(4) 級内相関係数の標本分布の解析的な導出について

阪大理学部数学教室　小川　潤次郎

級内相関係数（Intra-class Correlation Coefficient）の標本分布は R.A. Fisher によってその論文 "On the "Probable Error" of a Coefficient of Correlation deduced from a Small Sample" Metron 1. (1921) で求められたが，例によって R.A. Fisher の方法は余りにも直観的であって，必ずしも何人にも理解されるとは思われない。級間相関係数（Inter-class Correlation Coefficient）の標本分布も Fisher が幾何的直観的な方法で求めたが例えば H. Cramér の有名な教科書

Mathematical Methods of Statistics. 1946

29. 7. p. 398

に解析的な証明が出ている。それで級内相関係数の場合にも解析的な証明を考えることは少くとも教育的な興味はあるであろう。

先づ Family 数 $s=2$ の場合から始めよう。このときの母集団分布は

$$df=\frac{1}{2\pi\sigma\sqrt{1-\rho^2}}e^{-\frac{1}{2\sigma^2(1-\rho^2)}\left\{(x-m)^2-2\rho(x-m)(x'-m)+(x'-m)^2\right\}}dxdx'$$

で，こゝで m は母平均，σ は母標準偏差，ρ が母集団の級内相関係数である。必要な統計量の定義は次の通り

$$n\cdot m_{20}=S(x-\bar{x})^2,\ n\cdot m_{02}=S(x'-\bar{x}')^2,\ n\cdot m_{11}=S(x-\bar{x})(x'-\bar{x}'),$$

$$n\cdot\bar{x}=Sx,\qquad n\cdot\bar{x}'=Sx'$$

$$2n\cdot\bar{\bar{x}}=S(x+x')$$

$$2n\mu^2=S\left\{(x-\bar{\bar{x}})^2+(x'-\bar{\bar{x}})^2\right\},$$

$$n\mu^2 r=S(x-\bar{\bar{x}})(x'-\bar{\bar{x}}).$$

この r が標本の級内相関係数である。　次の関係式は明かであろう。

$$2\mu^2=m_{20}+m_{02}+\frac{1}{2}(\bar{x}-\bar{x}')^2$$

$$\mu^2 r=\qquad m_{11}-\frac{1}{4}(\bar{x}-\bar{x}')^2$$

$$\bar{\bar{x}}=\frac{1}{2}(\bar{x}+\bar{x}')$$

良く知られたように，$(\bar{x},\bar{x}')$ と (m_{20},m_{11},m_{02}) とは互に独立であつて，その分布は夫々

$$\frac{n}{2\pi\sigma\sqrt{1-\rho^2}}e^{-\frac{n}{2\sigma^2(1-\rho^2)}\left\{(\bar{x}-m)^2-2\rho(\bar{x}-m)(\bar{x}'-m)+(\bar{x}'-m)^2\right\}}d\bar{x}\,d\bar{x}'$$

及び

$$\frac{n^{n-1}}{4\pi\Gamma(n-2)}\cdot\frac{(m_{20}m_{02}-m_{11}^2)^{\frac{n-4}{2}}}{\sigma^{n-1}(1-\rho^2)^{\frac{n-1}{2}}}e^{-\frac{n}{2\sigma^2(1-\rho^2)}(m_{20}+m_{02}-2\rho m_{11})}dm_{20}dm_{02}dm_{11}$$

である。

よつて $\bar{x},\bar{x}',m_{20},m_{02},m_{11}$ の同時分布は定数因子を無視すれば

$$(m_{20}m_{02}-m_{11}^2)^{\frac{n-4}{2}}e^{-\frac{n}{2\sigma^2(1-\rho^2)}\left\{(\bar{x}-m)^2-2\rho(\bar{x}-m)(\bar{x}'-m)+(\bar{x}'-m)^2+m_{20}+m_{02}-2\rho m_{11}\right\}}d\bar{x}d\bar{x}'dm_{20}dm_{02}dm_{11}\tag{1}$$

となる。

こゝで上の関係式を用いると

$$(\bar{x}-m)^2-2\rho(\bar{x}-m)(\bar{x}'-m)+(\bar{x}'-m)^2+m_{20}+m_{02}-2\rho m_{11}$$

$$=2(1-\rho)(\bar{\bar{x}}-m)^2+2\mu^2(1-\rho r)$$

となるから，(1) 式の指数函数の因子は

$$e^{-\frac{n}{\sigma^2(1-\rho^2)}(\bar{\bar{x}}-m)^2-\frac{n(1-\rho r)}{\sigma^2(1-\rho^2)}\mu^2} \qquad (2)$$

となる。こゝで次のような変数変換をする。

$$\left.\begin{aligned} \xi &= \bar{x} \\ \bar{\bar{x}} &= \frac{1}{2}\bar{x}+\frac{1}{2}\bar{x}' \\ \eta &= m_{20} \\ 2\mu^2 &= \frac{1}{2}(\bar{x}-\bar{x}')^2+m_{20}+m_{02} \\ \mu^2 r &= -\frac{1}{4}(\bar{x}-\bar{x}')^2+m_{11} \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

この変換の Jacobian を計算すると

$$\frac{\partial(\xi,\bar{\bar{x}},\eta,\mu,r)}{\partial(\bar{x},\bar{x}',m_{20},m_{02},m_{11})}=\frac{1}{8\mu^3} \qquad (4)$$

よつて，ξ，$\bar{\bar{x}}$，η，μ，r の同時分布は定数因子を無視すれば

$$(m_{20}m_{02}-m_{11}^2)^{\frac{n-4}{2}}e^{-\frac{n}{\sigma^2(1-\rho^2)}(\bar{\bar{x}}-m)^2-\frac{n(1-\rho r)}{\sigma^2(1-\rho^2)}\mu^2}\mu^3 d\xi d\bar{\bar{x}}\mu dr \qquad (5)$$

さて

$$m_{20}m_{02}-m_{11}^2=\eta\left(2\mu^2-\eta-\frac{1}{2}(\bar{x}-\bar{x}')^2\right)-\left(\mu^2 r+\frac{1}{4}(\bar{x}-\bar{x}')^2\right)^2$$

$$=\mu^4(1-r^2)-\frac{1}{2}\mu^2(1+r)(\bar{x}-\bar{x}')^2-(\eta-\mu^2+\frac{1}{4}(\bar{x}-\bar{x}')^2)^2$$

$$=\mu^4(1-r^2)-2\mu^2(1+r)(\xi-\bar{\bar{x}})^2-(\eta-\mu^2+(\xi-\bar{\bar{x}})^2)^2$$

$$=\mu^4(1-r^2)\left(1-2\frac{(\xi-\bar{\bar{x}})^2}{\mu^2(1-r)}\right)\left\{1-\left(\frac{\eta-\mu^2+(\xi-\bar{\bar{x}})^2}{\mu^2\sqrt{(1-r^2)\left(1-2\frac{(\xi-\bar{\bar{x}})^2}{\mu^2(1-r)}\right)}}\right)^2\right\}$$

従って

$$(m_{20}m_{02}-m_{11}^2)^{\frac{n-4}{2}}=\mu^{2n-8}(1-r^2)^{\frac{n-4}{2}}\left(1-2\frac{(\xi-\bar{\bar{x}})^2}{\mu^2(1-r)}\right)^{\frac{n-4}{2}}$$

$$\times\left\{1-\left(\frac{\eta-\mu^2+(\xi-\bar{\bar{x}})^2}{\mu^2\sqrt{(1-r^2)\left(1-2\frac{(\xi-\bar{\bar{x}})^2}{\mu^2(1-r)}\right)}}\right)^2\right\}^{\frac{n-4}{2}} \tag{6}$$

先づ

$$u=\frac{\eta-\mu^2+(\xi-\bar{\bar{x}})^2}{\mu^2\sqrt{(1-r^2)\left(1-2\frac{(\xi-\bar{\bar{x}})^2}{\mu^2(1-r)}\right)}}$$

とおくと

$$\int\left\{1-\left(\frac{\eta-\mu^2+(\xi-\bar{\bar{x}})^2}{\mu^2\sqrt{(1-r^2)\left(1-2\frac{(\xi-\bar{\bar{x}})^2}{\mu^2(1-r)}\right)}}\right)^2\right\}^{\frac{n-4}{2}}d\eta$$

$$=\mu^2\sqrt{(1-r^2)\left(1-2\frac{(\xi-\bar{\bar{x}})^2}{\mu^2(1-r)}\right)}\int_{-1}^{1}(1-u^2)^{\frac{n-4}{2}}du$$

であるから (5)から η を Integrate out すると

$$e^{-\frac{n}{\sigma^2(1+\rho)}(\bar{\bar{x}}-m)^2}e^{-\frac{n(1-\rho r)}{\sigma^2(1-\rho^2)}\mu^2}\mu^{2n-3}(1-r^2)^{\frac{n-3}{2}}\left(1-2\frac{(\xi-\bar{\bar{x}})^2}{\mu^2(1-r)}\right)^{\frac{n-3}{2}}d\mu\,dr\,d\xi\,d\bar{\bar{x}} \tag{7}$$

次に同様にして ξ を Integrate out すると

$$e^{-\frac{n}{\sigma^2(1+\rho)}(\bar{\bar{x}}-m)^2}d\bar{\bar{x}}\;e^{-\frac{n(1-\rho r)}{\sigma^2(1-\rho^2)}\mu^2}\mu^{2n-2}(1+r)^{\frac{n-3}{2}}(1-r)^{\frac{n-2}{2}}d\mu\,dr \tag{8}$$

よつて，μ，r の同様分布は定数因子を無視すれば

$$e^{-\frac{n(1-\rho r)}{\sigma^2(1-\rho^2)}\mu^2}\mu^{2n-2}(1+r)^{\frac{n-3}{2}}(1-r)^{\frac{n-2}{2}}d\mu\,dr. \tag{9}$$

これから μ を Integrate out して r の分布は

$$(1-\rho r)^{-(n-\frac{1}{2})}(1-r)^{\frac{n-2}{2}}(1+r)^{\frac{n-3}{2}}dr \tag{10}$$

に比例する。

$s \geqq 3$ の場合には、このような直接的な方法では出来ない。

母集団分布は定数因子を無視すれば

$$e^{-\frac{1}{2\sigma^2(1-\rho)(1+\overline{s-1}\cdot\rho)}\left\{(1+\overline{s-2}\cdot\rho)\underset{\alpha}{S}(x^{(\alpha)}-m)^2-2\rho\underset{\alpha<\beta}{S}(x^{(\alpha)}-m)(x^{(\beta)}-m)\right\}}dx^{(1)}\cdots dx^{(s)} \tag{11}$$

$$n\cdot\bar{x}^{(\alpha)} = S\,x^{(\alpha)}$$

$$\alpha,\beta = 1,\cdots\cdots,s$$

$$n\cdot l_{\alpha\beta} = S(x^{(\alpha)}-\bar{x}^{(\alpha)})(x^{(\beta)}-\bar{x}^{(\beta)})$$

とおくと，

$$s\,\bar{x} = S\,\bar{x}^{(\alpha)}$$

$$\begin{aligned} s\mu^2 &= \underset{\alpha}{S}\frac{1}{n}S(x^{(\alpha)}-\bar{x})^2 \\ &= \underset{\alpha}{S}\,l_{\alpha\alpha}+\underset{\alpha}{S}(\bar{x}^{(\alpha)}-\bar{x})^2, \end{aligned} \tag{12}$$

$$s(s-1)\mu^2 r = \underset{\alpha\neq\beta}{S}\frac{1}{n}S(x^{(\alpha)}-\bar{x})(x^{(\beta)}-\bar{x}) = \underset{\alpha\neq\beta}{S}l_{\alpha\beta}+\underset{\alpha\neq\beta}{S}(\bar{x}^{(\alpha)}-\bar{x})(\bar{x}^{(\beta)}-\bar{x})$$

ところで，$(\bar{x}^{(1)},\cdots\cdots,\bar{x}^{(s)})$ と $(l_{11},\cdots\cdots,l_{ss-1})$ とは互に独立で，その分布は夫々

$$e^{-\frac{n}{2\sigma^2(1-\rho)(1+\overline{s-1}\cdot\rho)}\left\{(1+\overline{s-2}\cdot\rho)\underset{\alpha}{S}(\bar{x}^{(\alpha)}-m)^2-2\rho\underset{\alpha<\beta}{S}(\bar{x}^{(\alpha)}-m)(\bar{x}^{(\beta)}-m)\right\}}d\bar{x}^{(1)}\cdots d\bar{x}^{(s)}$$

及び

$$\left|l_{\alpha\beta}\right|^{\frac{n-s-2}{2}}e^{-\frac{n}{2\sigma^2(1-\rho)(1+\overline{s-1}\cdot\rho)}\left\{(1+\overline{s-1}\cdot\rho)\underset{\alpha}{S}l_{\alpha\alpha}-2\rho\underset{\alpha<\beta}{S}l_{\alpha\beta}\right\}}dl_{11}\cdots dl_{s,s-1}$$

に比例する。

こゝで μ^2 と $\mu^2 r$ の同時分布の $m.g.f.$ を $\varphi(t,u)$ とする。即ち

$$\varphi(t,u) = E(e^{\mu^2 t+\mu^2 ru}) = E(e^{s\mu^2\frac{t}{s}+s(s-1)\mu^2 r\frac{u}{s(s-1)}}) \tag{13}$$

であるから

$$D \equiv \sigma^2(1-\rho)(1+\overline{s-1}\cdot\rho)$$

$$\xi^{(\alpha)} = \bar{x}^{(\alpha)} - m, \quad s\,\bar{\xi} = \underset{\alpha}{S}\,\xi^{(\alpha)}$$

とおくと

$$\varphi(t,u) \propto \int |l_{\alpha\beta}|^{\frac{n-s-2}{2}} e^{-\frac{n}{2D}\left\{(1+\overline{s-2}\cdot\rho-\frac{2D}{n}\frac{t}{s})\underset{\alpha}{S}\,l_{\alpha\alpha}-2(\rho+\frac{2D}{n}\frac{u}{s(s-1)})\underset{\alpha<\beta}{S}\,l_{\alpha\beta}\right\}} dl$$

$$\times \int e^{-\frac{n}{2D}\left\{(1+\overline{s-2}\cdot\rho)\underset{\alpha}{S}\,\xi^{(\alpha)2}-2\rho\underset{\alpha<\beta}{S}\,\xi^{(\alpha)}\xi^{(\beta)}-\frac{2D}{n}\frac{t}{s}\underset{\alpha}{S}(\xi^{(\alpha)}-\bar{\xi})^2-\frac{4D}{n}\frac{u}{s(s-1)}\underset{\alpha<\beta}{S}(\xi^{(\alpha)}-\bar{\xi})(\xi^{(\beta)}-\bar{\xi})\right\}} d\xi$$

(14)

となる。　これを計算すると

$$\varphi(t,u) \propto$$

$$\begin{vmatrix} 1+\overline{s-2}\cdot\rho-\frac{2D}{n}\frac{t}{s} & -(\rho+\frac{2D}{n}\frac{u}{s(s-1)}) & \cdots & -(\rho+\frac{2D}{n}\frac{u}{s(s-1)}) \\ -(\rho+\frac{2D}{n}\frac{u}{s(s-1)}) & 1+\overline{s-2}\cdot\rho-\frac{2D}{n}\frac{t}{s} & \cdots & -(\rho+\frac{2D}{n}\frac{u}{s(s-1)}) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -(\rho+\frac{2D}{n}\frac{u}{s(s-1)}) & -(\rho+\frac{2D}{n}\frac{u}{s(s-1)}) & \cdots & 1+\overline{s-2}\cdot\rho-\frac{2D}{n}\frac{t}{s} \end{vmatrix}^{-\frac{n-1}{2}}$$

$$\times \begin{vmatrix} 1+\overline{s-2}\cdot\rho-\frac{2D}{ns^2}(\overline{s-1}\cdot t-u) & -(\rho-\frac{2D}{ns^2(s-1)}(\overline{s-1}\cdot t-u)) & \cdots & -(\rho-\frac{2D}{ns^2(s-1)}(\overline{s-1}\cdot t-u)) \\ -(\rho-\frac{2D}{ns^2(s-1)}(\overline{s-1}\cdot t-u)) & 1+\overline{s-2}\cdot\rho-\frac{2D}{ns^2}(\overline{s-1}\cdot t-u) & \cdots & -(\rho-\frac{2D}{ns^2(s-1)}(\overline{s-1}\cdot t-u)) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -(\rho-\frac{2D}{ns^2(s-1)}(\overline{s-1}\cdot t-u)) & -(\rho-\frac{2D}{ns^2(s-1)}(\overline{s-1}\cdot t-u)) & \cdots & 1+\overline{s-2}\cdot\rho-\frac{2D}{ns^2}(\overline{s-1}\cdot t-u) \end{vmatrix}^{-\frac{1}{2}}$$

$$= \left(1+\overline{s-1}\cdot\rho-\frac{2D}{n}\frac{1}{s}(t-\frac{u}{s-1})\right)^{-\frac{n-1}{2}(s-1)} \left(1-\rho-\frac{2D}{n}\frac{1}{s}(t+u)\right)^{-\frac{n-1}{2}}$$

$$\times \left(1+\overline{s-1}\cdot\rho-\frac{2D}{n}\frac{1}{s}(t-\frac{u}{s-1})\right)^{-\frac{s-1}{2}}(1-\rho)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\propto \left(1+\overline{s-1}\cdot\rho-\frac{2D}{n}\frac{1}{s}(t-\frac{u}{s-1})\right)^{-\frac{n}{2}(s-1)} \left(1-\rho-\frac{2D}{n}\frac{1}{s}(t+u)\right)^{-\frac{n-1}{2}} \qquad (15)$$

これから，μ^2, μ'^2 の同時分布を求める為には P. Lévy の反転公式 (*Inversion Formula*)

$$f(x,y)=\frac{1}{(2\pi i)^2}\lim_{\substack{T\to\infty\\U\to\infty}}\int_{-T}^{T}\int_{-U}^{U}e^{-itx-iuy}\varphi(it,iu)\,dt\,du \tag{16}$$

を用いる。

先づ $s=2$ の場合から始めよう。 $s=2$ なら

$$\varphi(t,u)\propto\left(1+\rho-\frac{D}{n}(t-u)\right)^{-\frac{n}{2}}\left(1-\rho-\frac{D}{n}(t+u)\right)^{-\frac{n-1}{2}} \tag{17}$$

であるから

$$t+u=\xi,\qquad t-u=\eta$$

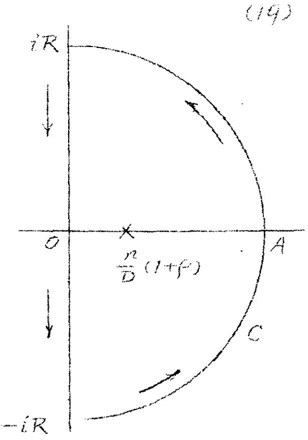
とおくと

$$f(x,y)\propto\frac{1}{2\pi i}\lim_{T\to\infty}\int_{-T}^{T}\frac{e^{-\frac{i}{2}(x+y)\xi}}{\left(1+\rho-\frac{D}{n}i\xi\right)^{\frac{n-1}{2}}}d\xi\times\frac{1}{2\pi i}\lim_{U\to\infty}\int_{-U}^{U}\frac{e^{-\frac{i}{2}(x-y)\eta}}{\left(1-\rho+\frac{D}{n}i\eta\right)^{\frac{n}{2}}}d\eta \tag{18}$$

となる。 考えを固定する為に $n=$ odd integer とあれば，

$\frac{n-1}{2}=$ integer となるが， $n/2=$ integer $+\frac{1}{2}$ となる。

$$\psi(Z)=\frac{e^{-\frac{1}{2}(x+y)Z}}{\left(1+\rho-\frac{D}{n}Z\right)^{\frac{n-1}{2}}} \tag{19}$$



なる函数は $Z=\frac{n}{D}(1+\rho)$ で $\frac{n-1}{2}$ 次の
もつ。 下図のような積分路に沿っての
$\psi(Z)$ の積分を考える。

$$2\pi i\times\left(\tfrac{n}{D}(1+\rho)\text{ での }\psi(Z)\text{ の Residue}\right)$$

$$=\int_{R}^{0}\psi(Z)dZ+\int_{0}^{-R}\psi(Z)dZ+\int_{C}\psi(Z)dZ$$

ところが円周 C 上では

$$z = R e^{i\theta}$$

であるから

$$|\psi(z)| \doteqdot \frac{e^{-\frac{1}{2}(x+y)R\cos\theta}}{\left\{(1+\rho-\frac{D}{n}R\cos\theta)^2+\frac{D^2}{n^2}R^2\sin^2\theta\right\}^{\frac{n-1}{4}}}$$

$$= e^{-\frac{1}{2}(x+y)\cos\theta R}\cdot\left\{\frac{D^2}{n^2}R^2-2(1+\rho)\cos\theta\frac{D}{n}R+(1+\rho)^2\right\}^{-\frac{n-1}{4}}$$

であるから，$R\to\infty$ のとき $|\psi(z)|\to 0$.

よって

$$-\lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R}\frac{e^{-\frac{1}{2}(x+y)i\xi}}{(1+\rho-\frac{D}{n}i\xi)^{\frac{n-1}{2}}}d\xi = 2\pi i\cdot(x+y)^{\frac{n-1}{2}-1}e^{-\frac{1}{2}(x+y)\frac{n}{D}(1+\rho)} \qquad (20)$$

次には下のような函数 $\psi_1(z)$ を考察する。

$$\psi_1(z) = \frac{e^{-\frac{1}{2}(x-y)z}}{(1-\rho-\frac{D}{n}z)^{\frac{n}{2}}}$$

$$= e^{-\frac{1}{2}(x-y)(1-\rho)\frac{n}{D}}\left(\frac{1}{2}(x-y)\frac{n}{D}\right)^{\frac{n}{2}}\cdot(-1)^{-\frac{n}{2}}\times$$

$$\left[\frac{1}{2}(x-y)(z-\frac{n}{D}(1-\rho))\right]^{-\frac{n-2}{2}-1}\times e^{-\frac{1}{2}(x-y)(z-\frac{n}{D}(1-\rho))}$$

これを下図のような積分路に沿うて積分する. Cauchy の積分定理によって

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{iR}^{-iR}\psi_1(z)dz+\frac{1}{2\pi i}\int_{C_1}+\frac{1}{2\pi i}\int_{C_2}+\frac{1}{2\pi i}\int_{AB}+\frac{1}{2\pi i}\int_{BA}+\frac{1}{2\pi i}\int_{C}=0$$

こゝで前と同様にして，$R\to\infty$ のとき

$$\lim_{R\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{iR}^{-iR}\psi_1(z)dz = -\lim_{U\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{-U}^{U}\frac{e^{-\frac{i}{2}(x-y)\eta}}{(1-\rho-\frac{D}{n}i\eta)^{\frac{n}{2}}}d\eta$$

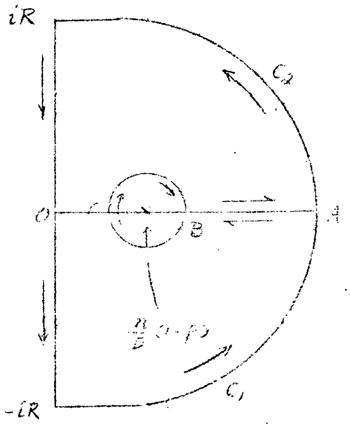
又

$$\left|\int_{c}\psi_1(z)dz\right|\to 0,\quad \left|\int_{C_2}\psi_1(z)dz\right|\to 0$$

となる。

$$\frac{1}{2}(x-y)\left(z-\frac{n}{D}(1-\rho)\right)=w$$

とおくと

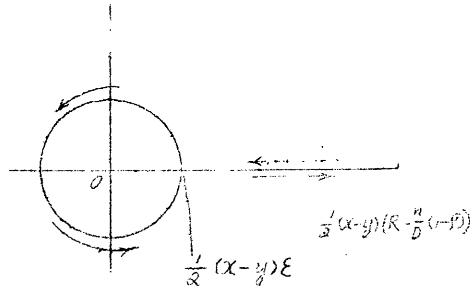


$$\int\psi_1(z)dz=e^{-\frac{1}{2}(x-y)(1-\rho)\frac{n}{D}}\left(\frac{1}{2}(x-y)\right)^{\frac{n}{2}-1}\left(\frac{n}{D}\right)^{\frac{n}{2}}$$

$$\times\int(-w)^{-\frac{n}{2}}e^{-w}dw$$

である．w平面上で下図の如き積分路を $\Gamma_{\varepsilon,R}$ と名づける

さうすれば



$$\lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ R\to\infty}}\int_{\Gamma_{\varepsilon,R}}(-w)^{-\frac{n}{2}}e^{-w}dw$$

$$=\frac{2\pi}{i}\frac{1}{\Gamma(\frac{n}{2})}\qquad\text{(Whittaker \& Watson. Modern Analysis p. 245)}$$

よって

$$\frac{1}{2\pi i}\lim\int_{-U}^{U}\frac{e^{-\frac{i}{2}(x-y)\eta}}{(1-\rho-\frac{D}{n}i\eta)^{\frac{n}{2}}}d\eta=-\frac{1}{\Gamma(\frac{n}{2})}\left(\frac{n}{D}\right)^{\frac{n}{2}}\left(\frac{1}{2}(x-y)\right)^{\frac{n}{2}-1}$$

$$\times e^{-\frac{1}{2}(x-y)(1-\rho)\frac{n}{D}}\tag{21}$$

(18)及び(20),(21)から，μ^2，$\mu^2 r$ の同時分布の確率要素は常数

因子を無視すれば

$$
\alpha f \propto e^{-\frac{n}{2D}\left((x+y)(1+\rho)-(x-y)(1-\rho)\right)}(x+y)^{\frac{n-1}{2}-1}(x-y)^{\frac{n}{2}-1}dx\,dy
$$

$$
= e^{-\frac{n(1-\rho r)}{2\sigma^2(1-\rho^2)}\mu^2}\mu^{2n-5}(1-r)^{\frac{n-2}{2}}(1+r)^{\frac{n-3}{2}}d\mu^2 d(\mu^2 r) \qquad (22)
$$

従つて μ, r の同時分布は

$$
\alpha f \propto e^{-\frac{n(1-\rho r)}{2\sigma^2(1-\rho^2)}\mu^2}\mu^{2n-2}(1-r)^{\frac{n-2}{2}}(1+r)^{\frac{n-3}{2}}d\mu\,dr \qquad (23)
$$

これは (9) と一致する。

$s \geq 3$ のときも全く同様である。

$$
t+u=\xi, \quad t-\frac{u}{s-1}=\eta
$$

即ち

$$
t=\frac{1}{s}\xi+\frac{s-1}{s}\eta, \quad u=\frac{s-1}{s}(\xi-\eta) \qquad (24)
$$

とおくと

$$
xt+yu=\frac{1}{s}(x+\overline{s-1}y)\xi+\frac{s-1}{s}(x-y)\cdot\eta
$$

であるから (15), (16) を用いて

$$
f(x,y) \propto \frac{1}{2\pi i}\lim_{T\to\infty}\int_{-T}^{T}\frac{e^{-\frac{i}{s}(x+\overline{s-1}\cdot y)\xi}}{\left(1-\rho-\frac{2D}{n}\frac{1}{s}i\xi\right)^{\frac{n-1}{2}}}d\xi
$$

$$
\times\frac{1}{2\pi i}\lim_{U\to\infty}\int_{-U}^{U}\frac{e^{-i\frac{s-1}{s}(x-y)\eta}}{\left(1+\overline{s-1}\cdot\rho-\frac{2}{n}\frac{1}{s}i\eta\right)^{\frac{n(s-1)}{2}}}d\eta \qquad (25)
$$

$s=2$ の場合と全く同様にして

$$
f(x,y) \propto e^{-\frac{1}{s}(x+\overline{s-1}\cdot y)\frac{ns}{2D}(1-\rho)-\frac{s-1}{s}(x-y)\frac{ns}{2D}(1+\overline{s-1}\cdot\rho)}
$$

$$\times\ (x+\overline{s-1}\cdot y)^{\frac{n-1}{2}-1}(x-y)^{\frac{n}{2}(s-1)-1}$$

$$= e^{-\frac{s\{(1+\overline{s-2}\cdot\rho)x-\overline{s-1}\cdot\rho y\}}{2\sigma^2(1-\rho)(1+\overline{s-1}\cdot\rho)}}(x+\overline{s-1}\cdot y)^{\frac{n-1}{2}-1}(x-y)^{\frac{n}{2}(s-1)-1} \qquad (26)$$

よって，μ^2, $\mu^2 r$ の同時分布は

$$e^{-\frac{ns}{2\sigma^2(1-\rho)(1+\overline{s-1}\cdot\rho)}\{1+\overline{s-2}\cdot\rho-\overline{s-1}\cdot\rho r\}\mu^2}\mu^{ns-s}(1+\overline{s-1}\cdot r)^{\frac{n-3}{2}}(1-r)^{\frac{n(s-1)}{2}-1}d\mu^2 d(\mu^2 r)$$

従って μ, r の同時分布は

$$e^{-\frac{ns}{2\sigma^2(1-\rho)(1+\overline{s-1}\cdot\rho)}(1+\overline{s-2}\cdot\rho-\overline{s-1}\cdot\rho r)\mu^2}\mu^{ns-2}(1+\overline{s-1}\cdot r)^{\frac{n-3}{2}}(1-r)^{\frac{\overline{s-1}\cdot n-2}{2}}d\mu\, dr \qquad (27)$$

に比例する．よって μ を Integrate out すると r の分布は

$$(1+\overline{s-2}\cdot\rho-\overline{s-1}\cdot\rho r)^{-\frac{ns-1}{2}}(1+\overline{s-1}\cdot r)^{\frac{n-3}{2}}(1-r)^{\frac{\overline{s-1}\cdot n-2}{2}}dr \qquad (28)$$

に比例する。

（1951. 10. 5.　日本統計学会年会講演　於九州大学）