12 效用の可測性について

稲田献一

Von Neumann and Morgenstern: Theory of Games and Economic Behavior に於て效用の可測性が論ぜられて居るがその後 Marschak は Econometrica に於て Ratinal Behavior, Uncertain Prospect, and Measurable Utility なる表題の下に效用の可測性を論じて居る。この小論の目的は Marschak の論文と同様な postulate を用ひて Marschak の取扱った場合を一般化せんとすることにある。

選択の対象である commodity の数が n ヶある場合，n 次元の commodity space を得る。この空間の点とは Commodity の組合せである。即ち，砂糖1斤，米1升，麦2升，靴3足，自動車1台……といった組合せである。

扨，Marschak は commodity space の有限個の点のみが選択の対象と成る場合について考へて居る。その有限ヶ(nヶ)の点が夫々一定の確率をもって実現する prospect の集合から A なる pospect と B なる pospect の何れが好ましいかの判定を下すことが出来るものとして論を進める。即ち pospect の間に preference がある場合を考へて居る。即ち preference field の変数が commodity space の点でなく prospect としてその commodity space に於ける確率分布を用ゐこれを変数として居るこの場合 commodity space が有限個の element しか有しないから確率分布は $\{\alpha_1, \quad \alpha_n\}$ $\begin{matrix}\Sigma\alpha_i=1\\ 0\leqq\alpha_i\end{matrix}$ として表はされる。従って prospect は $n-1$ 次元の空間の bounded domain の点として考へられる。そこで一定の preference に関する postulate を設定することにより indifference な確率分布即ち prospect の集合が超平面になることを示し且つ異なる indifference の prospect の超平面が相互に平行となることを証明し，これから utility index を定め，それが更に数学的希望値に関する性質をもつときには必ず liner に表はされることを示して居る。

選択の対称が commodity space の有限個から成る場合が果して現実的であるか否かの問題はこゝでは論ぜずに commodity space が $\{(x_1, \cdots\cdots, x_n)\}(-\infty < x_i < +\infty)$ で define される場合，又はその任意の部分集合である場合（従って Marshak の取扱った場合も含まれる）を考へる，今この commodity space を X で表はす。扨 X に関する prospect とは commodity space の点が如何なる確率分布に従ふかについての洞察である。従って一つの prospect には一つの確率分布が対応するであらう。又異なる prospect には異なる確率分布が対応するであらう。

そこで X で定義される分布函数 φ_1 で表はされる prospect を今後 φ_1 で表はすことにする。次に prospect の集合即ち分布函数の集合について次の仮数を置く。

Postulate [I] prospect の集合を F とするとき F は二つ以上の要素を含むとす。

$$F \ni \varphi_1, \varphi_2 \text{ ならば } \underset{0<r<1}{r\varphi_1 + (1-r)\varphi_2} \in F \text{ である。}$$

〔分布函数 φ_1, φ_2 で表はされる prospect が共に F に属するならば $r\varphi_1 + (1-r)\varphi_2$ $0 < r < 1$ で表はされる prospect も又 F に属する〕

この postulate は Marschak の論文にはない。それは Marschak は如何なる分布函数も或る prospect に対応する分布函数であるとして居る為にこの postulate は必然的に満されて居るからである。我々は分布函数の中には prospect に対応するものが無くてもよいとして居る，即ち prospect に対応する分布函数の集合は必ずしも分布函数全体の集合とはならない。

扨Fなる *prospect* の集合が *preference* の定義域となる。即ちFに属する *prospect* 間に *preference* が定められる。*prospect* がXで定義された分布函数で表はされるから結局分布函数の集合に或る意味で順序をつけることになる。以下 *Marschak* と同様の記号を用ひよう。

Fに属する *prospect* の *preference* について次の *postulate* を置く。

[II] $F \ni \varphi_1\, \varphi_2$ なるとき次の如き関係 of が成立つ (*at least as good as*)

II a $F \ni \varphi_1\, \varphi_2$ ならば少くとも $\varphi_1\ \mathit{of}\ \varphi_2$, $\varphi_2\ \mathit{of}\ \varphi_1$ の何れかが成立つ

II b $\varphi_1\ \mathit{of}\ \varphi_2,\ \varphi_2\ \mathit{of}\ \varphi_3 \rightarrow \varphi_1\ \mathit{of}\ \varphi_3$ (全順序)

次に $\varphi_1\ \mathit{pf}\ \varphi_2 \rightleftarrows \varphi_1\ \mathit{of}\ \varphi_2$ *and not* $\varphi_2\ \mathit{of}\ \varphi_1$

$\varphi_1\ i\ \varphi_2 \rightleftarrows \varphi_1\ \mathit{of}\ \varphi_2$ *and* $\varphi_2\ \mathit{of}\ \varphi_1$

と定義する。

[III] $\varphi_1\ \mathit{pf}\ \varphi_2\ \mathit{pf}\ \varphi_3$ であれば $\varphi_2\ i\ [r\varphi_1 + (1-r)\varphi_3]$ $0 < r < 1$ なる r が存在する。

[IV] 任意の φ_1, $r\ (0 < r < 1)$ に対し、φ_2 が存在し、

$\varphi_1\ i\ [r\varphi_1 + (1-r)\varphi_2]$ で等くなる。

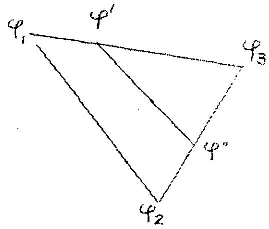
[Va] $\varphi_1\ i\ \varphi_2 \longrightarrow \varphi_1\ i\ (r\varphi_1 + (1-r)\varphi_2)$ $0 < r < 1$

[Vb] $\varphi_1\ \mathit{pf}\ \varphi_2$, φ_3 $0 < r < 1$

$\rightarrow \varphi' = (r\varphi_1 + (1-r)\varphi_3)\ \mathit{pf}\ (r\varphi_2 + (1-r)\varphi_3) = \varphi''$

[II]—[Va] 迄は *Marschak* の場合と全く同じ *postulate* であるから特に説明を要しないと思ふ。[Vb] は *Marschak* の *postulate* でも同じであるが上の *postulate* でも充分であるのでこれを用ひた。即ち、或る *prospect* (φ_1) が他の *prospect* (φ_2) よりも好ましいときこれ等が夫々同じ割合 (r) で他の一つの *prospect* (φ_3) と結合されて *prospect* (φ', φ'') となるとき

は前の *prospect* との結合の方（φ'）が後の *prospect* との結合（φ''）よりも好ましいということである



次に $F \ni \varphi_1$　$J(\varphi_1) = \{\varphi : \varphi\, i\, \varphi_1 \;\; \varphi \in F\}$ によって，φ_1 の *indifference set* を定義する．

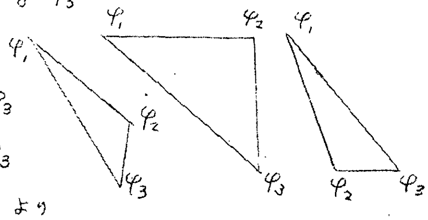
Proposition (1)　$\varphi_1 \not g \varphi_2$.　$\varphi_2 \not g \varphi_3 \rightarrow \varphi_1 \not g \varphi_3$

∵　$\varphi_1\, g\, \varphi_2$　$\varphi_2\, g\, \varphi_3 \longrightarrow \varphi_1\, g\, \varphi_3$

今　$\varphi_3\, g\, \varphi_1$ とすると　$\varphi_3\, g\, \varphi_1$　$\varphi_1\, g\, \varphi_2 \rightarrow \varphi_3\, g\, \varphi_2$ となり　$\varphi_2 \not g \varphi_3$ に矛盾　従って　$\varphi_3\, \overline{g}\, \varphi_1$　∴　$\varphi_1 \not g \varphi_3$

(2)　$\varphi_1\, i\, \varphi_2$　　$\varphi_2 \not g \varphi_3 \rightarrow \varphi_1 \not g \varphi_3$

証明は同様



(3)　$\varphi_1 \not g \varphi_2$　$\varphi_2\, i\, \varphi_3 \rightarrow \varphi_1 \not g \varphi_3$

∵　$\varphi_1\, g\, \varphi_2$　$\varphi_2\, g\, \varphi_3 \rightarrow \varphi_1\, g\, \varphi_3$

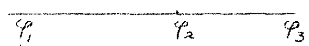
今　$\varphi_3\, g\, \varphi_1$ とすると　$\varphi_2\, g\, \varphi_3$ より

$\varphi_2\, g\, \varphi_1$ となり　$\varphi_1 \not g \varphi_2$　に矛盾

∴　$\varphi_1 \not g \varphi_3$

(4)　$\varphi_1\, i\, \varphi_2$,　$\varphi_2\, i\, \varphi_3$　$\rightarrow$　$\varphi_1\, i\, \varphi_3$

自明



indifferece set $J(\varphi_1)$ に実数　$u(\varphi_1)$ が対応し

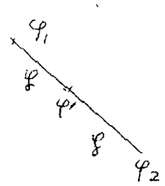
$$u(\varphi_1) \geqq u(\varphi_2) \rightleftarrows \varphi_1\, g\, \varphi_2$$

のとき　$u(\varphi_1)$ を *utility index* 又は *utility* という．

以下 *utility index* の存在並びにその形について考へる．

(5)　$\varphi_1 \not g \varphi_2$　$0 < r < 1$　$\rightarrow$ $\varphi' = (r\varphi_1 + (1-r)\varphi_2) \not g \varphi_2$

$\longrightarrow$　$\varphi_1 \not g (r\varphi_1 + (1-r)\varphi_2) = \varphi'$



∵ V_6　$\varphi_2 = \varphi_3$　又は　$\varphi_1 = \varphi_3$　と置けばよい

(6) $\varphi_1 \; i \; \varphi_2$　$\gamma<0$ 又は $\gamma>1$ のとき $\varphi_3=\gamma\varphi_1+(1-\gamma)\varphi_2 \in F$

ならば $\varphi_3 \; i \; \varphi_1$

∵ $\gamma>1$ としてよい（$\gamma<0$ のときは φ_1 と φ_2 を入れかへて $(1-\gamma)$ を γ の代りに用ふ）

$\varphi_3 \, \mathfrak{P} \, \varphi_2$ とすると $\varphi_1=\frac{1}{\gamma}\varphi_3+(1-\frac{1}{\gamma})\varphi_2$　$0<\frac{1}{\gamma}<1$

(5)より $\varphi_1 \, \mathfrak{P} \, \varphi_2$ となり矛盾

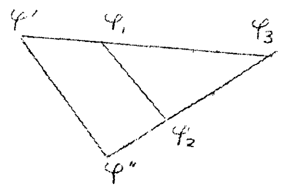
∴ $\varphi_3 \, \overline{\mathfrak{P}} \, \varphi_2$

$\varphi_2 \, \mathfrak{P} \, \varphi_3$ とすると $\varphi_1=\frac{1}{\gamma}\varphi_3+(1-\frac{1}{\gamma})\varphi_2$　$0<\frac{1}{\gamma}<1$

(5)より $\varphi_3 \, \mathfrak{P} \, \varphi_1$ となり矛盾　∴ $\varphi_2 \, \overline{\mathfrak{P}} \, \varphi_2$

∴ $\varphi_2 \; i \; \varphi_3$　　∴ $\varphi_1 \; i \; \varphi_3$

(7) $\varphi_1 \, \mathfrak{P} \, \varphi_2$,　φ_3　$\gamma>1$



$\gamma\varphi_1+(1-\gamma)\varphi_3=\varphi' \in F$

$\gamma\varphi_2+(1-\gamma)\varphi_3=\varphi'' \in F$ ならば

$\varphi' \, \mathfrak{P} \, \varphi''$

∵ $\varphi'' \, \mathfrak{P} \, \varphi'$ とすると

$\varphi_1=\frac{1}{\gamma}\varphi'+(1-\frac{1}{\gamma})\varphi_3$　　$0<\frac{1}{\gamma}<1$

$\varphi_2=\frac{1}{\gamma}\varphi''+(1-\frac{1}{\gamma})\varphi_3$

∇b より $\varphi_2 \, \mathfrak{P} \, \varphi_1$ となり矛盾

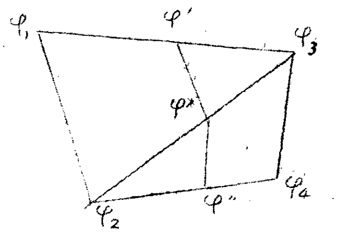
$\varphi'' \; i \; \varphi'$ とすると

∇a より $\varphi_2 \; i \; \varphi_1$ となり矛盾

∴ $\varphi' \, \mathfrak{P} \, \varphi''$

(8) $\varphi_1 \, \mathfrak{P} \, \varphi_2$,　$\varphi_3 \, \mathfrak{P} \, \varphi_4$　$0<\gamma<1$ とすると

$(\gamma\varphi_1+(1-\gamma)\varphi_3) \, \mathfrak{P} \, (\gamma\varphi_2+(1-\gamma)\varphi_4)$



∵ ∇b より

$\varphi'=(\gamma\varphi_1+(1-\gamma)\varphi_3) \, \mathfrak{P} \, (\gamma\varphi_2+(1-\gamma)\varphi_3)=\varphi^*$

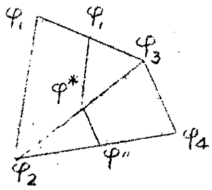
∇b より

$\varphi^*=(\gamma\varphi_2+(1-\gamma)\varphi_3) \, \mathfrak{P} \, (\gamma\varphi_2+(1-\gamma)\varphi_4)=\varphi''$

∴ $(\gamma\varphi_1+(1-\gamma)\varphi_3) \, \mathfrak{P} \, (\gamma\varphi_2+(1-\gamma)\varphi_4)$

(9) $\varphi_1 \wp \varphi_2 \quad \varphi_3 \, i \, \varphi_4 \quad 0<r<1$ ならば

$\varphi' = (r\varphi_1+(1-r)\varphi_3) \wp (r\varphi_2+(1-r)\varphi_4) = \varphi''$.

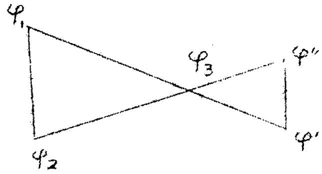


∵ (8) と同様

(10) $\varphi_1 \wp \varphi_2$, $\varphi_3 \quad r<0$

$r\varphi_1 + (1-r)\varphi_3 = \varphi' \in F$

$r\varphi_2 + (1-r)\varphi_3 = \varphi'' \in F$ ならば



$\varphi'' \wp \varphi'$ ∵ $\varphi' \wp \varphi''$ とすると

$$\varphi_3 = \frac{1}{1-r}\varphi' + \frac{-r}{1-r}\varphi_1$$

$$\varphi_3 = \frac{1}{1-r}\varphi'' + \frac{-r}{1-r}\varphi_2$$

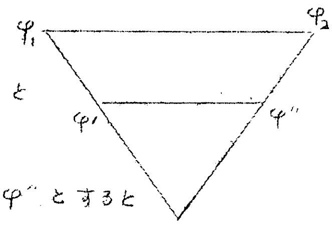
$$0 < \frac{1}{1-r} < 1$$

(8)より $\varphi_3 \wp \varphi_3$ となり矛盾

$\varphi' \, i \, \varphi''$ とすると

(9)より $\varphi_3 \wp \varphi_3$ となり矛盾

∴ $\varphi'' \wp \varphi'$



(11) $\varphi_1 \, i \, \varphi_2 \quad \varphi_3 \quad (0<r<1)$ とすると

$(r\varphi_3+(1-r)\varphi_1) \, i \, (r\varphi_3+(1-r)\varphi_2)$

∵ $r\varphi_3+(1-r)\varphi_1 = \varphi'$, $r\varphi_3+(1-r)\varphi_2 = \varphi''$ とすると

$$\varphi_1 = \frac{1}{1-r}\varphi' + \frac{-r}{1-r}\varphi_3$$

$$\varphi_2 = \frac{1}{1-r}\varphi'' + \frac{-r}{1-r}\varphi_3 \qquad \frac{1}{1-r} > 1$$ であるから

$\varphi' \wp \varphi''$ ならば (7) より

$\varphi_1 \wp \varphi_2$ となり矛盾

$\varphi'' \wp \varphi'$ ならば

$\varphi_2 \wp \varphi_1$ となり矛盾　　∴ $\varphi' \, i \, \varphi''$

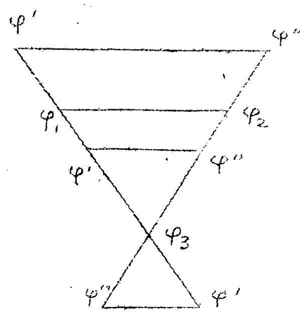
この (11) は *Marschak* の IV_1 の *postulate* である

(12) $\varphi_1 \, i \, \varphi_2 \quad \varphi_3 \quad r$ 実数

$r\varphi_3 + (1-r)\varphi_1 = \varphi' \in F$

$r\varphi_3+(1-r)\varphi_2=\varphi''\in F$ ならば

$\varphi' \, i \, \varphi''$



∵ $\varphi' \succ \varphi''$ とすると $r=0, 1$ の場合は自明故 $r\neq 0, \neq 1$ とする、

$$\varphi_1=\frac{1}{1-r}\varphi'+\frac{-r}{1-r}\varphi_3$$

$$\varphi_2=\frac{1}{1-r}\varphi''+\frac{-r}{1-r}\varphi_3$$

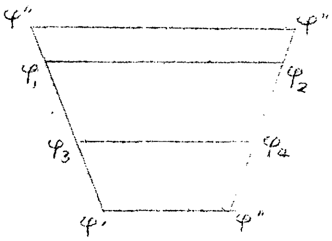
$0<\frac{1}{1-r}<1$ ならば V_6 より $\varphi_1 \succ \varphi_2$ となり矛盾

$1<\frac{1}{1-r}$ ならば (11) の場合となり

$0>\frac{1}{1-r}$ ならば (10) より $\varphi_2 \succ \varphi_1$ となり矛盾

同様に $\varphi'' \succ \varphi'$ として矛盾が生ずる.

∴ $\varphi' \, i \, \varphi''$



(13) $\varphi_1 \, i \, \varphi_2$, $\varphi_3 \, i \, \varphi_4$ r 実数

$\varphi'=r\varphi_1+(1-r)\varphi_3\in F$

$\varphi''=r\varphi_2+(1-r)\varphi_4\in F$ とすると

$\varphi' \, i \, \varphi''$

∵ $0<r<1$ の場合は (8) から出る $r=0, 1$ の場合は自明

$1<r$ $\varphi_1=\frac{1}{r}\varphi'+(1-\frac{1}{r})\varphi_3$

$\varphi_2=\frac{1}{r}\varphi''+(1-\frac{1}{r})\varphi_4$

$\varphi' \succ \varphi''$ とすると

$$\varphi_1 \; i \; \left(\frac{1}{r}\varphi'+(1-\frac{1}{r})\varphi_4\right) \succ \left(\frac{1}{r}\varphi''+(1-\frac{1}{r})\varphi_4\right)=\varphi_2$$

∴ $\varphi_1 \succ \varphi_2$ となり矛盾

$\varphi'' \succ \varphi'$ とするとも同様 ∴ $\varphi' \, i \, \varphi''$

$r<0$ の場合は $1-r=r'>1$ とし φ_1 の代りに φ_3 φ_2 の代りに φ_4 を考へる.

(14) $J(\varphi) \ni \varphi_1, \varphi_2$ 　　r 実数

$r\varphi_1 + (1-r)\varphi_2 \in F$ 　ならば

$r\varphi_1 + (1-r)\varphi_2 \in J(\varphi)$

∵ 　V_a，6より自明

(15) $\varphi \nsim \psi$ 　ならば　$J(\varphi) \wedge J(\psi) = 0$

自明

(16) $\varphi \nsim \psi$ とすると　$F \ni \chi$ に対し　$J(\varphi) \ni \varphi_1$，$J(\psi) \ni \psi_1$

及び実数 r が存在し

$\chi \; i \, (r\varphi_1 + (1-r)\psi_1) \in F$

となり且つ r は φ, ψ, χ にのみ依存し，

φ_1, ψ_1 には依存しない

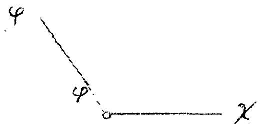
∵ 　(a) 　$\varphi \nsim \psi \nsim \chi$ の場合

Ⅲより　$r'\varphi + (1-r')\chi = \psi' \, i \, \psi$ なる ψ', r' が存在する

∴ 　$\psi' \in J(\psi)$

$$\chi = \frac{-r'}{1-r'}\varphi + \frac{1}{1-r'}\psi' \qquad \frac{-r'}{1-r'} = r \text{ と置けば}$$

$\chi = r\varphi + (1-r)\psi'$

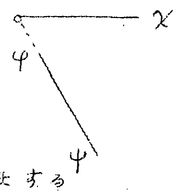


∴ 　$\varphi_1 = \varphi$，　$\psi_1 = \psi'$ と置けばよい

(b) 　$\chi \nsim \varphi \nsim \psi$ の場合

Ⅲより　$r'\chi + (1-r')\psi = \varphi' \, i \, \varphi$ となる φ', r' が存在する

$\chi = \frac{1}{r'}\varphi' + (1-\frac{1}{r'})\psi$

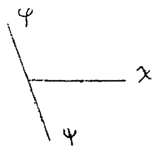


$\varphi_1 = \varphi'$，　$\psi_1 = \psi$，　$r = \frac{1}{r'}$ 　と置けばよい

(c) 　$\varphi \nsim \chi \nsim \psi$ の場合

Ⅲより　$r\varphi + (1-r)\psi = \chi' \, i \, \chi$ なる χ', r が存在する

$\varphi_1 = \varphi$，　$\psi_1 = \psi$，　$r = r$ 　と置けばよい。



• 次に　$\chi \; i \; r_1\varphi_1 + (1-r_1)\psi_1 = \chi_1$

$\chi \; i \; r_2\varphi_2 + (1-r_2)\psi_2 = \chi_2$ とする，

$\varphi_1, \varphi_2 \in J(\varphi)$，　$\psi_1, \psi_2 \in J(\psi)$

(13) より　$\chi_1 \; i \; \chi_2$

$r_1 \neq r_2$ とすると　$r_1 > r_2$ 又は $r_2 > r_1$　$r_1 > r_2$ として考へても一般性を失はぬ。(a)　$r_1 > 1 > r_2$　とすると.

$$\varphi_1 = \frac{1}{r_1}\chi_1 + \left(1 - \frac{1}{r_1}\right)\psi_1 \qquad 0 < \frac{1}{r_1} < 1$$

$\varphi_1 \, P \, \chi_1$　とすると　$\varphi_1 \, P \, \psi_1$　より　$\varphi_1 \, P \, \varphi_1$　となり矛盾

$\varphi_1 \, i \, \chi_1$　としても同様　　$\therefore$　$\chi_1 \, P \, \varphi_1$

$$\chi_2 = r_2 \varphi_2 + (1 - r_2)\psi_2$$

(i)　$1 > r_2 > 0$　ならば　$\varphi_2 \, P \, \chi_2$　となり

$\chi_1 \; i \; \chi_2$　に矛盾

(ii)　$r_2 < 0$　ならば

$$\psi_2 = \frac{1}{1 - r_2}\chi_2 - \frac{r_2}{1 - r_2}\varphi_2 \qquad 0 < \frac{1}{1 - r_2} < 1 \text{ より}$$

$\psi_2 \, P \, \chi_2$　となり

$\chi_1 \, P \, \varphi_1 \, P \, \psi_2 \, P \, \chi_2$　から矛盾

(b)　$1 > r_1 > 0 > r_2$　とするも前と同様に矛盾

(c)　$r_1 > r_2 > 1$　とすると

$$\chi_2' = r_2 \varphi_1 + (1 - r_2)\psi_1 = \frac{1 - r_2}{1 - r_1}\chi_1 + \frac{r_2 - r_1}{1 - r_1}\varphi_1$$

$1 > \dfrac{1 - r_2}{1 - r_1} > 0$　より　$\chi_2' \in F$,　$\chi_2' \; i \; \chi_2$　(13) より

又　$\chi_1 \, P \, \varphi_1$　から　$\chi_1 \, P \, \chi_2'$　となり矛盾

(d)　$1 > r_1 > r_2 > 0$　とすると

$$\chi_2' = (r_2 \varphi_1 + (1 - r_2)\psi_1) \; i \; (r_2 \varphi_2 + (1 - r_2)\psi_2) = \chi_2 \; i \; \chi_1$$

$$\chi_2' = \frac{r_2}{r_1}\chi_1 + \left(1 - \frac{r_2}{r_1}\right)\psi_1$$

$1 > r_1 > 0$　より　$\chi_1 \, P \, \psi_1$　$\therefore$　$\chi_1 \, P \, \chi_2' \; i \; \chi_2$　となり矛盾

(e)　$0 > r_1 > r_2$

$$\psi_1 = \frac{1}{1 - r_1}\chi_1 + \frac{-r_1}{1 - r_1}\varphi_1 \qquad 0 < \frac{1}{1 - r_1} < 1$$

より　$\psi_1 \mathrel{\mathfrak{p}} \chi_1$　となる。

$\chi_1 = \frac{\gamma_1}{\gamma_2}\chi_1' + (1 - \frac{\gamma_1}{\gamma_2})\ \psi_1$　　$0 < \frac{\gamma_1}{\gamma_2} < 1$　より　$\psi_1 \mathrel{\mathfrak{p}} \chi_1$ を用ひて

$\chi_1 \mathrel{\mathfrak{p}} \chi_1'$　となり矛盾

故に　$\gamma_1 \ngtr \gamma_2$　　同様に　$\gamma_2 \ngtr \gamma_1$

$\therefore\ \gamma_1 = \gamma_2$

(17)　$\chi_1 \mathrel{i} (\gamma_1 \varphi_1 + (1-\gamma_1)\ \psi_1)$

$\chi_2 \mathrel{i} (\gamma_2 \varphi_2 + (1-\gamma_2)\psi_2)$　　$\varphi_1 \mathrel{i} \psi_1,\ \varphi_2 \mathrel{i} \psi_2,\ \varphi_1 \mathrel{\mathfrak{p}} \varphi_2$　で

$\gamma_1 > \gamma_2$　ならば　$\chi_1 \mathrel{\mathfrak{p}} \chi_2$　及びその逆

$\because$　前半は (16) の後半の証明よりわかる

逆　$\chi_1 \mathrel{\mathfrak{p}} \chi_2$　とするとき　$\gamma_1 = \gamma_2$ なら $\chi_1 \mathrel{\mathfrak{p}} \chi_2$　となり

$\gamma_1 < \gamma_2$ なら $\chi_2 \mathrel{\mathfrak{p}} \chi_1$　となる

$\therefore\ \gamma_1 > \gamma_2$　（転換法による）

utility index　　$u(\varphi)$　　$(\varphi \in F)$

$\varphi_1,\ \varphi_2 \in J(\varphi) \rightarrow u(\varphi_1) = u(\varphi_2)$

$\varphi_1 \mathrel{\mathfrak{p}} \varphi_2 \qquad\qquad \rightarrow u(\varphi_1) > u(\varphi_2)$

$u(\varphi_1) = C_1 \qquad\qquad u(\varphi_2) = C_2$

$\varphi \in F$ とすると (16) より

$J(\varphi_1) \ni \varphi',\quad J(\varphi_2) \ni \varphi''$

$\varphi \mathrel{i} \gamma\varphi' + (1-\gamma)\ \varphi''$

$\therefore\ u(\varphi) = u(\gamma\varphi' + (1-\gamma)\varphi'')$　γ は $\varphi_1\ \varphi_2$ にのみ依存。

$= f(\gamma, \varphi', \varphi'')$

$\varphi' \in J(\varphi_1),\ \ \varphi'' \in J(\varphi_2)$ であれば　φ', φ'' の変動に対し

$u(\varphi)$ は不変

$= f'(\gamma,\ J(\varphi_1),\ J(\varphi_2))$

$J(\varphi_1)$ と $u(\varphi_1)$ とは一対一対応がつく（(15) より）

$= F(\gamma,\ u(\varphi_1),\ u(\varphi_2))$

$= F(r, C_1, C_2)$

依って *utility index* は必ず上の形に書くことが出来る

(18) $F(r, C_1, C_2)$ は r の単調増加函数である。

$\because$ $x_1 = r_1 \varphi_1 + (1 - r_1)\psi_1$

$x_2 = r_2 \varphi_2 + (1 - r_2)\psi_2$ 　$\varphi_1 \, i \, \varphi_2$, $\psi_1 \, i \, \psi_2$, $r_1 > r_2$ とすると

(17) より $x_1 \mathcal{P} x_2$ 　$\therefore$ $u(x_1) > u(x_2)$

然るに $u(x_1) = F(r_1, C_1, C_2)$

$u(x_2) = F(r_2, C_1, C_2)$

$\therefore$ $F(r_1, C_1, C_2) > F(r_2, C_1, C_2)$

特に $F(0, C_1, C_2) = C_2$ 　$F(1, C_1, C_2) = C_1$

(19) 逆に $F(0, C_1, C_2) = C_2$ $F(1, C_1, C_2) = C_1$ $F(r, C_1, C_2)$ は r の単調増加函数ならば $F(r, C_1, C_2)$ は *utility index* に用ゐられる。

$\because$ *utility index* の性質として要求するものは

$\psi \mathcal{P} \varphi \rightarrow u(\psi) > u(\varphi)$

$\psi \, i \, \varphi \rightarrow u(\psi) = u(\varphi)$

$F \ni \varphi_1 \mathcal{P} \varphi_2$ を任意にとり

$J(\varphi_1) \longleftrightarrow C_1$

$J(\varphi_2) \longleftrightarrow C_2$

$F \ni \varphi$ をとる $\varphi = r\varphi' + (1 - r)\varphi''$ なる $\varphi' \in J(\varphi_1)$, $\varphi'' \in J(\varphi_2)$ 及び r の存在は (16) よりわかる

今 $u(\varphi) = F(r, C_1, C_2)$ とするならば $u(\varphi)$ は *utility index* となる。

$\because$ $\psi \mathcal{P} \varphi$ ならば

$\psi = r^* \varphi^* + (1 - r^*)\varphi^{**}$ なる r^*, $\varphi^* \in J(\varphi_1)$ $\varphi^{**} \in J(\varphi_2)$

$\varphi = r\varphi' + (1 - r)\varphi''$ なる r, $\varphi' \in J(\varphi_1)$ $\varphi'' \in J(\varphi_2)$

が存在し，且つ $r^* > r$ となることは (17) の逆より出る。

従って $F(r, C_1, C_2) < F(r^*, C_1, C_2)$

$\therefore$ $u(\varphi) < u(\psi)$

又　$\varphi \, i \, \psi$　ならば

$\varphi = r\varphi' + (1-r)\varphi''$

$\psi = r^*\varphi^* + (1-r^*)\varphi^{**}$　$\varphi', \varphi^* \in J(\varphi_1)$　$\varphi'', \varphi^{**} \in J(\varphi_2)$

であるから　$r = r^*$ となる（$r > r^*$ なら $\varphi \, \mathrm{P} \, \psi$, $r < r^*$ なら $\psi \, \mathrm{P} \, \varphi$ となるから）

$u(\varphi) = u(\psi)$

依って　$u(\psi)$ は *utility index* である。即ち $F(r, C_1, C_2)$ は *utility index* として用ひ得る。

sure prospect とは commodity space の一点 $(x_1, \cdots\cdots, x_n)$ が必ず生ずるといふ *prospect* のこととする。

今後 *sure prospect* はFに含まれるとして進む。

$(x_1, \cdots\cdots, x_n)$ なる *sure prospect* の *utility index* を $u(x_1, \cdots\cdots x_n)$ と書く。　$F \ni \varphi(x_1, \cdots\cdots x_n)$ は X で定義された分布函数である。

今次の如き条件を満足する *utility index* を考へる。

$$\int u(x_1, \cdots\cdots x_n)\, d\varphi(x_1, \cdots\cdots x_n) = u(\varphi)$$ (*Lebesgue-Stieltjes integral*)

任意の *prospect* φ の *utility* が *sure prospect* の *utility* の *prospect* の分布函数に依る希望値に等しい。

commodity space が有限又は可附番無限等の場合には $\int$ の代りに Σ を用ひればよい、この意味については *Marschak* の論文の場合と同様である。

扨　$\int u(x_1, \cdots\cdots, x_n)\, d\varphi = u(\varphi)$　であると。

$$\varphi \, i \, (r\varphi_1 + (1-r)\varphi_2) \in F$$

$$\begin{aligned}
u(\varphi) &= u(r\varphi_1 + (1-r)\varphi_2) = \int u(x_1 \cdots\cdots x_n)\, d(r\varphi_1 + (1-r)\varphi_2) \\
&= r\int u(x_1, \cdots\cdots, x_n)\, d\varphi_1 + (1-r)\int u(x_1, \cdots\cdots x_n)\, d\varphi_2 \\
&= r\, u(\varphi_1) + (1-r)\, u(\varphi_2) \\
&= rC_1 + (1-r)C_2 = r(C_1 - C_2) + C_2
\end{aligned}$$

即ち r について linear な utility として表はされる。希望値についての条件が充されるときには utility index は $F(r; C_1, C_2) \doteqdot r(C_1 - C_2) + C_2$ となる。C_1, C_2 が任意の常数であり。これを適当に定めることにより index が異なるものが可能となる。

今　$u'(\varphi_1) = d_1$

$u'(\varphi_2) = d_2$　とする。

$u'(\varphi) = \int u'(x_1 \cdots x_n)\, d\varphi$　であるとすると

$u'(\varphi) = r d_1 + (1-r) d_2 = r(d_1 - d_2) + d_2$

$$\therefore \quad \frac{u'(\varphi) - d_2}{u(\varphi) - C_2} = \frac{d_1 - d_2}{C_1 - C_2}$$

$$u'(\varphi) = \frac{d_1 - d_2}{C_1 - C_2}\, u(\varphi) - \frac{C_2 d_1 - C_1 d_2}{C_1 - C_2}$$

従って希望値の條件を充す utility index は一つの utility index を linear に変換したものとなる。逆に一つの希望値の條件を充す utility index を linear に変換した場合

$u(\varphi) = \int u(x_1 \cdots x_n)\, d\varphi$

$a\,u(\varphi) + b$ も $a > 0$ ならばやはり希望値の條件を充す utility index になる。（$a < 0$ であると希望値の條件を満すけれども utility index でなくなる）

従って一つの utility index が希望値の條件を満足するための必要且つ充分なる條件はそれが linear な utility index として表はされることである。