_{j=1}^{p}(\theta_j - \theta_{j0})\left(\frac{\partial^2 \log f_\alpha}{\partial \theta_i \partial \theta_j}\right)_0\right\}$$

$$+ \frac{1}{2n}\sum_{\alpha=1}^{n}\left\{\sum_{k,l=1}^{n}(\theta_k - \theta_{k0})(\theta_l - \theta_{l0})\left(\frac{\partial^3 \log f_\alpha}{\partial \theta_i \partial \theta_k \partial \theta_l}\right)_*\right\}$$

$$= 0$$

$$(i = 1, 2, \cdots\cdots, p)$$

但し $f(x_\alpha; \theta_1, \cdots, \theta_p)$ を簡単に f_α と書いた。

$$\theta = \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \vdots \\ \theta_p \end{bmatrix} \qquad \theta_0 = \begin{bmatrix} \theta_{10} \\ \theta_{20} \\ \vdots \\ \theta_{p0} \end{bmatrix}$$

なる Vectors を考へれば條件 2) により

$$\sum_{k,l=1}^{p}(\theta_k-\theta_{k0})(\theta_l-\theta_{l0})\left(\frac{\partial^3\log f}{\partial\theta_i\partial\theta_k\partial\theta_l}\right)_{*} \leqq p^2|\theta-\theta_0|^2 H(x)$$

であるから $|\lambda_i|<1$ なる λ_i を用いて

$$(3)\quad \sum_{k,l=1}^{p}(\theta_k-\theta_{k0})(\theta_l-\theta_{l0})\left(\frac{\partial^3\log f_\alpha}{\partial\theta_i\partial\theta_k\partial\theta_l}\right)_{*} = \lambda_i p^2|\theta-\theta_0|^2 H(x)$$

と書く事が出来る。尤度方程式を行列を使って表はすために

$$(4)\quad \frac{1}{n}\sum_{\alpha=1}^{n}\left(\frac{\partial\log f_\alpha}{\partial\theta_i}\right)_0 = a_i, \quad \frac{1}{n}\sum_{\alpha=1}^{n}\left(\frac{\partial^2\log f_\alpha}{\partial\theta_i\partial\theta_j}\right)_0 = B_{ij}$$

$$\frac{1}{n}\sum_{\alpha=1}^{n}H(x_\alpha) = C$$

とおき

$$a=\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_p \end{bmatrix}, \quad \lambda=\begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_p \end{bmatrix}, \quad B=\begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & \cdots & B_{1p} \\ B_{21} & B_{22} & \cdots & B_{2p} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ B_{p1} & B_{p2} & \cdots & B_{pp} \end{bmatrix},$$

$$r^2(\theta) = |\theta-\theta_0|^2$$

を定義すれば尤度方程式 (2) は次の様に書ける。

$$(5)\quad a + B(\theta-\theta_0) + \frac{1}{2}p^2 C r^2(\theta)\lambda = 0$$

扨て條件 1), 2) により A に属する總ての θ に對して

$$(6)\quad \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial f}{\partial\theta_i}dx = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial^2 f}{\partial\theta_i\partial\theta_j}dx = 0 \qquad (i,j=1,2,\cdots,p)$$

が成立するから

$$(7)\quad E\left(\frac{\partial\log f}{\partial\theta_i}\right)_0 = \int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\partial f}{\partial\theta_i}\right)dx = 0 \qquad (i=1,2,\cdots,p)$$

$$E\left(\frac{\partial^2\log f}{\partial\theta_i\partial\theta_j}\right)_0 = \int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{f}\frac{\partial^2 f}{\partial\theta_i\partial\theta_j} - \frac{1}{f^2}\frac{\partial f}{\partial\theta_i}\frac{\partial f}{\partial\theta_j}\right)_0 f_0\,dx$$

(8)
$$= -\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\partial \log f}{\partial \theta_i}\right)_0\left(\frac{\partial \log f}{\partial \theta_j}\right)_0 f_0\,dx$$
$$= -g_{0ij}$$

を得る。但し f_0 は $f(x;\theta_{10},\cdots\cdots,\theta_{p0})$ を簡単に表はしたものであり，g_{0ij} は parameter が θ_0 である時の g_{ij} の値である。
斯くして (4) に依り a_i は平均 0 を持つて同じ分布に従う n 個の独立な確率変数の算術平均である。依つて Khintchine の定理により a_i は 0 に確率収斂する。同じ理由で B_{ij} は $-g_{0ij}$ に確率収斂する。一方 C は $EH(x)<M$ なる non-negative な値に確率収斂する。故に任意の正数 ε を取つて

(9) $$|a_i| < \varepsilon \qquad (i=1,2,\cdots\cdots,p)$$

を充す sample space に於ける集合を S_i で表はし

$$S = \prod_{i=1}^{p} S_i$$

とする。しかる時は

(10) $$\lim_{n\to\infty} P[S] = 1$$

を得る。同様に ε に対し

(11) $$|B_{ij} + g_{0ij}| < \varepsilon \qquad (i,j=1,2,\cdots\cdots,p)$$

を充す總ての sample points の集合を R_{ij} で表はし

$$R = \prod_{(i<j)} R_{ij}$$

とすれば

(12) $$\lim_{n\to\infty} P[R] = 1$$

を得る。更に

(13) $$C < 2M$$

を充す集合を U で表はせば

(14) $$\lim_{n\to\infty} P[U] = 1$$
を得る。そこで S, R, U の積集合を W で表はせば (10), (12), (14) により

(15) $$\lim_{n\to\infty} P[W] = 1$$
が成立する。即ち任意に定めた正数 ε, α に対して $n_0(\varepsilon, \alpha)$ が定まり $n_0 < n$ なるすべて n に対して $1-\alpha$ より大きな確率をもつて (9), (11), (13) がすべての i, j に就いて成立してある。そこで以後此の様な充分大きな n に就いて考へる。依つてこれより述べる結果は，W に属する $(x_1, \cdots, x_n)$ に対して，$1-\alpha$ より大きな確率で成立する。

扨て，W に於ては，ε を充分小さく取れば (11) 及び条件 3) より対象行列 $\boldsymbol{B}$ を $1-\alpha$ より大きな確率で正値行列として差支へない。しかる時 B^{-1} が存在し (5) より

(16) $$\theta = \theta_0 - B^{-1}a - \frac{1}{2}p^2 C r^2(\theta) B^{-1}\lambda$$
を得る。結で Vectors の系列 $\{\theta_\nu\}$ を次の様に定義する。

(17) $$\theta_\nu = \theta_0 - B^{-1}a - \frac{1}{2}p^2 C r^2(\theta_{\nu-1}) B^{-1}\lambda_{\nu-1}$$
そして $\theta_1, \theta_2, \cdots\cdots$ が一定の極限に行くことを示さう。此の時此の一定の極限は明らかに (16) の解である。
此の為 $|\theta_1 - \theta_0|$, $|\theta_\nu - \theta_0|$, $|\theta_{\nu+1} - \theta_\nu|$ を評価する。(17) より

$$\theta_1 - \theta_0 = -B^{-1}a$$

を得る。i 成分を考へれば

$$\theta_{i1} - \theta_{i0} = -\frac{1}{B}\{B^{i1}a_1 + \cdots\cdots + B^{ip}a_p\}$$

但し B は $\boldsymbol{B}$ の行列式で B^{ij} は B_{ij} の余因子である。しかる時は g_{0ij} が有限であるから (11) より $\left|\frac{B^{ij}}{B}\right|$ は有限で且つ (9) より $|a_i| < \varepsilon$ であるから $|\theta_{i1} - \theta_{i0}|$ は有界である。従つて

(18) $$|\Theta_1-\Theta_0|<K_1\varepsilon$$
と書くことが出来る。 K_1 は $\varepsilon, n, i, j, \nu$ には無関係な常数である。

次に $|\Theta_\nu-\Theta_0|$ に就いて考へて見よう。 (17)より

$$\Theta_\nu-\Theta_0=-B^{-1}a-\tfrac{1}{2}p^2c\,r^2(\Theta_{\nu-1})B^{-1}\lambda_{\nu-1}$$

であるが(18)を得た時と同様に成分に就いて考察すれば (9), (11), (13)より

$$|\Theta_\nu-\Theta_0|<K_1\varepsilon+K_2|\Theta_{\nu-1}-\Theta_0|^2$$
$$\leqq K_3\{\varepsilon+|\Theta_{\nu-1}-\Theta_0|^2\}$$

を得る。但し K_3 は K_1, K_2 の大きい方を表はす。
且つ K_1, K_2, K_3 は何れも $\varepsilon, n, \nu, i, j$ に無関係な常数である。
今次の様な x を求める。

$$K_3\{\varepsilon+|\Theta_{\nu-1}-\Theta_0|^2\}\leqq K_3(\varepsilon+x^2)=x$$

$$x=\frac{2K_3\varepsilon}{1\mp\sqrt{1-4K_3^2\varepsilon}}$$

此の x の二つの値のうち小さい方を採用すると

$$x_0=\frac{2K_3\varepsilon}{1+\sqrt{1-4K_3^2\varepsilon}}$$

故に此れより

$$K_3\varepsilon<x_0<2K_3\varepsilon$$

しかる時總ての ν に対して

(19) $$|\Theta_\nu-\Theta_0|<2K_3\varepsilon$$

を得る。此れより ε を充分小さく取つておけば Θ_ν, $(\nu=1,2,\cdots)$ は皆区間 A に属することになる。

次に $|\Theta_{\nu+1}-\Theta_\nu|$ を評価しよう。 (17)より

$$\Theta_{\nu+1}-\Theta_\nu=-\tfrac{1}{2}p^2c\,B^{-1}\{r^2(\Theta_\nu)\lambda_\nu-r^2(\Theta_{\nu-1})\lambda_{\nu-1}\}$$

を得る。

矢張り $\theta_{i\nu}$ に就いて考察する。

$$\theta_{i\nu+1}-\theta_{i\nu}=-\frac{1}{2}p^2c\,\frac{1}{B}\Big[B^{i1}\left\{r^2(\theta_\nu)\lambda_{1\nu}-r^2(\theta_{\nu-1})\lambda_{1\nu-1}\right\}+\cdots$$
$$\cdots+B^{ip}\left\{r^2(\theta_\nu)\lambda_{p\nu}-r^2(\theta_{\nu-1})\lambda_{p\nu-1}\right\}\Big]$$

$\dfrac{B^{ij}}{B}$ の絶対値の最大のものを K_0 で表はせば

(20)
$$|\theta_{i\nu+1}-\theta_{i\nu}|\leq K_0\frac{1}{2}p^2c\,\Big\{|r^2(\theta_\nu)\lambda_{1\nu}-r^2(\theta_{\nu-1})\lambda_{1\nu-1}|+\cdots$$
$$\cdots+|r^2(\theta_\nu)\lambda_{p\nu}-r^2(\theta_{\nu-1})\lambda_{p\nu-1}|\Big\}$$

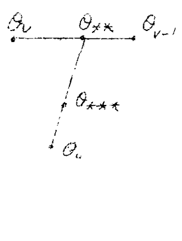
所で (2), (3), (4) より

(21)
$$\frac{1}{2}p^2c\left\{r^2(\theta_\nu)\lambda_{i\nu}-r^2(\theta_{\nu-1})\lambda_{i\nu-1}\right\}$$
$$=\frac{1}{2n}\sum_{\alpha=1}^{n}\left\{\sum_{k,l=1}^{p}(\theta_{k\nu}-\theta_{k0})(\theta_{l\nu}-\theta_{l0})\left(\frac{\partial^3\log f_\alpha}{\partial\theta_i\partial\theta_k\partial\theta_l}\right)_{*\nu}\right\}-\frac{1}{2n}\sum_{\alpha=1}^{n}\left\{\sum_{k,l=1}^{p}(\theta_{k\nu-1}-\theta_{k0})\right.$$
$$\left.\times(\theta_{l\nu-1}-\theta_{l0})\left(\frac{\partial^3\log f_\alpha}{\partial\theta_i\partial\theta_k\partial\theta_l}\right)_{*\nu-1}\right\}$$

$$=\left\{\left[\frac{1}{n}\frac{\partial\log L}{\partial\theta_i}\right]_\nu-\left[\frac{1}{n}\frac{\partial\log L}{\partial\theta_i}\right]_{\nu-1}\right\}-\frac{1}{n}\sum_{\alpha=1}^{n}\left\{\sum_{j=1}^{p}(\theta_{j\nu}-\theta_{j\nu-1})\left(\frac{\partial^2\log f_\alpha}{\partial\theta_i\partial\theta_j}\right)_0\right\}$$

(19) より θ_ν, $\theta_{\nu-1}$ は A に属する *parameter point* に対応するベクトルであるから條件 1) より平均値の定理が使へて

(22)
$$\left[\frac{1}{n}\frac{\partial\log L}{\partial\theta_i}\right]_\nu-\left[\frac{1}{n}\frac{\partial\log L}{\partial\theta_i}\right]_{\nu-1}=\sum_{j=1}^{p}(\theta_{j\nu}-\theta_{j\nu-1})\frac{1}{n}\left(\frac{\partial^2\log L}{\partial\theta_i\partial\theta_j}\right)_{**}$$



$$\left(\frac{\partial^2\log L}{\partial\theta_i\partial\theta_j}\right)_{**}=\left(\frac{\partial^2\log L}{\partial\theta_i\partial\theta_j}\right)+\sum_{k=0}^{p}(\theta_{k**}-\theta_{k0})\left(\frac{\partial^3\log L}{\partial\theta_i\partial\theta_j\partial\theta_k}\right)_{***}$$

を得る。

θ_{**} は θ_ν, $\theta_{\nu-1}$ の中間の点であり θ_{***} は θ_{**} と θ_0 の中間の点である。

従って $(\quad)_{**}$, $(\quad)_{***}$ は夫々 θ_{**}, θ_{***} に於ける値である。 すると (22) を (21) に代入して

$$\frac{1}{2}p^2c\left\{r^2(\theta_\nu)\lambda_{i\nu}-r^2(\theta_{\nu-1})\lambda_{i\nu-1}\right\}$$

$$=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{p}(\theta_{j\nu}-\theta_{j\nu-1})\left\{\left(\frac{\partial^2\log L}{\partial\theta_i\partial\theta_j}\right)_0+\sum_{k=0}^{p}(\theta_{k**}-\theta_{k0})\left(\frac{\partial^3\log L}{\partial\theta_i\partial\theta_j\partial\theta_k}\right)_{***}\right\}$$

$$-\frac{1}{n}\sum_{\alpha=1}^{n}\left\{\sum_{j=1}^{p}(\theta_{j\nu}-\theta_{j\nu-1})\left(\frac{\partial^2\log f}{\partial\theta_i\partial\theta_j}\right)_0\right\}$$

$$=\frac{1}{n}\sum_{j,k=1}^{p}(\theta_{j\nu}-\theta_{j\nu-1})(\theta_{k**}-\theta_{k0})\left(\frac{\partial^3\log L}{\partial\theta_i\partial\theta_j\partial\theta_k}\right)$$

故に (19), (2), (3) 及び条件 2) により

$$\frac{1}{2}p^2c\left|r^2(\theta_\nu)\lambda_{i\nu}-r^2(\theta_{\nu-1})\lambda_{i\nu-1}\right|$$

$$\leqq 2Mp^2|\theta_\nu-\theta_{\nu-1}||\theta_{**}-\theta_0|$$

$$\leqq 2Mp^2|\theta_\nu-\theta_{\nu-1}||\theta_\nu-\theta_0|$$

$$\leqq 4Mp^2K_3\varepsilon|\theta_\nu-\theta_{\nu-1}|$$

故に (20) より

$$|\theta_{i\nu+1}-\theta_{i\nu}|\leq 4Mp^3K_0K_3\varepsilon|\theta_\nu-\theta_{\nu-1}|$$

従って

$$|\theta_{\nu+1}-\theta_\nu|\leq K_4\varepsilon|\theta_\nu-\theta_{\nu-1}|$$

(23)

$$\leq K_1\varepsilon\cdot(K_4\varepsilon)^\nu$$

茲に K_4 は $n, \nu, i, j, \varepsilon$ には無関係な常数である。

以上の如くして任意に定めた正数 ε, δ 、に対して定まる

$n_0(\varepsilon, \delta, \alpha)$ よりも大なる總ての n に對してベクトル系列 θ_1, θ_2, ----- は一定の極限

$$(24) \qquad \theta = \theta_0 + (\theta_1 - \theta_0) + (\theta_2 - \theta_1) + \cdots\cdots$$

に行くことが証明出來た。

扨て上に証明したことは總て (9), (11), (13) が成立して居るといふ假定の下に行はれた。

しかるに此等の関係は $n_0 < n$ なる限り $1-\alpha$ 以上の確率で成立して居る。よって θ_1, θ_2, ---- は $1-\alpha$ 以上の確率で一定の極限 θ に行くことになる。

此の θ は先に注意した如く尤度方程式 (16) の解であるが此れが $n \to \infty$ の時確率 1 で θ_0 に收斂することは (23) より容易に分る。即ち

$$|\theta - \theta_0| \leqq |\theta_1 - \theta_0| + |\theta_2 - \theta_1| + \cdots\cdots$$

$$\leqq K_1\varepsilon\{1 + K_4\varepsilon + (K_4\varepsilon)^2 + \cdots\} = \frac{K_1\varepsilon}{1 - K_4\varepsilon}$$

任意の正数 ε, α に対して $n_0 < n$ なる限り上の不等式の成立する確率が $1-\alpha$ より大きいからである。

斯くして最尤推定子が p 個の場合にその Consistency を証明することが出來た。

更に各々の解は確率 1 で唯一つであることが示される。

実際 θ' を θ_0 に確率收斂する尤度方程式の他の解であるとする。しかる時充分大きな n に対しては (16) より

$$\theta' - \theta = \frac{1}{2} p^2 c \{ |\theta - \theta_0|^2 \lambda - |\theta' - \theta_0|^2 \lambda' \} B^{-1}$$

を得る。しかるに任意に定めた正数 ε, α に対して $n_1(\varepsilon, \alpha)$ が定まり $n_1 < n$ なるすべての n に対して

$$P\{|\Theta-\Theta_0|^2<\varepsilon\}>1-\alpha$$

$$P\{|\Theta'-\Theta_0|^2<\varepsilon\}>1-\alpha$$

が成立しており且つ

$$|\Theta'-\Theta|\leq K_5''\{|\Theta-\Theta_0|^2+|\Theta'-\Theta_0|^2\}$$

も $1-\alpha$ 以上の確率で成立して居るから $n\to\infty$ の確率1で $\Theta'\fallingdotseq\Theta$ なることが言へるのである。

参考文献

1). Joint Asymptotically efficient であるといふのは Cramér, H. "Mathematical Methods of Statistics, Princeton University Press. PP. 489–497" を参照

2) Dugué, D., "Application des propriétés de la limite au sens du calcul des probabilites à l'etude de de diverses questions d'estimation."
Journ. de l'Éc. Polytechn 1937, P.305.