$$2^6 \equiv -2 \equiv 9 \ (11)$$

$$2^7 \equiv -4 \equiv 7 \ (11) \qquad 2^8 \equiv -8 \equiv 3 \ (11) \qquad 2^9 \equiv -5 \equiv 6 \ (11)$$

我々は m が素数のとき $m-1$ ヶの直交ラテン方格系を構成し得る事を知ったのであるが，m が素数の巾のときもやはり $m-1$ の直交ラテン方格が得られる，

しかしてグレコラテンの場合 m が奇数であれば次の定理によって解決される。

定理 II　　m が奇数であるとき

$$L_1 = \begin{array}{ccc} 0 & 1 \cdots\cdots & m-1 \\ 1 & 1+1 & m-1+1 \\ 2 & 1+2 & m-1+2 \\ \vdots & & \\ m-1, & 1+(m-1) & m-1+m-1 \end{array} \qquad L_2 = \begin{array}{ccc} 0 & 1 & m-1 \\ 2 & 1+2 & m-1+2 \\ 2.2 & 1+2.2 & m-1+2.2 \\ \vdots & & \\ 2(m-1) & 1+2(m-1) \cdots & m+2(m-1) \end{array}$$

は直交する。

この証明は定理 1 と類似してある。こゝで 2 と m は互ひに素であるとゆう事実を用ひる事を注意しておく。

次に我々は $a \not\equiv 0 \ (p)$ なるすべての剰余 a に対して $aa^{-1} \equiv 1 \ (p)$ なる剰余が存在する事を証明しよう。

証　明．　数列　$a, a^2, \cdots\cdots, a^n, \cdots\cdots$

を作れば剰余の数は有限であるから

$$a^i \equiv a^j \ (p) \qquad i > j$$

なる i, j が存在する。a は p と互ひに素であるから両辺を a^j で割って $i-j=d$ とおけば

$$a^{i-j} = a^d \equiv 1 \quad (p)$$

よって $a^{-1} = a^{d-1}$ とおけば，問題は解決された事になる。

かくて法 p についての剰余形はもし 0 をも含めるならば，加法に関しても乗法に関しても，結合法則として次の規準が満足される事が分る。

（Ｉ）　元素の任意の対　A, Bに対して積　$A \cdot B$　が，次の様にして定義される。　A, B, Cを任意の三つの元素とするとき，

$$A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) C \qquad (\text{結合律})$$

〃乗法〃とは例へば剰余類に於ける加法や乗法の様に結合の一種である。

（２）　$A \cdot I = I \cdot A = A$

である様な単位元と呼ばれる元Iが存在する。

（３）　この系に於けるすべての元Aに対して

$$A A^{-1} = A^{-1} A = 1$$

である様な逆元と呼ばれるA^{-1}が存在する。

結合方法として剰余類に於ける加法を考へるならば単位元は０に相当し，逆元は$-a$に相当する。　又結合方法として普通の乗法をとるならば，単位元は1，元aの逆元はa^{-1}となる。

（１）（２）（３）を満足する集合を群と名付ける。

$A \cdot B = B \cdot A$　であると云ふ基準は通常設けないが，もし之が成立つならば，可換群又はアーベル群と名付ける。　群はその生成する元で定義することが出来る。　例へば　$P^2 = 1$　$Q^3 = 1$，　$PQ = Q^2 P$　なる関係があるとき，P, Q　で群を生成する事が出来る。　即ち群Gの元は　$1, P, Q$　PQ, PQ^2, Q^2　であらはされる。

群の乗法に関する規則は次の表に書く事が出来る。

1	P	Q	PQ	PQ^2	Q^2
P	1	PQ	Q	Q^2	PQ^2
Q	PQ^2	Q^2	P	PQ	1
PQ	Q^2	PQ^2	1	Q	P
PQ^2	Q	P	Q^2	1	PQ
Q^2	PQ	1	PQ^2	P	Q

視察により記号的に見るならば，この群の乗法表はラテン方格をなしてゐる事に気がつくであらう。　例へば　$P = 2, Q = 3$　とおけば上の表から

1	2	3	4	5	6
2	1	4	3	6	5
3	5	6	2	4	1
4	6	5	1	3	2
5	3	2	6	1	4
6	4	1	5	2	3

が得られる。

我々はこの事実が一般に正しい事を証明しよう。

群Gは m ヶの元 $A_1, \cdots\cdots, A_m$ から構成されてゐるとする。この群の乗法表を書き下せば

$$\begin{array}{ccc} A_1 & A_2 \cdots\cdots\cdots\cdots & A_m \\ A_2 & A_2A_2 & A_2A_m \\ \vdots & & \vdots \\ A_m & A_mA_2 \cdots\cdots\cdots & A_mA_m \end{array}$$

これがラテン方格でないと假定する。しからばある行か又は或る列に同じものが二つ含まれてゐる。即ち

$$A_jA_i = A_jA_k \qquad (i \neq k)$$

か

$$A_jA_i = A_kA_i \qquad (j \neq k)$$

かいづれか一方が成立つ。

最初の等式の両辺に左側から A_j^{-1} を掛ければ

$$A_i = A_k$$

よつて $i = k$ となる。同様に第二の場合は $j = k$ がなりたち、我々の假定に反する。

二つの群 G, $\overline{G}$ に於て G から $\overline{G}$ へ写す写像が乗法を保有するならば、G と $\overline{G}$ は準同型であると云ふ。

もし $G = G$ の場合，自己準同型であると云ふ。
例へば，m を法とする剰余系は加法を結合を法とする群をなすが，j をその任意の剰余とするとき写像 $\bar{a} = ja$ は自己準同型である。
何となれば

$$a + b \equiv c \quad (m)$$

ならば

$$aj + bj = cj \quad (m)$$

或る自己準同型は G の元の間の1対1対応を確立する。
例へば，上の例に於て j が m と互ひに素であるならば，この対応は，一対一である。何となればもしも

$$aj \equiv bj \quad (m)$$

ならば，j は m と互ひに素であるから

$$a \equiv b \quad (m)$$

となるからである。我々はこれから一対一対応をなす自己同型を考へよう。
S をこの様な自己同型とし A^S を A がこの自己同型 S によつて写像されたものとする。

更に $(A^S)^S = A^{S^2}$ $\quad (A^{S^2})^S = A^{S^3}$ $\quad A^{S^0} = A$ とおく。そして我々は次の定理を証明しよう。

定　理．S を写像 $S^1, \cdots\cdots S^q$ によつて，単位元を除いた任意の元をそれ以外の元へ写す，自己同型とするならば，ラテン方格

$$L_i = \begin{matrix} 1 & A_2 & \cdots\cdots & A_m \\ A_2^{S^i} & A_2^{S^i}A_2 & \cdots\cdots & A_2^{S^i}A_m \\ \vdots & & & \vdots \\ A_m^{S^i} & A_m^{S^i}A_2 & \cdots\cdots & A_m^{S^i}A_m \end{matrix} \qquad (i = 0, 1, \cdots\cdots, q)$$

は直交する。

証　明　　これがラテン方格である事は明らかである。
今 L_i は L_j に直交しないと假定する。しからば或る例へば k 行 l 列と r 行 s 列で元素の対が同じである。即ち

$$(1) \qquad A_k^{s^i} A_l = A_r^{s^i} A_s$$

$$(2) \qquad A_k^{s^j} A_l = A_r^{s^j} A_s$$

（2）の逆元をとれば

$$(3) \qquad A_l^{-1} A_k^{-s^j} = A_s^{-1} A_r^{-s^j}$$

（1）と（3）を掛け合せれば

$$A_k^{s^i} A_k^{-s^j} = A_r^{s^i} A_r^{-s^j}$$

両辺に左右から夫々 $A_r^{-s^i}$, $A_k^{s^j}$ を掛ければ

$$A_r^{-s^i} A_k^{s^i} = A_r^{-s^j} A_k^{s^j}$$

s^i と s^j は自己同型写像であるから

$$(A_r^{-1} A_k)^{s^i} = (A_r^{-1} A_k)^{s^j}$$

今 $i > j$ と假定すれば

$$\left[(A_r^{-1} A_k)^{s^j} \right]^{s^{i-j}} = (A_r^{-1} A_k)^{s^j}$$

$i \leq g$, $j \leq g$ であるから $i-j \leqq g$
s^{i-j} は単位元以外の元のみを異つた元に写像させると云ふ假定によつて

$$(A_r^{-1} A_k)^{s^j} = 1$$

よつて

$$A_r^{-1} A_k = 1$$

即ち

$$A_r = A_k$$

同様に

$$A_l = A_s$$

が導き出せる。故に $r = k$, $l = s$ となる。

即ち，矛盾を生じ，定理が証明された事になる。

よつて，我々はもし群 G と，その単位元以外の元を，それ自身に写さない自己同型写像 $S, S^2, \cdots\cdots S^q$ が求められるならば，$q+1$ 個の直交ラテン方格系を作る事が出来る。もし $q = m-2$ とおくならば

$$L_i = \begin{array}{lllll} 1 & A_2 & A_2^S & \cdots\cdots & A_2^{S^q} \\ A_2^{S^i} & A_2^{S^i} A_2 & A_2^{S^i} A_2^S & & A_2^{S^i} A_2^{S^q} \\ \vdots & & & & \vdots \\ A_2^{S^{q+i}} & \cdots\cdots & \cdots & \cdots & A_2^{S^{q+i}} A_2^{S^q} \end{array}$$

と書ける。L_{i+1} の $(k-1)$ 行は L_i の k 行に等しい。そして，すべての方格は L_0 から行についての循環置換によつて求める事が出来る。

さて我々は次の関係によつて定義された素数巾 p^n の可換群を考へよう。

$$P_1^p = P_2^p = \cdots\cdots = P_n^p = 1$$

群 G の元素は次の形をとる。

$$P_1^{e_1} \cdots\cdots P_n^{e_n} \quad (e_1, \cdots\cdots, e_n = 0, 1, \cdots\cdots, p-1)$$

$P_1, \cdots\cdots, P_n$ を G の底と名附ける。しかしてこの底を容易に変換する事が出来る。

例へば，$P_1, \cdots\cdots, P_n$ が一つの底であるならば，$P_1, P_1P_2, \cdots P_1P_n$ も又底である。何となれば G は可換であるから

$$P_1^{e_1} \cdots P_n^{e_n} = P^{e_1-e_2-\cdots\cdots-e_n} (P_1P_2)^{e_2} \cdots\cdots (P_1P_n)^{e_n}$$

と書き直せるからである。

かゝる底の変換は G の自己同型を同時に定義する。 何となれば，
$P_1' \cdots\cdots P_n'$ を新しい底とすれば

$$P_1^{e_1}\cdots\cdots P_n^{e_n} \quad を$$

$$P_1'^{e_1}\cdots\cdots P_n'^{e_n}$$

に写像すれば自己同型になるからである。

又，逆に自己同型によって底を写像した新しい元素を知る事が出来るならば，自己同型はこれによって決定される。

よって我々は P が素数であれば常に次数 P^n の P^n-1 ヶの直交ラテン方格系を構成することが出来る。 我々はそれらの自己同型を位数 8, 9, 16, 25, 27, ･･･ の群について与へるであらう。

例として次数 8 の 7 ヶの直交ラテン方格系を構成してみよう。
P, Q, R,（但し $P^2=Q^2=R^2=1$）から生成される群 G を用ひる。

$$P^S=Q,\qquad Q^S=R\qquad R^S=PQ$$

なる自己同型を用ひれば

$$P^S=Q\qquad P^{S^2}=R\qquad P^{S^3}=PQ\qquad P^{S^4}=P^SQ^S=QR$$

$$P^{S^5}=Q^SR^S=PQR\qquad P^{S^6}=R^SQ^SR^S=QRPQ=PR$$

$$P^{S^7}=P^SR^S=QPQ=P$$

元素を I, P, P^S, ---- P^{S^6} の順に書き並べるならば我々は次の乗法表を得る

I	P	Q	R	PQ	QR	PQR	PR
P	I	PQ	PR	Q	PQR	QR	R
Q	PQ	I	QR	P	R	PR	PQR
R	PR	QR	I	PQR	Q	PQ	P
PQ	Q	P	PQR	I	PR	R	QR
QR	PQR	R	Q	PR	I	P	PQ
PQR	QR	PR	PQ	R	P	I	Q
PR	R	PQR	P	QR	PQ	Q	I

他の方格は之の循環置換によって得られる。

今 P の代りに 122, Q の代りに 123 ----- とおけば

1	2	3	4	5	6	7	8
2	1	5	8	3	7	6	4
3	5	1	6	2	4	8	7
4	8	6	1	7	3	5	2
5	3	2	7	1	8	4	6
6	7	4	3	8	1	4	5
7	6	8	5	4	2	1	3
8	4	7	2	6	5	3	1

1	2	3	4	5	6	7	8
3	5	1	6	2	4	8	7
4	8	6	1	7	3	5	2
5	3	2	7	1	8	4	6
6	7	4	3	8	1	2	5
7	6	8	5	4	2	1	3
8	4	7	2	6	5	3	1
2	1	5	8	3	7	6	4

....

等が得られる。

位数 9 の群については $P^3 = Q^3 = 1$ なる関係をもつ底 P, Q によって生成される。

$$P^S = Q, \qquad Q^S = PQ$$

なる自己同型は $S, S^2, \cdots\cdots S^7$ が単位元を除いて，それ自身の元に写像しない性質をもつ位数 16 の群については $P^2 = Q^2 = R^2 = T^2 = 1$ なる関係にある P, Q, R, S を底とし，自己同型 S を $P^S = Q$, $Q^S = R$, $R^S = T$, $T^S = PT$ で定義すればよい。

位数 25 の群については，$P^5 = Q^5 = 1$ なる関係にある P, Q を底とし，自己同型 S を $P^S = Q$ $Q^S = P^3Q$ とすればよい。

位数 27 の群については，$P^3 = Q^3 = R^3 = 1$ なる関係をもつ P, Q, R, を底とする群について。求むる自己同型を $P^S = Q$, $Q^S = R$ $R^S = P^2Q$ で與へればよい。

一般に

［ 定 理 III ］

$m = p^n$ とし，$P_1^p = P_2^p = \cdots\cdots\cdots = P_n^p = 1$

なる関係をもつ $P_1, P_2, \cdots\cdots, P_n$ で生成される可換群を G とする。

S を $P^{S^i} \neq P$ $(0 < i \leqq m-2)$ $P \neq 1$ なる自己同型写像とする。しからばラテン方格

$$
\begin{array}{cccc}
1 & P & P^{s} \;\text{----------} & P^{s^{m-2}} \\
P^{s^{i}} & P^{s^{i}}P & & P^{s^{i}}P^{s^{m-2}} \\
\vdots & & & \\
P^{s^{m-2+i}} & P^{s^{m-2+i}}P & \text{----------} & P^{s^{m-2+i}}P^{s^{m-2}}
\end{array}
\qquad (i = 0, 1, \cdots, m-2)
$$

は直交系である。 L_i は又 L_{i-1} からその最後の $m-1$ 行の循環置換によつても得られる。

一般的な問題は次の様にして形式化される事が出来る。

mを與へられた数とするとき，m 次の直交ラテン方格系の可能な最大の数は何であらうか？　この数は $m-1$ より大きくない事は明らかであらう。　何となればこの方格系のすべての方格を，直交性を失うことなしに第一行がすべて $1, 2, \text{------}, m$ である様にして差支へない。

しからば 2 行 1 列にくる数字は，1 と異なつたものでなければならない。　即ち，$2, 3, \text{-----} m$ のいづれかでなければならない。かゝるものは大くとも $m-1$ ヶである。

我々は m が素数巾である時群論を用ひる事によい問題は解かれてゐる事を知つた。　しからざる場合については殆んど知られてゐない。

Tarry (Comptes Rendu de l'Association Francaise pour l'Advancement de Science Naturel, 1900) は6次のグレコラテン方格が存在しない事を証明した。　しかして 4^{n+2} 次のグレコ－ラテン方格は存在しない事は予測されてゐるけれど，いまだ證明されてゐない。　しかしながら我々は次の事を示さう。

$m = p_1^{e_1} \text{-} \text{----} . p_n^{e_n}$ なる如く素数巾分解をし，$r = Min. p_i^{e_i} - 1$ とおけば，位数 m の可換群を用ひて，r ヶの直交ラテン方格系を構成する事が出来る。

位数 m の群 G として e_1 ヶの位数 p_1 の元，e_2 ヶの位数 p_2 の元，---------，e_n ヶの位数 p_n の元より生成されるものを考へる。

そして位数 p_i の e_i ヶの元で生成される部分群に於ける自己同型 T_i を次の様にきめる。　$T_i, T_i^2, \text{-----}, T_i^{p_i^{e_i}-2}$ なる写像によつていかなるこの部分群の元素をも（單位元を除いて）不変させないものとす。

さて $\bar{T}_i$ を群 G において，位数 p_i に属する元素は T_i と同じ写像をしその他残りの元素は不変にする様な自己同型写像とする。
そして

$$T = \bar{T}_1 \bar{T}_2 \cdots\cdots \bar{T}_n$$

とおけば，T, T^2, $\cdots\cdots$ T^{r-1} は単位元以外いかなる元をも変へる自己同型作用素である。

しからば次の r ケのラテン方格系は直交する。

$$L_i = \begin{matrix} 1 & A_2 & \cdots\cdots & A_m \\ A_2^{T^i} & A_2^{T^i}A_2 & & A_2^{T^i}A_m \\ \vdots & & & \\ A_m^{T^i} & A_m^{T^i}A_2 & \cdots\cdots & A_m^{T^i}A_m \end{matrix}$$

我々は之を次数 $20 = 2^2 \times 5$ $(r = 3)$ のラテン方格について示してみよう。

群 G として次の関係で定義される P, Q, R で生成されるものとする。

$$P^2 = Q^2 = 1 \; ; \; R^5 = 1$$

自己同型として

$$P^{\bar{T}_1} = Q, \quad Q^{\bar{T}_1} = PQ, \quad R^{\bar{T}_1} = R, \quad P^{\bar{T}_2} = P, \quad Q^{\bar{T}_2} = Q$$

$$R^{\bar{T}_2} = R$$

$T = T_1 T_2$ とおけば，$P^{T} = Q$，$P^{T^2} = PQ$，$P^{T^3} = P^{T}Q^{T} = P$

$(PR)^{T} = QR^2$，$(PR)^{T^2} = PQR^4$，$(PR)^{T^3} = PR^3$ $(PR)^{T^4} = QR$

$(PR)^{T^5} = PQR^2$ $(PR)^{T^6} = PR^4$，$(PR)^{T^7} = QR^3$，$(PR)^{T^8} = PQR$

$(PR)^{T^9} = PR^2$，$(PR)^{T^{10}} = QR^4$，$(PR)^{T^{10}} = QR^4$，$(PR)^{T^{11}} = PQR^3$

$(PR)^{T^{12}} = PR$ $R^{T} = R^2$ $R^{T^2} = R^4$ $R^{T^3} = R^3$ $R^{T^4} = R$

我々は上に述べた方法で，基本となる元素のみを書けばこれによつて直交ラテン方格は構成される。

即ち第一行の成分は

$\underset{1}{1}$．$\underset{2}{P}$．$\underset{3}{Q}$．$\underset{4}{PQ}$．$\underset{5}{PR}$．$\underset{6}{QR^2}$．$\underset{7}{PQR^4}$．$\underset{8}{PR^3}$．$\underset{9}{QR}$．$\underset{10}{PQR^2}$

$\underset{11}{PR^4}$．$\underset{12}{QR^3}$．$\underset{13}{PQR}$．$\underset{14}{PR^2}$．$\underset{15}{QR^4}$．$\underset{16}{PQR^3}$．$\underset{18}{R^2}$．$\underset{19}{R^4}$．$\underset{20}{R^3}$

第一列はこの行の自己同型によつて得られる。

これを書き並べると，

1	P	Q	PQ	PR	QR^2	PQR^4	PR^3	QR	PQR^2	PR^4	QR^3	PQR	PR^2	QR^4	PQR^3	R	R^2	R^4	R^3
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
2	1	4	3	17	10	15	20	13	6	19	16	9	18	7	12	5	14	17	8
3	4	1	2	13	18	11	16	17	14	7	20	5	10	19	8	9	6	15	12
4	3	2	1	9	14	19	12	5	18	15	8	17	6	11	20	13	10	7	16
5	17	13	9	18	16	3	19	10	12	1	7	6	20	4	15	14	8	2	11
6	10	18	14	16	19	5	4	20	11	13	1	8	7	17	2	12	15	9	3
7	15	11	19	3	5	20	6	7	17	12	14	1	9	8	18	4	13	16	10
8	20	16	12	19	4	6	17	7	3	18	13	15	1	10	9	11	2	14	5
9	13	17	5	10	20	2	7	15	8	4	19	14	16	1	11	6	12	3	15

10	6	14	18	12	11	17	3	8	19	9	2	20	15	5	1	16	7	13	4
11	19	7	15	1	13	12	18	4	9	20	10	3	17	16	6	2	5	8	14
12	16	20	8	7	1	14	13	19	2	10	17	11	4	18	5	15	3	6	9
13	9	5	17	6	8	1	15	14	20	3	11	18	12	2	19	10	16	4	7
14	18	10	6	20	7	9	1	16	15	17	4	12	19	13	3	8	11	5	2
15	7	19	11	4	17	8	10	1	5	16	18	9	13	20	14	3	9	12	6
16	12	8	20	15	2	18	9	11	1	6	5	19	3	14	17	7	4	10	13
17	5	9	13	14	12	4	11	6	16	2	15	10	8	3	7	18	20	1	19
18	14	6	10	8	15	13	2	12	7	5	3	16	11	9	4	20	19	17	1
19	11	15	7	2	9	16	14	3	13	8	6	4	5	12	10	1	17	20	18
20	8	12	16	11	3	10	5	15	4	14	9	7	2	6	13	19	1	18	17

この方格から，單位元以外のすべての元をそれ自身以外に写す自己同型3ヶ（もとのものをふくめて）を與へよう。紙面の都合上半分だけにする。

1 1 1	2 2 2	3 3 3	4 4 4	5 5 5	6 6 6	7 7 7	8 8 8	9 9 9	10 10 10
2 3 4	1 4 3	4 1 2	3 2 1	17 13 9	10 18 14	19 11 19	20 16 12	13 17 5	6 14 18
3 4 2	4 3 1	1 2 4	2 1 3	13 9 17	18 14 10	11 19 15	16 15 20	17 5 13	14 18 6
4 2 3	3 1 4	2 4 1	1 3 2	9 17 13	14 10 18	19 15 11	12 20 16	5 13 17	18 6 14
5 6 7	17 10 15	13 18 11	9 14 19	18 16 3	16 19 5	3 5 20	19 4 6	10 12 2	10 11 17
6 7 8	10 15 20	18 11 16	14 19 12	16 3 19	19 5 4	5 20 6	4 6 17	20 2 7	11 17 3
7 8 9	15 20 13	11 16 17	19 12 5	3 19 10	5 4 20	20 6 2	6 17 7	2 7 18	17 3 8
8 9 10	20 13 6	16 17 14	12 5 18	19 10 12	4 20 11	6 2 17	17 7 3	7 18 6	3 8 19
9 10 11	13 6 19	7 14 7	5 18 15	10 12 1	20 11 13	2 17 12	7 3 18	18 8 4	8 19 9

10 11 12	6 19 16	14 7 20	18 15 8	12 7 7	11 13 1	17 12 14	3 18 13	8 4 19	19 9 2
11 12 13	19 16 9	7 20 5	15 8 17	1 7 6	13 1 8	12 14 1	18 13 15	4 19 14	9 2 20
12 13 14	16 9 18	20 5 10	8 17 6	7 6 20	1 8 7	14 1 9	13 15 1	19 14 16	2 20 15
13 14 15	9 18 7	5 10 19	17 6 11	6 20 4	8 7 17	1 9 8	15 1 10	14 16 1	20 15 5
14 15 16	18 7 12	10 19 8	6 11 20	20 4 15	7 17 2	9 8 18	1 10 9	16 1 11	15 5 1
15 16 5	7 12 17	19 8 13	11 20 9	4 15 18	17 2 16	8 18 3	10 9 19	1 11 10	5 1 12
16 5 6	12 17 10	8 13 18	20 9 14	15 18 16	2 16 19	18 3 5	9 19 4	11 10 20	1 12 11
17 18 19	5 14 11	9 6 15	13 10 7	14 8 2	12 15 9	4 13 16	11 2 14	6 12 3	16 17 13
18 19 20	14 11 8	6 15 12	10 7 16	8 2 11	15 9 3	13 16 10	2 14 5	12 3 15	7 13 4
19 20 17	11 8 5	15 12 9	7 16 13	2 11 14	9 3 12	16 10 4	14 5 11	3 15 6	13 4 16
20 17 18	8 5 14	12 9 6	16 13 10	11 14 8	3 12 15	10 4 13	5 11 2	15 6 12	4 16 7

群を基として展開した更に一般的な方法は最近の論文（H.B. Mann. THe construction of sets of orthogonal laten Squares, Annals of M.S. Dec. 1942）で與へられてある。そこでは又 $4n+2$ 次のグレコーラテン方格が存在しないとゆう更に一般的方法が示されてある。

文　　献

R.C Bore　On the application of the properties of Galois-field to the construction of Completely orthogonalized Laten Squares. Sankhya 1939

On Completely orthogonalized Set of Laten Squares Sankhya 1941

問　　題

11 次の直交ラテン方格系 10 けを作れ

15 次及び 12 次のグレコーラテン方格を構成せよ。

夫々次元が 4. 19 ; 16 のラテン方格系 3 け，18 け，15 けの中基本方格を示せ。

37.　ラテン方格計画に於ける乱化法

m けの変種と m 行 m 列の方格を考へる。y_{ijk} を i 行 j 列に於ける k − 変種による産高（$i, j, k = 1, 2, \cdots m$）とする。

ラテン方格計画に於て，勿論 k は i と j の一價函数である。

前に述べた様に，ラテン方格と関聯した検定手続きは，假定（1）（2）に基礎をおかれる。

即ち

$$E(x_{ijk}) = \alpha_i + \beta_j + \gamma_k$$

換言すれば，土壌の肥沃度　の効果は，α_i と β_j との和によつてあらはされる。　しかして α_i ，β_j は夫々行，列にのみ関係する。　これは多くの実際的場合に於て，公平にみて許容される近似である様に思はれる。かしかし或る場合に於て，もつと一般的な形 δ_{ij} によつて表はされなければ困る様な事もある。

かゝる場合に於ては，我々の検定手続きは偏倚になるであらう。

しかしながら，後で分る様に，あらゆる起り得る偏倚は適当な乱化法によつて消去してしまう事が出来る。

一般的な場合として

$$E(y_{ijk}) = \delta_{ij} + \gamma_k$$

であるとする．

$$y_{ijk} = \delta_{ij} + \gamma_k + \varepsilon_{ijk}$$

とすれば，　$\varepsilon_{ijk} = y_{ijk} - E(y_{ijk})$ は平均値が0なる確率変数である。　そこで次の乱化法を考へよう。

先づ最初に，特別なラテン方格を選定する．（この選定の仕方は無作為でなくてよい）。　このラテン方格から m けの行の順列によつて $m!$ けのちがつたラテン方格をつくり出す事が出来る。　次にこの $m!$ の方格から無作為に一つだけ方格を選べ。

無作為的選擇は次の様にして実行され得る。　$1, 2, \cdots m$ なる整数の記してある m 枚のカードを良くきつてからこれをならべれば，整数 $1, 2, \cdots\cdots, m$ の無作為な順列 $i_1, i_2, \cdots\cdots, i_m$ が得られる。　しからば第1行が最初の方格に於ける i_1 行，第2行が i_2 行，------第 m 行が i_m 行たる無作為な方格が得られる。

さて我々はこの無作為決定法が偏倚を消去する事を示さう。

y_{jk} を j 列に於ける k ー変種による產高とする。　無作為に行つたのであるから

$$y_{jk} = \eta_j + \varepsilon^*_{jk} + \gamma_k$$

が得られる。　こゝで η_j は $\delta_{1j}, \delta_{2j}, - - \delta_{mj}$ のいづれか

の値を確率 $1/m$ をもつてとる確率変数で又 ε^*_{jk} は ε_{1jk}, ε_{2jk}, $\cdots\cdots$ ε_{mjk} のいづれかの價を確率 $\frac{1}{m}$ でとる確率変数である。

かくて

$$E(\eta_j) = (\sum_i \delta_{ij})/m = \delta_j$$

$$E(\varepsilon^*_{jk}) = 0$$

よつて $E(y_{jk}) = \delta_j + \gamma_k$

最後の等式から

$$E(y_{jk} - y_{\cdot k} - y_{j\cdot} + y) = 0$$

もしも假説が眞であるならば即ち $\gamma_1 = \cdots\cdots = \gamma_m = 0$ ならば

$$E(y_{\cdot k} - y) = 0$$

よつて，我々の検定手続は偏倚をもたらさない。

今述べた以外にも，検定を不偏ならしめる乱化手続がある。

最初に選んだ方格に於て第1行はその儘にしておいて，残りの $m-1$ 行を無作爲に並べかえ且つ處理を無作爲に並べかえた方格。又は最初の方格から，行，列處理共に無作爲にかえて得られる方格もそうである。（F. Yates, "The Formation of Laten Squares." The Empire Journal of Experimental Agriculture vol. 1. no3 Sept. 1933 を参照の事）．

乱化ラテン方格から計算された所の統計量 F は正規理論のものに於けると同様な分布をなさない。乱塊法の場合と同様に精密検定は次の様にして得られるであらう。

i 行 j 列のプロットに於ける作高が固定されている部分母集団を考える。そしてそれが，實際に觀測された値に等しいと置く。

この部分母集團に於て作高 y_{jk} は乱化法によつて生ずる確率変数であらう。これより計算される F の値は皆等しい確率を以つて起る。よつてこれから棄却領域をきめて検定を行へばよい。

Welch (Biometrika 29 P21) はかゝる考慮のもとの部分母集団による統計量Fの分布を研究してゐる。 Welchは，この分布が普通のF分布と大分異なる事がある事を見出してゐる。

一方 Todin (Journal Agricultural Science 21 , P 191, 1931) は，乱化法のもとに於けるFの分布は，一様に長い間の試行によつて計算すれば，正規理論のものに近似してくる事を実験的に示してゐる。

38. 因 子 計 画 法

いくつかの因子の結合の効果を研究するとき，それらの因子を同時に変へる事は望ましい。 例えば三種類の肥料 a, b, c が作物の平均高にいかなる効果を及ぼすかを検定しようとする。

もしも一つの肥料のみを用ふる各実験を行ふならば，その肥料の効果について検定出来るけれども，肥料間の交互作用項の効果について，何も知る事が出来ない。 b があるときの a の効果は，それがないときの a の効果と全く異なるであらう。

もしすべての因子を同時に動かせば因子の主要と交互作用項について共に知識を得られるであらう。 3けの肥料 a, b, c の場合について之を説明しよう。

実験用敷地は r けのブロックにしきられ各ブロックは8けのプロットに分割されてゐるとする。 各ブロックに於て8けのプロットに8けの取扱ひ，abc, ab ac, bc, a, b, c, (1) を定める。 こゝで abc は三つの肥料が皆加えられた場合；ab は a と b が加えられた場合，(1) は何も加えられなかつた場合である。 典型的ブロックは例へば次の図表で示される。

ab	b	(1)	abc
c	bc	ac	a

$Y_{(1)j}$ を j − ブロックに取扱ひ (1) が加えられた時の作物出来高

同様に Y_{aj} , Y_{abcj} , ------------ を j ブロックに夫々取扱ひ , a, abc, -------- が加えられた場合の作物出来高とする。 さて $Y_{(1)1}$ --- $Y_{(1)r}$, Y_{a1} --- Y_{ar}, ------ は正規独立に分布し , しかも同じ分散をもつと假定する。 更に

$$E\ (Y_{(1)j}) = \mu_{(1)} + \rho_j,\quad E\ (Y_{aj}) = \mu_a + \rho_j ,$$

$$------ ;\ E\ (Y_{abc,j}) = \mu_{abc} + \rho_j$$

であると假定する。 たゞし ρ_j は j- ブロックに於ける土壌肥沃度の作物に及ぼす効果で $\mu_{(1)}, \mu_a$, ----- μ_{abc} は取扱ひ, (1), a, b, ----- abc による作物に及ぼす効果である。

取扱ひ, 及びブロックが作物平均出来高に及ぼす効果の検定の問題は , 取扱ひ及びブロックに従つて二元配置法として考慮される。

	1	2	3	4	5	6	7	8
(1)	$Y_{(1)1}$	$Y_{(1)2}$	$Y_{(1)3}$	$Y_{(1)4}$	$Y_{(1)5}$	$Y_{(1)6}$	$Y_{(1)7}$	$Y_{(1)8}$
a	Y_{a1}	Y_{a2}	Y_{a3}	Y_{a4}	Y_{a5}	Y_{a6}	Y_{a7}	Y_{a8}
b	Y_{b1}	Y_{b2}	Y_{b3}	Y_{b4}	Y_{b5}	Y_{b6}	Y_{b7}	Y_{b8}
c	Y_{c1}	Y_{c2}	Y_{c3}	Y_{c4}	Y_{c5}	Y_{c6}	Y_{c7}	Y_{c8}
ab	Y_{ab1}	Y_{ab2}	Y_{ab3}	Y_{ab4}	Y_{ab5}	Y_{ab6}	Y_{ab7}	Y_{ab8}
ac	a_{ac1}	Y_{ac2}	Y_{ac3}	Y_{ac4}	Y_{ac5}	Y_{ac6}	Y_{ac7}	Y_{ac8}
bc	a_{bc1}	Y_{bc2}	Y_{bc3}	Y_{bc4}	Y_{bc5}	Y_{bc6}	Y_{bc7}	Y_{bc8}
abc	Y_{abc1}	Y_{abc2}	Y_{abc3}	Y_{abc4}	Y_{abc5}	Y_{abc6}	Y_{abc7}	Y_{abc8}

我々は普通の方法で假説を検定する事が出来る。

即ち取扱ひが作物平均高に効果を及ぼさないと云ふ假説

$$\mu_{(1)} = \mu_a = ------- = \mu_{abc}$$

を検定する事が出来る。 又ブロックが作物の平均出来高に影響を及ぼさないと云ふ假説

$$\rho_1 = ------- = \rho_r$$

を検定する事が出来る。

さて，平均値 $\mu_{(1)}$，μ_a，……μ_{abc} を考へる代りに，その或る一次結合を考へると更に興味がある。

例へば，b，c のある無しによる a の効果の比較をみる事は興味がある。かくて次の様な一次結合をつくる。

$$(137)\quad w_a = (\mu_a - \mu_{(1)}) + (\mu_{ab} - \mu_b) + (\mu_{ac} - \mu_c) + (\mu_{abc} - \mu_{bc})$$

$$= \mu_{abc} + \mu_{ab} + \mu_{ac} - \mu_{bc} + \mu_a - \mu_b - \mu_c - \mu_{(1)}$$

我々は w_a（又は w_a の或る乗数倍）を肥料 a の主効果と云ふ。
同様に b と c についても定義してみる。

$$(138)\quad w_b = \mu_{abc} + \mu_{ab} - \mu_{ac} + \mu_{bc} - \mu_a - \mu_c + \mu_b - \mu_{(1)}$$

$$(139)\quad w_c = \mu_{abc} - \mu_{ab} + \mu_{ac} + \mu_{bc} - \mu_a - \mu_b + \mu_c - \mu_{(1)}$$

因子 a と b の間の一次の交互作用項 w_{ab} は a がある場合の b の主効果と a が存在しないとしての b の主効果の差として定義する，即ち

$$w_{ab} = [(\mu_{ab} - \mu_a) + (\mu_{abc} - \mu_{ac})] - [(\mu_b - \mu_{(1)}) + (\mu_{bc} - \mu_c)]$$

$$= \mu_{abc} + \mu_{ab} - \mu_{ac} - \mu_{bc} - \mu_a - \mu_b + \mu_c + \mu_{(1)}$$

$w_{ba} = w_{ab}$ である事に注意せよ。即ち a と b の間の交互作用項は b と a の間の交互作用項に等しい。同様にして

$$(141)\quad w_{ac} = \mu_{abc} - \mu_{ab} + \mu_{ac} - \mu_{bc} - \mu_a + \mu_b - \mu_c + \mu_{(1)}$$

$$(142)\quad w_{bc} = \mu_{abc} - \mu_{ab} - \mu_{ac} + \mu_{bc} + \mu_a - \mu_b - \mu_c + \mu_{(1)}$$

最後に因子 a，b，c の間の２次の交互作用項 w_{abc} は，c がある場合の a，b の交互作用項と c が無い場合に於ける a，b の交互作用項の差として定義する。

即ち

(143) $w_{abc} = [(\mu_{abc}-\mu_{ac})-(\mu_{bc}-\mu_{c})] - [(\mu_{ab}-\mu_{a})-(\mu_{b}-\mu_{(1)})]$

$$= \mu_{abc}-\mu_{ab}-\mu_{ac}-\mu_{bc}+\mu_{a}+\mu_{b}+\mu_{c}-\mu_{(1)}$$

w_{abc}は，a, b, c について対称である事に注意せよ。

k_1，k_2，k_3 を $+1$ 又は -1 のいづれかをとる値とし，記号 $\mu_{(a+k_1)(b+k_2)(c+k_3)}$ は

$$\mu_{(a+k_1)(b+k_2)(c+k_3)} = \mu_{abc}+k_3\mu_{ab}+k_2\mu_{ac}+k_1\mu_{bc}+k_2k_3\mu_{a}$$

$$+k_1k_3\mu_{b}+k_1k_2\mu_{c}+k_1k_2k_3\mu_{(1)}$$

しからば（137）－（143）は次の様に書かれる。

$$w_a = \mu_{(a-1)(b+1)(c+1)} \qquad w_{ab} = \mu_{(a-1)(b-1)(c-1)}$$

$$w_b = \mu_{(a+1)(b-1)(c+1)} \qquad w_{bc} = \mu_{(a+1)(b-1)(b-1)}$$

$$w_c = \mu_{(a+1)(b+1)(c-1)} \qquad w_{ac} = \mu_{(a-1)(b+1)(c-1)}$$

$$w_{abc} = \mu_{(a-1)(b-1)(c-1)}$$

である事が容易に験證される。

$w_a = 0$　$w_{ab} = 0$ －－－－－ とゆう假説を検定するために最初の観測値 $Y_{(1),j}$，－－－－－－ $Y_{abc,j}$ を次の様にそれらの或る一次結合で置き換えると便利である。

即ち

$$Y_{(1)j} = Y_{(a+1)(b+1)(c+1),j} \qquad Y_{abj} = Y_{(a-1)(b-1)(c+1),j}$$

$$Y_{aj} = Y_{(a-1)(b+1)(c+1),j} \qquad Y_{acj} = Y_{(a-1)(b+1)(c-1)j}$$

$$Y_{bj} = Y_{(a+1)(b-1)(c+1)j} \qquad Y_{bcj} = Y_{(a+1)(b-1)(c-1),j}$$

$$Y_{cj} = y_{(a+1)(b+1)(c-1),j} \qquad Y_{abcj} = y_{(a-1)(b-1)(c-1)j}$$

こゝで

$$y_{(a+k_1)(b+k_2)(c+k_3)j} = Y_{abcj} + k_3 Y_{abj} + k_1 Y_{bcj} + k_2 k_3 Y_{aj}$$

$$+ k_1 k_3 Y_{cj} + k_1 k_2 Y_{cj} + k_1 k_2 k_3 Y_{(1)j}$$

とする。 しからば2けのYの間の共分散は0で，又分散は同じである事を験證する事は容易である。 かくてYは変量分析法に於けるすべての假定を満足する。 何となれば

$$E(Y_{(1)j}) = \mu_1 + \rho_j \ ; \cdots\cdots \ E(Y_{aj}) = \mu_a + \rho_j$$

であるから

$$(144)\begin{cases} E(Y_{aj}) = W_a \quad E(Y_{bj}) = W_b \quad E(Y_{cj}) = W_c \\ E(Y_{abj}) = W_{ab} \quad E(Y_{bcj}) = W_{bc} \quad E(Y_{caj}) = W_{ca} \\ E(Y_{abcj}) = W_{abc} \ , \ E(Y_{(1)j}) = W_{(1)} + 8\rho_j \end{cases}$$

假説 $W_{ab} = 0$ を検定するための適当な統計量 F_{ab} を導こう。 Y は変量分析法に於けるすべての假定を満足するから最初の観測値 y から変換した Y について着目する。

$$(145). \ Q_a = \min \sum_j \left[(Y_{aj} - W_a)^2 + \cdots + (Y_{abcj} - W_{abc})^2 + (Y_{(1)j} - W_{(1)} - 8\rho_j)^2 \right]$$

$$= \sum_j \left[(Y_{aj} - Y_{a\cdot})^2 + \cdots + (Y_{abcj} - Y_{abc\cdot})^2 \right]$$

こゝで

$$Y_{a\cdot} = (\sum_j Y_{aj})/r \ , \cdots\cdots, \ Y_{abc\cdot} = (\sum_j Y_{abcj})/r$$

Q_r は $\Sigma(Y_{abj} - Y_{ab\cdot})^2$ を $\Sigma(Y_{abj})^2$ を置きかえる事によって Q_a から求める事が出来る。 よつて

$$Q_r - Q_a = \Sigma(Y_{abj})^2 - \Sigma(Y_{abj} - Y_{ab\cdot})^2 = r(Y_{ab\cdot})^2$$

假定によって制限される條件の数は次の様にして計算できる。等式 $E(Y_{aj}) = W_a, \cdots, E(Y_{abcj}) = W_{abc}$ の各〻は $r-1$ けの條件を持つ。

しかし，$E(Y_{(1)j}) = W_{(1)} + 8\rho_j$ は，$\rho_1 \cdots \rho_r$ は任意の数でよいから制限はない。

かくて假定によって生ずる條件の数の合計は $7(r-1)$ に等しい。假説によって生ずる條件の数は 1 に等しいから

$$F_{ab} = \frac{7(r-1)}{1} \frac{r(Y_{ab\cdot})^2}{Q_a}$$

同様に $W_a = 0$ を検定するためには

$$F_a = \frac{7(r-1)}{1} \frac{r(Y_{a\cdot})^2}{Q_a}$$

次に $W_{ab} = W_{abc} = 0$ が同時に真である事を検定しようとするならば，統計量

$$F = \frac{7(r-1)}{2} \frac{r(Y_{ab\cdot})^2 + r(Y_{abc\cdot})^2}{Q_a}$$

が得られる。假説 $\rho_1 = \cdots = \rho_r$ を検定するために

$$Q_r - Q_a = \sum_j (Y_{(1)j} - Y_{(1)\cdot})^2$$

が得られる。假説によって生ずる所の條件の数は $r-1$ である。

かくて統計量Fは次の式で得られる。

$$F = \frac{7(r-1)}{r-1} \frac{\Sigma[Y_{(1)j} - Y_{(1)\cdot}]^2}{Q_a}$$

39. 二水準に於ける r 因子の系

我々は各因子が２けの價のみをとる（例へばない事とある事）所の r けの因子を取扱ふ。 我々は或る特性 Y を考へる。

例へば $Y=$ 生産高とし Y_{a_i} $(i=1,\cdots r)$ を i 番目の分類に於ける a_i 級に於ける生産高とする。 添数 $a_1,\cdots\cdots,a_r$ の各々は２けの價，例へば 0 と 1，のみをとり，$a_i=0$ は i 番目の因子のない事，$a_i=1$ はある事をあらはすものとする。

例へば $r=4$ とすると Y_{0110} は２番，３番目の因子が存在し，因子１，４の存在しない場合の作物出來高を示すものである。

今 $E(Y_{a_1\cdots a_r})=\mu_{a_1\cdots\cdots a_r}$ とする。

我々は r 通りの分類に於ける変量分析法に関聯して導かれたのと同じ記号を用ひよう。

記号 $Y^{i_1,\cdots\cdots,i_k}_{b_1,\cdots\cdots,b_k}$ $(k\leq r)$ を $a_{i_1}=b_1,\cdots\cdots,a_{i_k}=b_k$ なるすべての変数 $Y_{a_1,\cdots\cdots,a_r}$ の算術平均とする。

同様に $\mu^{i_1,\cdots,i_k}_{b_1,\cdots,b_k}$ を定義する。 次に $(S)Y^{i_1,\cdots,i_k}_{b_1,\cdots,b_k}$ $(S<k)$ を $Y^{i_1,\cdots\cdots,i_k}_{b_1,\cdots,b_k}$ に於て，S けの上方の添数と，それに対応する下方の添数を除いて得られる，あらゆる可能なものの和として定義する。

例へば

$$ {}_{(2)}Y^{i_1i_2i_3}_{b_1b_2b_3}=Y^{i_1}_{b_1}+Y^{i_2}_{b_2}+Y^{i_3}_{b_3} $$

特別な場合として ${}_{(k)}Y^{i_1\cdots i_k}_{b_1\cdots b_k}$ を変数 $Y_{a_1\cdots a_r}$ のすべての算術平均を意味する。

${}_{(S)}\mu^{i_1\cdots i_k}_{b_1\cdots b_k}$ も同様に定義しておく。 之を用ひて

$$ A^{i_1\cdots i_k}_{b_1\cdots b_k}=Y^{i_1\cdots i_k}_{b_1\cdots b_k}-{}_{(1)}Y^{i_1\cdots i_k}_{b_1\cdots b_k}+{}_{(2)}Y^{i_1\cdots,i_k}_{b_1\cdots,b_k}- $$

$$ \cdots\cdots+(-1)^k\,{}_{(k)}Y^{i_1\cdots i_k}_{b_1\cdots b_k} $$

とおく。

同様に $y_{a_1 \cdots\cdots a_k}$ の代りに $\mu_{a_1 \cdots\cdots a_k}$ とおいて上の式と同様に定義したものを $\hat{A}^{i_1 \cdots\cdots i_k}_{b_1 \cdots\cdots b_k}$ とおく。

我々は $\hat{A}^{i_1 \cdots\cdots i_k}_{b_1 \cdots\cdots b_k}$ を変量分析法に於ける i_1 分類 b_1 級，i_2 分類 b_2 級，$\cdots\cdots$ i_k 分類 b_k 級の間の $k-1$ 次の交互作用項と呼ぶ事にする。

記号 $(y^{i_1}_{b_1}+g_1)(y^{i_2}_{b_2}+g_2)\cdots\cdots(y^{i_k}_{b_k}+g_k)$ は，之を普通の掛算の方法で展開し，その各項を例へば $y^{j_1}_{c_1}\cdot y^{j_2}_{c_2}\cdots\cdots y^{j_k}_{c_k}$ を $y^{j_1 j_2 \cdots\cdots j_k}_{c_1 c_2 \cdots\cdots c_k}$ で置き換へ又最後の項 $g_1 g_2 \cdots\cdots g_k$ は $g_1 g_2 \cdots\cdots g_k y$ で置き換へる演算記号とする。 例へば

$$(y^{i_1}_{b_1}+1)(y^{i_2}_{b_2}-1)=y^{i_1 i_2}_{b_1 b_2}-y^{i_1}_{b_1}+y^{i_2}_{b_2}-y$$

同様に演算記号 $(\mu^{i_1}_{b_1}+g_1)\cdots\cdots(\mu^{i_k}_{b_k}+g_k)$ を定義する。しからば次の事は見易い

$$(146)\quad A^{i_1 \cdots\cdots i_k}_{b_1 \cdots\cdots b_k}=(y^{i_1}_{b_1}-1)(y^{i_2}_{b_2}-1)\cdots\cdots(y^{i_k}_{b_k}-1)$$

$$(147)\quad \hat{A}^{i_1 \cdots\cdots i_k}_{b_1 \cdots\cdots b_k}=(\mu^{i_1}_{b_1}-1)(\mu^{i_2}_{b_2}-1)\cdots\cdots(y^{i_k}_{b_k}-1)$$

次に $a_{i_1}=a_{i_2}=\cdots\cdots=a_{i_k}=1$ で他の a がすべて0なるとき $Y^{i_1 \cdots\cdots i_k}=y_{a_1 \cdots\cdots a_r}$ とおく。

そして Y は $a_1=\cdots\cdots=a_r=0$ なるときの $y_{a_1 \cdots\cdots a_r}$ を意味する。 $M^{i_1 \cdots\cdots i_k}$, M は同様に Y の代りに μ とおいたものとして定義する。

演算記号 $(Y^{i_1}+g_1)\cdots\cdots(Y^{i_k}+g_k)$ は之を形式的な掛算を行ひ次に $Y^{i_1}\cdots\cdots Y^{i_m}$ を $Y^{i_1 \cdots\cdots i_m}$ で置き換え，又 $g_1 \cdots\cdots g_k$ は $g_1 \cdots\cdots g_k Y$ で置き換えたものとして定義する。

$(M^{i_1}+g_1)\cdots\cdots(M^{i_k}+g_k)$ についても同様に定義する。

さて我々は

$$(148)\quad \hat{A}^{i_1 \cdots\cdots i_k}_{1 \cdots\cdots 1} = (1/2r)(M^{i_1}-1)\cdots\cdots(M^{i_k}-1)\left[\prod_{j=1}^{r}(M^j+1)\right]$$

但し Π は $j \neq i_1, \cdots\cdots i_k$ なるすべての $1 \leqq j \leqq r$ についてである.

が成立つ事を示さう。

我々は $i_1=1$, $i_2=2$, $i_3=3$ の場合について証明しよう。

一般の場合は同じようにして出来る。

先づ任意の $s < t \leqq r$ に対し

$$M^{1,2,\cdots s}(M^{t+1}+1)\cdots(M^r+1)$$
$$= 2^{r-t}\mu^{1\ 2,\cdots\cdots,s,s+1,\cdots\cdots t}_{1\ 1,\cdots\cdots,1,\ 0,\ \cdots\cdots,0}$$

である事が容易に分る。かくて

$$(149)\quad (M^1-1)(M^2-1)(M^3-1)(M^4+1)\cdots\cdots(M^r+1)$$
$$= 2^{r-3}\left[\mu^{123}_{111} - \mu^{123}_{110} - \mu^{123}_{101} - \mu^{123}_{011} + \mu^{123}_{100} + \mu^{123}_{010} + \mu^{123}_{001} - \mu^{123}_{000}\right]$$

が得られる。我々は

$$(150)\quad \hat{A}^{123}_{111} = \mu^{123}_{111} - \mu^{12}_{11} - \mu^{13}_{11} - \mu^{23}_{11} + \mu^1_1 + \mu^2_1 + \mu^3_1 - \mu$$

$$= \mu^{123}_{111} - \frac{1}{2}(\mu^{123}_{111} + \mu^{123}_{110}) - \frac{1}{2}(\mu^{123}_{111} + \mu^{123}_{101}) - \frac{1}{2}(\mu^{123}_{111} + \mu^{123}_{011})$$

$$+ \frac{1}{4}(\mu^{123}_{111} + \mu^{123}_{110} + \mu^{123}_{101} + \mu^{123}_{100}) + \frac{1}{4}\left(\sum_{u=0}^{1}\sum_{v=0}^{1}\mu^{123}_{u1v}\right)$$

$$+ \frac{1}{4}\left(\sum\sum\mu^{123}_{uv1}\right) - \frac{1}{8}\left(\sum\sum\sum\mu^{123}_{uvw}\right)$$

$$= \left(1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8}\right)\mu^{123}_{111}$$

$$+ \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8}\right)\mu^{123}_{110} + \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8}\right)\mu^{123}_{101}$$

$$+\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}\right)\mu^{123}_{011}+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{8}\right)\mu^{123}_{001}+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\right)\mu^{123}_{010}$$

$$+\left(\frac{1}{8}-\frac{1}{8}\right)\mu^{123}_{100}-\frac{1}{8}\mu^{123}_{000}$$

(149) と (150) から

$$\hat{A}^{123}_{111}=\left(\frac{1}{2^r}\right)(M^1-1)(M^2-1)(M^3-1)(M^4+1)\cdots(M^r+1)$$

一般的な場合も同様にして証明される。

我々は $2^r\hat{A}^{i_1\cdots i_k}_{1\cdots 1}$ （又はその一定常数倍）を因子 $i_1\cdots i_k$ の間の $k-1$ 次の交互作用項と名付ける。

0 次の交互作用項 $2^r\hat{A}^{i_1}_{1}$ を因子 i_1 の主効果と名付ける。
前講義で議論した三つの肥料の場合は，この一般的な場合の $r=3$ としたものである。 即ち $\mu_{(1)}, \mu_a, \cdots \mu_{abc}$ が $M, M^1, \cdots M^{123}$ に対応しておる。 更に三つの肥料 a, b, c の場合の主効果及び交互作項 $w_a, w_b, w_c, w_{ab}, \cdots w_{abc}$ は，こゝで定義された主効果及び交互作用項と一致する。

即ち

$$[(M^1-1)(M^2+1)(M^3+1)],[(M^1+1)(M^2-1)(M^3+1)],[(M^1+1)(M^2+1)(M^3-1)]$$

$$[(M^1-1)(M^2-1)(M^3+1)],\cdots,[(M^1-1)(M^2-1)(M^3-1)],$$

にそれぞれ等しい事が分る。

假設 $\hat{A}^{i_1\cdots i_k}_{1\cdots 1}=0$ を検定するために最初の変数 $y_{a_1\cdots a_r}$ の或る一次結合 $y^*_{a_1,\cdots,a_r}$ を導入した方が便利である。

もし $a_{i_1}=a_{i_2}=\cdots=a_{i_k}=1$ で他のすべての a_{i_s} が 0 ならば

$$y^*_{a_1\cdots a_r}=2^rA^{i_1\cdots i_k}_{1,\cdots 1}=(Y^{i_1}-1)\cdots(Y^{i_k}-1)[\prod(Y^j+1)]$$

但し $\prod$ は $j\neq i_1,\cdots,i_k$　$j\leqq r$ なる範囲の掛け算である。 我々は一次形式 $A^{i_1\cdots i_k}_{1\cdots 1}$ が互ひに他と直交しておる事を知る事が出来る。 よつて正規性から $y^*_{a_1\cdots a_r}$ は独立に分布

してゐる。又 $y^*_{a_1,\cdots\cdots,a_r}$ は皆等しい分散を持つ事も容易に確證する事が出來る。

$a_{i_1}=\cdots\cdots=a_{i_k}=1$ で他がすべて 0 なるときの $y^*_{a_1\cdots\cdots a_r}$ を $Y^{*i_1\cdots\cdots i_k}$ とおく。

かくて

$$Y^{*i_1\cdots i_k}=(Y^{i_1}-1)\cdots\cdots(Y^{i_k}-1)\left[\prod_{j\neq i_1,i_2,\cdots,i_k}(Y^j+1)\right]$$

$$Y^*=(Y^1+1)\cdots\cdots(Y^r+1)$$

同様に

$$M^{*i_1,\cdots\cdots i_k}=(M^{i_1}-1)\cdots\cdots(M^{i_k}-1)\left[\prod_{j\neq i_1,\cdots,i_k}(M^j+1)\right]$$

を定義する。かくて我々は

$$E(Y^{*i_1\cdots\cdots i_k})=M^{*i_1\cdots\cdots i_k}$$

を得る。

次に g けのブロックと各ブロックが 2^r けのプロットに分割されてゐる實驗用面積を考へる。$T^{i_1\cdots\cdots i_k}$ を因子 $i_1,\cdots\cdots i_k$ が存在し他のすべての因子が存在しない取扱ひとする。かゝる取扱ひの数は 2^r けある。各ブロックに於て 2^r けの取扱ひを 2^r けのプロットに定めよ。

j ブロック（$j=1,\cdots\cdots,g$）から計算される $Y^{*i_1\cdots\cdots i_k}$ の値を $Y^{*i_1,\cdots\cdots i_k}_j$ とおく。さて假説

$$2^r\hat{A}_1^{i_1,\cdots\cdots i_k}=0 \qquad \text{即ち} \quad M^{*i_1\cdots\cdots i_k}=0$$

を検定するための適当な F—統計量を導き出さう。

ブロックによる土壌沃肥度は作高に効果を及ぼすから j-ブロックに於ける $y_{a_1\cdots\cdots a_r}$ の期望値は $\mu_{a_1,\cdots,a_r}+\rho_j$ に等しい。但し ρ_j は j-ブロックに於ける土壌沃肥度の効果を表はす。

我々は次の事は容易に確證出來るであらう。

$$E(Y_j^{*i_1\cdots i_k}) = M^{*i_1\cdots i_k}$$

$$E(Y_j^{*}) = M^{*} + 2^r \rho_j$$

更に

$$Q_a = \min\left\{ \sum_{k=1}^{r} \left[\sum_j \sum_{i_1 < \cdots < i_k \leq r} \cdots \sum (Y_j^{*i_1\cdots i_k} - M^{*i_1\cdots i_k})^2 \right] + \sum_{j=1}^{q} (Y_j^{*} - M^{*} - 2^r \rho_j)^2 \right\}$$

$$= \sum_{k=1}^{r} \left[\sum_j \sum_{i_1 < \cdots < i_k \leq k} \sum (Y_j^{*i_1\cdots i_k} - \overline{Y}^{*i_1,\cdots,i_k})^2 \right]$$

但し $\overline{Y}^{*i_1\cdots i_k} = (1/q) \sum_{j=1}^{q} Y_j^{*i_1\cdots i_k}$

が得られる。 Q_a に於て項 $\sum_j (Y_j^{*i_1\cdots i_k} - \overline{Y}^{*i_1\cdots i_k})^2$ の代りに $\sum_j (Y_j^{*i_1\cdots i_k})^2$ とおけば Q_r が出来る。

かくて

$$Q_r - Q_a = q(\overline{Y}^{*i_1\cdots i_k})^2$$

假定によつて制限されてゐる條件の数は次の様にして計算する事が出来る。 $0 < j_1 < j_2 \cdots < j_k \leqq r$ なる整数々けの各組に対し方程式

$$E(Y^{*j_1\cdots j_k}) = M^{*j_1,\cdots,j_k}$$

は $q-1$ けの線型條件を持つ。

かくて全條件の数は $(2^r - 1)(q-1)$ に等しい。 假説によつて附加される條件の数は 1 である。

かくて, F統計量は

$$F = \frac{(2^r - 1)(q-1)q}{1} \frac{(\overline{Y}^{*i_1\cdots i_k})^2}{Q_a}$$

で與へられる。 さて次に $\rho_1 = \cdots = \rho_q$ と云ふ假説を検定しよう。 この場合

$$Q_r - Q_a = \sum_{j=1}^{q} (Y_j^{*} - \overline{Y}^{*})^2$$

で，假説によつて生ずる條件の数は $q-1$ に等しい。

かくて

$$F = \frac{(2^r-1)(q-1)}{q-1} \quad \frac{(Y_j^*-Y^*)^2}{Q_a}$$

が得られる。

40. 一般的因子計画法

前講義に於て，我々は各因子が２けの変数０とし，即ち不在と存在の場合について論じた。

さて今度は，各因子が２け又はそれ以上の変数の数を持つ場合について考へよう。

例へば，或る肥料をいろいろ量を変へて用ひたような場合である。 即ち異なつた量の肥料を夫々異なつたプロットへ施してみる。 こうして次の様な因子計画法の一般的機構を考へる事が出来るであらう。 r けの因子を考へ，その i－因子（$i=1,2,\cdots r$）は t_i けの数の変量を持つとする（前講義では $t_i=2$ の場合を取扱つた）。 実験用敷地は t_{r+1} けのブロックからなり，各ブロックは $t_1\cdot t_2\cdot\cdots\cdots t_r$ けのプロットに分割されてゐるものとする。 1－因子の a_1－変量，2－因子の a_2－変量，$\cdots\cdots$，r－因子の a_r 変量が施こされる取扱ひを $T_{a_1,a_2,\cdots a_r}$ とする。

こうして全部で $t_1\cdot t_2,\cdot\cdots\cdots t_r$ けの取扱ひが生ずるのであるがこれを，各ブロックに於ける $t_1\cdot t_2\cdot\cdots\cdots t_r$ けのプロットに定める。

a_{r+1}－ブロックのプロットに取扱ひ $T_{a_1,a_2,\cdots,a_r}$ が施こされた作高を $Y_{a_1,a_2,\cdots,a_r,a_{r+1}}$ とする。しからば全体の機構は r けの因子とブロックによる $r+1$ 通りの分類として考へられる，そして変量分析法に於ける $r+1$ 元配置法で得られる結果を此処に適用することが出来る。 もしも因子とブロックの間の交互作用項がないならば，Q_a は次の二次形式 $Q_{i_1,\cdots,i_k}$ のすべての和に等しい。

ここで，最後の添数は $r+1$ に等しく，又 $k \geqq 2$ である。二次形式 $Q_{i_1,----,i_k}$ は次の通り與へられる。

$$\frac{t_1 \cdot ---- t_{r+1}}{t_{i_1} ----t_{i_k}} \sum_{a_1}\sum_{a_2} ----- \sum_{a_k} \left(A^{i_1, --- i_k}_{a_1, ---, a_k} \right)^2$$

(Analysis of Variance Notes を見よ) $k \geqq 1,\ i_k = r+1$ なる二次形式 $Q_{i_1, ---, i_k}$ のすべての和は

$$\sum_{a_1}\sum_{a_2} ---- \sum_{a_{r+1}} \left(Y_{a_1 ---a_{r+1}} - Y^{1, ----r}_{a_1, ---, a_r} \right)$$

に等しいから

$$Q_a = \sum_{a_1} ----- \sum_{a_{r+1}} \left(Y_{a_1 ---a_{r+1}} - Y^{1, ---r}_{a_1, ---a_r} \right)^2$$

$$- t_1 ---- t_r \sum_{a_{r+1}} \left(Y^{r+1}_{a_{r+1}} - Y \right)^2$$

となる。　そして Q_a の階数は $[t_1 t_2 --- t_r (t_{r+1} - 1)] - (t_{r+1} - 1) = (t_1 t_2 ---- t_r - 1)(t_{r+1} - 1)$ に等しい。

任意の添数の組に対し $\hat{A}^{i_1 --- i_k}_{a_1, --- a_k} = 0$ と云ふ假説を検定するためには，$Q_r - Q_a = Q_{i_1 --- i_k}$ となるから，F－統計量は

$$\frac{(t_1 t_2 --- t_r - 1)(t_{r+1} - 1)}{(t_{i_1} - 1) ------ (t_{i_k} - 1)} \quad \frac{Q_{i_1, ---, i_k}}{Q_a}$$

で與へられる。 $(t_{i_1} - 1) ---- (t_{i_k} - 1) = n_{i_1, --- i_k}$ とおけば，$t_{i_1}, --- t_{i_k}$ けの一次形式 $A^{i_1 --- i_k}_{a_1, --- a_k}$ $(a_j = 1, ----, t_{i_j}$: $j = 1, ----, k)$ のうち $n_{i_1, ---, i_k}$ けの一次独立な一次形式がある，　かくて任意に與へられた正整数 $i_1 < ---- < i_k \leqq r$ に対し $n_{i_1, ---- i_k}$ けの一次形式

$$B^{i_1, -----, i_k}_{b_1, ----, b_k} \qquad (b_j = 1, ----, t_{i_j} - 1 \ ;\ j = 1, --, k)$$

をそれぞれ互に直交し，かつ

$$\sum_{b_1}\sum_{b_2} --- \sum_{b_k} \left(B^{i_1, ----, i_k}_{b_1, ---, b_k} \right)^2 = \sum_{a_1}\sum_{a_2} --- \sum_{a_k} \left(A^{i_1 --- i_k}_{a_1, --- a_k} \right)^2$$

ならしめる様な B－一次形式を求める事が出来る。

二つの一次形式の直交性によつて，それらの間の共分散は0である事が分る。勿論一次形式 $B^{i_1,\cdots,i_k}_{b_1,\cdots,b_k}$ は一意的に定まるとは限らない。実際に，與へられる條件を充す，無限組のB－一次形式が存在する事がある。

変量 $b_1,\cdots,b_k$ の任意の特別な組に対し，假説 $\hat{B}^{i_1,\cdots,i_k}_{b_1,\cdots,b_k}=0$ を検定する事も出来る。

この場合の proper な F－統計量は

$$\frac{(t_1 t_2\cdots\cdots t_r-1)(t_{r+1}-1)}{1}\ \frac{\dfrac{t_1\cdots t_{r+1}}{t_{i_1}\cdots t_{i_k}}\left(B^{i_1,\cdots,i_k}_{b_1,\cdots,b_k}\right)^2}{Q_a}$$

で與へられる。

もしも次の假説

$$\hat{B}^{i_1,\cdots,i_k}_{b_1,\cdots,b_k}=\hat{B}^{i_1,\cdots,i_k}_{c_1,\cdots,c_k}=0$$

を検定したいならば F－統計量は

$$F=\frac{(t_1 t_2\cdots\cdots t_r-1)(t_{r+1}-1)}{2}\ \frac{\dfrac{t_1\cdots t_{r+1}}{t_{i_1}\cdots t_{i_k}}\left[\left(B^{i_1,\cdots,i_k}_{b_1,\cdots,b_k}\right)^2+\left(B^{i_1,\cdots,i_k}_{c_1,\cdots,c_k}\right)^2\right]}{Q_a}$$

で與へられる。これらに関聯する更に詳細な議論については，R. A. Fisher. <u>Design of Experiments</u>. p.p. 132－133. 及び Yates. <u>Complex Experiments</u> pp. 196－197 を参照されたい。

<u>41. 交絡法</u>

各因子は2けの値（不在と存在）のみを持つ二水準の場合の r けの因子について考へよう。もし我々が前に述べた様な方法で統計的研究を実行するならば，各ブロックを 2^r けものプロットに分割しなければならない。

これはrが適度の値でさえ，相当大きなブロックを必要としなければならないであらう。

しかしてブロックを大きくする事は，ブロック内の土壌肥沃度を無視する事が出来なくなり，之れは避くべきであらう。

我々はこゝで，高次の交互作用項をブロックと交絡させる事によつて，ブロックの大さを縮小させ得る事を示さう。かゝる手続きによつて，ブロックと交絡させた高次の交互作用項についての知識を失ふのであるが，この知識の損失は，通常重大な事ではない，と云ふのは，実際的場合に於て，高次の交互作用項は大低重要なものでないからである。交絡法の一般的手続きは次の様に述べる事が出来る。2^rけのプロットからなる大きなブロックを用ひる代りに各〻が$2^r/p$けのプロットからなるpけのブロック —— 我々はそれを偏ブロックと呼ぶ —— を用ひる。

全実験用敷地はpけの偏ブロックのmけのセットから構成されてゐるとする。j－セットに於けるα－偏ブロックを$b_{j\alpha}$（$j=1,\cdots,m$；$\alpha=1,\cdots,p$）とおく。j－セットに於けるpけの偏ブロック全体をj－ブロックと名付けそれをb_j（$j=1,\cdots,m$）とおく。しからば勿論各ブロックb_jは2^rけのプロットを持つ事になる。そして，2^rけの取扱ひ結合（treatment combination）をこの2^rけのプロットに正確にもれなく唯一度づゝ現はれる様に定める。ブロックb_jの或るプロットに取扱ひ（$a_1,\cdots,a_r$）を施して得られた作高を$y_{a_1,a_2,\cdots a_r j}$（$a=0,1$）とする。そして2^rけの主効果，交互作用項を定義出来る。即ち

$$\hat{A}^{i_1,\cdots\cdots i_k}_{1,\cdots\cdots,1} \qquad \text{（－1 次の交互作用項}\hat{A}\text{を含む）}$$

前に述べた記号を用ひて

$$\hat{A}^{i_1,\cdots\cdots,i_k}_{1,\cdots\cdots,1} = (1/2^r)(M^{i_1}-1) \qquad (M^{i_k}-1)\left[\prod_{j=i_1,i_2,\cdots j_k}(M^{j}+1)\right]$$

$$= (1/2^r)\,M^{*i_1,\cdots\cdots i_k}$$

我々は 2^r けのパラメーター $M^{*i_1 \cdots i_k}$ の内 s けのみに着目してその残りは重要でないと假定しておく。　その s けのパラメーター $M^{*i_1, \cdots, i_k}$ を $L_1, \cdots, L_s$ とし残りの $2^r - s$ けのパラメーター $M^{*i_1 \cdots i_k}$ を $L^*_1, \cdots, L^*_{2^r-s}$ とおいてみる。

これらに対応する b_j ブロックに於ける作高 $Y^{*i_1, \cdots, i_k}$ を夫々 $Z_{1j}, \cdots Z_{sj}$ 及び $Z^*_{1j}, \cdots Z^*_{2^r-s,j}$ と記号を書き代へてみる。

更に偏ブロック $b_{j\alpha}$，ブロック b_j に於ける作高和をそれぞれ $B_{j\alpha}$，及び B_j とすれば，勿論

$$B_j = \sum_{\alpha=1}^{p} B_{j\alpha}$$

である。

さて $y_{a_1, \cdots, a_r, j}$ は正規，独立に，しかも同じ分散を持つて分布すると假定する。

更に

$$E(y_{a_1, \cdots a_r, j}) = \mu_{a_1, \cdots, a_r, j} = \mu_{a_1 \cdots a_r} + \rho_{j\alpha}$$

であるとする。　ここで α は取扱ひ $(a_1, \cdots, a_r)$ が偏ブロック $b_{j\alpha}$ に属するプロットに施こされた時の α である。

統計量 Z_{ij}，Z^*_{ij}，$B_{j\alpha}$，B_j は先づ $y_{a_1, \cdots, a_r, j}$ の一次結合である事に着目しよう。

一般に２けの一次結合に於て，その係数のスカーラー積が０となるとき，この２けの一次結合は直交すると云ふ。

さて $Z_{1j}, \cdots, Z_{sj}$ が $B_{j1}, \cdots, B_{jp}$ にそれぞれ直交し，かつ Z^*_{ij} は $B_{j1}, \cdots, B_{jp}$ の一次結合としてあらはせる様に，2^r けの取り扱ひ結合 $(a_1, \cdots, a_r)$ を b_j の 2^r けのプロットにうまく定める事が出来たとする。（この場合勿論 $2^r - s = p$ なる関係が成り立たなければならない。）このとき Z^*_{ij} はブロックに交絡されたと云ふ。

しからば $Z_{1j}, \cdots, Z_{sj}$，$B_{j1}, \cdots, B_{jp}$ は 2^r けの互ひに直

交する一次形式となる。　よつて次の等式が成り立つ。

$$(152)\quad \sum_{j}\sum_{a_r}\cdots\cdots\sum_{a_1}(y_{a_1,\cdots,a_r,j}-\mu_{a_1,\cdots,a_r,j})^2$$

$$\equiv\sum_{i}\sum_{j}c_i\left[Z_{ij}-E(Z_{ij})\right]^2+d\sum_{j}\sum_{\alpha}\left[B_{j\alpha}-E(B_{j\alpha})\right]^2$$

こゝで c_i, d はそれぞれ Z_{ij}, $B_{j\alpha}$ に於ける係数の平方和である。　即ち

$$c_i=1/2r\ ,\quad d=n/2r$$

又

$$(153)\quad \sum_{j}\sum_{a_r}\cdots\cdots\sum_{a_1}(y_{a_1,\cdots,a_r,j})^2$$

$$\equiv\sum_{j=1}^{n'}\sum_{i=1}^{s}c_i(Z_{ij})^2+d\sum_{\alpha}\sum_{j}(B_{j\alpha})^2$$

もなり立つ。

註.　(152)式の証明

記号を変へて，P を n 次の直行行列

$$(Z_1,\cdots\cdots,Z_n)=(x_1,\cdots\cdots,x_n)P$$

とおき

$$\sum_{i=1}^{n}\{x_i-E(x_i)\}^2=\sum_{j=1}^{n}\{Z_j-E(Z_j)\}^2$$

を証明する

$$\text{左辺}=\sum_{i=1}^{n}\left\{\sum_{j=1}^{n}\pi_{ij}(Z_j-E(Z_j))\right\}^2$$

$$=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\pi_{ij}^2(Z_j-E(Z_j))^2$$

$$+\sum_{j\neq j'}\sum_{i=1}^{n}\pi_{ij}\,\pi_{ij'}(Z_j-E(Z_j))(Z_{j'}-E(Z_{j'}))$$

$$=\sum_{j=1}^{n}(Z_j-E(Z_j))^2=\text{左辺}$$

$$\because \sum_{i=1}^{n} \pi_{ij}^{2} = 1$$

$$\sum_{i=1}^{n} \pi_{ij} \pi_{ij'} = 0 \quad (j \neq j')$$

$$E(Z_{ij}) = L_i$$

$$E(B_{j\alpha}) = \rho^{*}_{j\alpha}$$

$(\rho^{*}_{j\alpha} = \rho_{j\alpha} + L^{*}_{1}, \cdots, L^{*}_{2^{r}-s}$ の或る一次結合)

であるから容易に

$$(154) \quad Q_a = \sum_{j} \sum_{i} c_i (Z_{ij} - Z_i)^2$$

ただし $Z_i = (\sum_{j} Z_{ij}) / m$

である事が分る。

$L_i = 0$ と云ふ假説を検定するために

$$Q_r - Q_a = m c_i (Z_i)^2$$

が得られる。そして F－統計量は

$$(155) \quad F = \frac{s(m-1)}{1} \frac{m c_i (Z_i)^2}{Q_a}$$

で與へられる。しかして又 (153), (154) より容易に次の事が導かれる。

$$(156) \quad Q_a = \sum_{j} \sum_{a_r} \cdots \sum_{a_1} (y_{a_1, \cdots, a_r, j})^2 - m \sum_{i} c_i (Z_i)^2 - d \sum_{j} \sum_{\alpha} (B_{j\alpha})^2$$

(156) は実用計算としてしばしば用ひられる式である。

次に $Z^{*}_{ij} \neq Y^{*}_{j}$ は $B_j = Y^{*}_{j}$ に直交するから次の等式が成り立つ。

(157) $d\sum_j\sum_\alpha[B_{j\alpha}-E(B_{j\alpha})]^2$

$$\equiv\sum_i\sum_j p_i[Z^*_{ij}-E(Z^*_{ij})]^2+f\sum_j[B_j-E(B_j)]^2$$

ここで p_i, f はそれぞれ Z^*_{ij}, B_j に於ける係数の平方和の逆数である。即ち $p_i=1/2^r$, $f=1/2^r$ 又 (157) 式に於ける i に関する加算記号 $\sum_i$ は $Z^*_{ij}\neq B_j=Y^*_j$ なるすべての i についての和であるとする。

仮説 $\Sigma\rho_{1\alpha}=\Sigma\rho_{2\alpha}=\cdots\cdots=\Sigma\rho_{m\alpha}$ を検定するために

$$Q_r-Q_a=f\,\Sigma(B_j-B)^2$$

が得られるから，F-統計量は

$$F=\frac{s(m-1)}{m-1}\;\frac{Q_r-Q_a}{Q_a}$$

が算出される。こゝで $B=(\Sigma B_j)/m$ とする。

42. 例

$p=2$, $r=3$ としよう。偏ブロック b_{j1} は取扱ひ結合 (1,0,0), (0,1,0), (0,0,1), (1,1,1) が施こされ，偏ブロック b_{j2} は取扱ひ結合 (1,1,0), (1,0,1), (0,1,1), (0,0,0) が施こされるものとする。

こうすれば，Y^{*1}, Y^{*2}, Y^{*3}, Y^{*12}, Y^{*13}, Y^{*23} は，B_{j1}, B_{j2} にそれぞれ直交する。そして

$$Y^*_j=B_{j1}+B_{j2},\quad Y^{*123}=B_{j1}-B_{j2}$$

となる。この場合 $s=6$ である。かくて

$$Q_a=(1/2^3)[(Y^*_j-Y^{*1})^2+\cdots+\Sigma(Y^{*23}_j-Y^{*23})^2]$$

が得られる。　ただし

$$Y^{*i_1,\cdots,i_k} = \sum_{j}(Y_j^{*i_1\cdots\cdots,i_k})/m$$

とする，假説 $M^{*12}=0$ を検定するために

$$Q_r - Q_a = (m/2^3)(Y^{*12})^2$$

と

$$F = \frac{6(m-1)}{1}\ \frac{Q_r - Q_a}{Q_a}$$

が得られる。次に假説 $\rho_{11}+\rho_{12}=\cdots\cdots=\rho_{m1}+\rho_{m2}$ を検定するために

$$Q_r - Q_a = (1/2^3)\sum(B_j - B)^2$$

$$F = \frac{6(m-1)}{m-1}\ \frac{Q_r - Q_a}{Q_a}$$

が得られる。（この例は Rider の書 p175 によった。）

43　部分交絡法

実験用敷地は，ブロックのグループ，g けより構成されてゐるとする。その k－グループの j－ブロックを ${}_kb_j$（$j=1,\cdots,m_k$；$k=1,\cdots\cdots,g$）と記号づける事にしよう。

更にブロック ${}_kb_j$ は p_k けの偏ブロック ${}_kb_{j\alpha}$（$\alpha=1,\cdots,p_k$）に分割され各偏ブロック ${}_kb_{j\alpha}$ は $2^r/p_k$ けのプロットから構成されてゐるものとする，そして，全部で 2^r けある取り扱ひ結合（$a_1,\cdots\cdots,a_r$）は（2^r けのプロットからなる）各ブロック ${}_kb_j$ に正確にもれなく又重複なく施こされてゐるとする。

そしてこの取り扱ひ結合（$a_1,\cdots\cdots,a_r$）のならび方はブロック ${}_kb_1$，${}_kb_2$，$\cdots\cdots$，${}_kb_{m_k}$ に於いてすべて同じようにしてをく。

更に次の事が成り立つように，取り扱ひ結合（$a_1,\cdots\cdots,a_r$）がならべられてあるとする。

2^r けの統計量 $Y^{*i_1,\cdots,i_k}$ の内 s_k け，—例へばそれを ${}_kZ_1$, ${}_kZ_2$, ----, ${}_kZ_{s_k}$ と記号を書き換へておき，—— は k - グループの偏ブロックの作高和にそれぞれ皆直交し，そして残りの $2^r - s_k$ け —— それを ${}_kZ_1^*$, -----, ${}_kZ_{2^r-s_k}^*$ であらはしてみる —— は k - グループの各偏ブロックの作高和の一次結合してあらはされる。

偏ブロック ${}_kb_{j\alpha}$，ブロック ${}_kb_j$ に於ける作高の総和をそれぞれ ${}_kB_{j\alpha}$，${}_kB_j$ とし，さらに，${}_kb_j$ より求められた ${}_kZ_\beta$，($\beta = 1, ----, s_k$) ${}_kZ_\beta^*$ ($\beta = 1, ----, 2^r - s$) の実測値をそれぞれ ${}_kZ_{\beta j}$ 及び ${}_kZ_{\beta j}^*$ とする。かくして，${}_kZ_{\beta j}$ は，${}_kB_{j1}$, ----, ${}_kB_{jn_k}$ と直交し，又 ${}_kZ_{\beta j}^*$ は ${}_kB_{j1}$, ----, ${}_kB_{jn_k}$ の一次結合である。そしてこのとき，統計量 ${}_kZ_\beta$ ($\beta = 1$, ----, s_k) は k - グループに交絡<u>されない</u>と云い、統計量 ${}_kZ_\beta^*$ ($\beta = 1, ----, 2^r - s_k$) は k - グループに交絡<u>される</u>と名付ける。

さてこの様にお膳立てしておけば，次の等式が明らかに成り立つ。

$$(158)\quad \sum_{k=1}^{g}\sum_{j=1}^{m_k}\sum_{a_r}\cdots\cdots\sum_{a_1}\left({}_kY_{a_1,\cdots,a_r,j} - {}_k\mu_{a_1,\cdots,a_r,j}\right)^2$$

$$\equiv \sum_{k=1}^{g}\sum_{j=1}^{m_k}\sum_{\beta=1}^{s_k}\left(1/2^r\right)\left[{}_kZ_{\beta j} - E\left({}_kZ_{\beta j}\right)\right]^2 + \sum_{k=1}^{g}\sum_{j=1}^{m_k}\sum_{\alpha=1}^{n_k}\left(n_k/2^r\right)\left[{}_kB_{j\alpha} - E\left({}_kB_{j\alpha}\right)\right]^2$$

こゝで ${}_kY_{a_1,\cdots a_r,j}$ は ${}_kb_j$ から得られた作高で

$$E\left({}_kY_{a_1,\cdots,a_r,j}\right) = {}_k\mu_{a_1,\cdots,a_r,j} = \mu_{a_1,\cdots a_r} + {}_k\rho_{j\alpha}$$

(α は取り扱ひ結合 ($a_1, ----, a_r$) が偏ブロック ${}_kb_{j\alpha}$ に落ちる様な α である。) 又

$$(159)\quad \sum_{k=1}^{g}\sum_{j=1}^{m_k}\sum_{a_r}\cdots\cdots\sum_{a_1}({}_kY_{a_1,\cdots\cdots,a_r,j})^2$$
$$\equiv\sum_{k=1}^{g}\sum_{j=1}^{m_k}\sum_{\beta}^{s_k}({}_kZ_{\beta j})^2+\sum_{k=1}^{g}\sum_{j=1}^{m_k}\sum_{\alpha=1}^{n_k}(n_k/2^r)({}_kB_{j\alpha})^2$$

が成り立つ。 次に 2^r けの統計量 $Y^{*i_1,\cdots,i_k}$ を ある定まつた順序にならべて，それを V_1, V_3, ----, V_{2^r} とする。

${}_kb_j$ から求められる V_w を ${}_kV_{wj}$ とおく。 しからば等式(158)(159) は 次の通りに書き直せる。

$$(160)\quad \sum_{k}\sum_{j}\sum_{a_r}\cdots\cdots\sum_{a_1}({}_kY_{a_1\cdots a_r,j}-{}_k\mu_{a_1,\cdots a_r,j})^2$$
$$\equiv\sum_{w}\sum_{W}\sum_{j}(1/2^r)\left[{}_wV_{wj}-E({}_wV_{wj})\right]^2$$
$$+\sum_{k=1}^{g}\sum_{j=1}^{m_k}\sum_{\alpha=1}^{n_k}(n_k/2^r)\left[{}_kB_{j\alpha}-E({}_kB_{j\alpha})\right]^2$$

$$(161)\quad \sum_{k}\sum_{j}\sum_{a_r}\cdots\cdots\sum_{a_1}({}_kY_{a_1\cdots a_rj})^2$$
$$\equiv\sum_{w}\sum_{W}\sum_{j}(1/2^r)({}_wV_{wj})^2+\sum_{k}\sum_{j}\sum_{\alpha}(n_k/2^r)({}_kB_{j\alpha})^2$$

こゝに w は V_w が W- グループと交絡しないやうな値のみをとるものとする。

V_w が W-グループと交絡しないやうな w の値と j についての ${}_wV_{wj}$ の算術平均を $\overline{V}_w$ とおく。 しからば (160) から

$$(162)\quad Q_a=(1/2^r)\sum_{w}\left[\sum_{W}\sum_{j}({}_wV_{wj}-\overline{V}_w)^2\right]$$

が得られる。 假説 $E(V_w)=0$ を検定するためには

$$Q_r-Q_a=C_w(1/2^r)(\overline{V}_w)^2$$

が得られる。 但し $C_w=\sum_{W}m_W$ で $\sum_{W}$ は V_w が w-グル

～すと交絡しないやうなwについて加算である。

そして F－統計量は

$$F = \frac{\sum_{\omega}(c_\omega - 1)}{1} \frac{Q_r - Q_a}{Q_a}$$

こゝで ω は V_ω がグループのすくなくとも1つと交絡しないやうな ω に限定する。

（161）と（162）から又

$$(163) \quad Q_a = \sum_{k}\sum_{j}\sum_{a_r} \cdots \sum_{a_1} ({}_{k}Y_{a_1,\cdots,a_r,j})^2 - \sum_{\omega} c_\omega (1/2^r)(\overline{V_\omega})^2 - \sum_{k}\sum_{j'}\sum_{\alpha} (p_k/2^r)({}_{k}B_{j\alpha})^2$$

が導き出せる。

今 V_{2^r} を $\sum_{a_r} \cdots\cdots \sum_{a_1} Y_{a_1,\cdots,a_r}$ であるとしておく。

しからば，次の等式は容易に験證できる。

$$(164) \quad \sum_{k=1}^{g}\sum_{j=1}^{m_k}\sum_{\alpha=1}^{p_k} (p_k/2^r)\left[{}_{k}B_{j\alpha} - E({}_{k}B_{j\alpha})\right]^2$$

$$\equiv \sum_{\omega=1}^{2^r-1} (1/2^r)\left\{\sum_{z}\sum_{j'=1}^{m_z}\left[{}_{z}V_{\omega j} - E({}_{z}V_{\omega j})\right]^2\right\}$$

$$+ \sum_{k}\sum_{j} (1/2^r)\left[{}_{k}B_j - E({}_{k}B_j)\right]^2$$

ここで z は V_ω が z－グループと交絡するやうな z のみに限定する。

次に ${}_{k}\beta_j = \sum_{\alpha} {}_{k}\beta_{j\alpha}$ とおく。そして，${}_{k}\beta_j$ はすべて皆等しいとゆう假說を検定しよう。

$$Q_r - Q_a = (1/2^r)\sum_{k}\sum_{j}({}_{k}B_j - B)^2$$

こゝで B は ${}_{k}B_j$ のすべてに対する平均である。

そして F－統計量は．

$$F = \frac{\Sigma(C_\omega - 1)}{(\Sigma m_k) - 1} \quad \frac{Q_r - Q_a}{Q_a}$$

となる。

45　交絡法と部分交絡法の例

(R. A. Fisher. Design of experiments, 1935
p.p. 123–137)

我々は，因子の数は３けで三水準に於ける場合を考へる。
n_1，n_2，n_3；k_1，k_2，k_3；1, 2, 3 を夫々第１，第２，第３因子の三水準とする。

ブロックを３けの偏ブロックに分割し，最初の偏ブロックを

	k_1	k_2	k_3
n_1	1	2	3
n_2	2	3	1
n_3	3	1	2

なる取り扱い結合を施こしておく。

第２偏ブロックは，第１偏ブロックに於て，1 → 2，2 → 3，3 → 1　なる循環置換によつて得られる，取り扱い結合の並べ方にしておく。　第３偏ブロックは第２偏ブロックから同様の循環置換によつて得られる並べ方とする。

我々は，全部の主効果と第１次交互作用項が偏ブロックに於ける作高和に直交してある事を示さう。

対象であるから n_1 の主効果及び n_1 と k_i の１次の交互作用項について証明すれば，それで充分である。

$$\mu_{n_1} = \left(\sum_{a_2} \sum_{a_1} \mu_{n_1 a_2 a_3} \right) / 9$$

$$\mu_{n_1 k_1} = \left(\sum_{a_3} \mu_{n_1 k_1 a_3} \right) / 3$$

$$\mu = \left(\sum_{a_3} \sum_{a_2} \sum_{a_1} \mu_{a_1 a_2 a_3} \right) / 27$$

とおけば，n_1 の主効果は $\mu_{n_1}-\mu$ に等しく，

$$27(\mu_{n_1}-\mu)=3\sum_{a_3}\sum_{a_2}\mu_{n_1a_2a_3}-\sum_{a_3}\sum_{a_2}\sum_{a_1}\mu_{a_1a_2a_3}$$

統計量 27（$y_{n_1}-y$）とブロック（165）との対応する係数のスカーラー積は $2+2+2-1-1-1-1-1-1=0$ である。

又（165）の任意の循環置換とのスカーラー積も0である事が容易に分る。よつて（$y_{n_1}-y$）はこの方格（165）に直交する。 n_1 と k_1 の交互作用項は $\mu_{n_1k_1}-\mu_{n_1}-\mu_{k_1}+\mu$ である。

$$27(\mu_{n_1k_1}-\mu_{n_1}-\mu_{k_1}+\mu)=9\sum_{a_3}\mu_{n_1k_1a_3}-3\sum_{a_3}\sum_{a_2}\mu_{n_1a_2a_3}$$

$$-3\sum_{a_3}\sum_{a_1}\mu_{a_1k_1a_3}+\sum_{a_3}\sum_{a_2}\sum_{a_1}\mu_{a_1a_2a_3}$$

$$=4\sum_{a_3}\mu_{n_1k_1a_3}-3\sum_{a_3}\sum_{a_2\neq k_1}\mu_{n_1a_2a_3}-3\sum_{a_3}\sum_{a_1\neq n_1}\mu_{a_1k_1a_3}+\sum\sum\sum_{(a_1,a_2)\neq(n_1,k_1)}$$

$$=4\sum_{a_3}\mu_{n_1k_1a_3}-2\sum_{a_3}\sum_{a_2\neq k_1}\mu_{n_1a_2a_3}-2\sum_{a_3}\sum_{a_1\neq n_1}\mu_{a_1k_1a_3}$$

$$+\sum_{a_3}\sum\sum_{a_2\neq k_1,a_1\neq n_1}\mu_{a_1a_2a_3}$$

27（$y_{n_1k_1}-y_{n_1}-y_{k_1}+y$）と方格（165）とのスカーラー積は $4-2-2-2-2+1+1+1+1=0$ に等しい。（165）の任意の循環置換とのスカーラー積とも又0である。かくて主効果と第1次交互作用項は偏ブロックに直交する事を知つた。

次に 1，2，3 の循環置換によつて互いに他から導き出されないと云ふ意味に於て本質的に異なるラテン方格が4けある。それを掲げると，

Ⅰ	Ⅱ	Ⅲ	Ⅳ
1 2 3	1 2 3	1 2 3	1 3 2
2 3 1	3 2 1	3 1 2	2 1 3
3 1 2	2 1 3	2 3 1	3 2 1

Ⅰから循環置換 $1\to2\to3\to1$ によつて得られる方格をⅠ′，

Ⅰ′から同じ循環置換によつて得られる方格をⅠ″とする。

同様にⅡ′，Ⅱ″，Ⅲ′，Ⅲ″，Ⅳ′，Ⅳ″を定義する。

主効果と１次の交互作用項は，これらの１２けの方格の作高和にすべて直交する。しかして，

$$\mathrm{I}+\mathrm{I}'+\mathrm{I}''=\mathrm{II}+\mathrm{II}'+\mathrm{II}''=\mathrm{III}+\mathrm{III}'+\mathrm{III}''=\mathrm{IV}+\mathrm{IV}'+\mathrm{IV}''$$

であるから，これら１２けのうち，９けが一次独立である。次に１２けの方格からの次の８けの一次結合を考へよう。

$$(166)\quad\begin{cases}\mathrm{I}-\mathrm{I}', & \mathrm{II}-\mathrm{II}', \quad \mathrm{III}-\mathrm{III}', \quad \mathrm{IV}-\mathrm{IV}' \\ \mathrm{I}+\mathrm{I}'-2\mathrm{I}'', & \mathrm{II}+\mathrm{II}'-2\mathrm{II}'', \quad \mathrm{III}+\mathrm{III}'-2\mathrm{III}'', \quad \mathrm{IV}+\mathrm{IV}'-2\mathrm{IV}''\end{cases}$$

本質的には異ならない２けの方格のスカーラー積（即ち１，２，３の循環置換によつて他から導き出せるもの）は，０である。

例へば，ⅠとⅠ′又はⅠとⅠ″のスカーラー積は０である。

よつて８けの一次結合（１６６）はすべて

$$\mathrm{I}+\mathrm{I}'+\mathrm{I}''=\mathrm{II}+\mathrm{II}'+\mathrm{II}''=\mathrm{III}+\mathrm{III}'+\mathrm{III}''=\mathrm{IV}+\mathrm{IV}'+\mathrm{IV}''$$

に直交している事が分る。更に２けの本質的に異なる方格のスカーラー積は３に等しい事を験證する事が出来る。この２とから８けの一次結合（１６６）は互に直交してゐる事が分る。よつて８けの独立な一次結合を８けの独立な２次の交互作用項として定義する事が出来る。

mけのブロックを考へ，各ブロックを偏ブロックⅠ，Ⅰ′，Ⅰ″に細分割する。

しからば，２次の交互作用項の最初の２けのみが，これらの偏ブロックに交絡される。

もしmを４で割り切れる数とし，$m/4$けのブロックについては偏ブロックⅠ，Ⅰ′，Ⅱ″を用ひ，次の$m/4$けのブロックは，Ⅱ，Ⅱ′，Ⅱ″，次の$m/4$けのブロックはⅢ，Ⅲ′，Ⅲ″，残りの$m/4$けのブロックはⅣ，Ⅳ′，Ⅳ″なる偏ブロックを用ふるならば，部分交絡法の例が得られる。