⑲ α-Estimate の分布函数

お茶の水大学　工 藤　弘 吉

或る一つの分布 $P(E)$ に対して $\sigma^{s}P(E)=P(\sigma^{-s}E)$ で定義される分布 $\sigma^{s}P$ の集合の中から一つの分布を推定する方法として，"dissipative" な変換 σ^{s} が導入出来る場合は "α-estimate" なるものを先に定義した.[1)]

しかしこの dissipative な変換 σ^{s} が導入出来るのは特別な場合であり，特に sample size がいくつの時でもそれが可能であるのは非常にせまくなり二種類の型となってしまう.[2)]

ここでは更にそれを精密にし（定理Ⅰ）その逆をのべる.（定理Ⅱ）. 更にそれの一般の場合について論じ（定理Ⅴ, Ⅷ）その際の分布函数等を一般の形でのべる（定理Ⅲ, Ⅳ, Ⅵ, Ⅶ, 及びⅨ），§3ではどんな場合がこのものかについて論ずる。

§1. dissipative な変換の必充條件

この§では先づ5－㉑ 定理Ⅲ（vol. 5 p. 281）を精密にし，その逆をのべる. 母集団 $\Omega\ (\ni\omega)$，その部分集合の Borel 集合族 $\mathcal{B}$ の上の確率測度 $P(E)$, Ω 全体を Ω 全体に一対一にうつす完全連続，可測な変換 $\sigma^{s}\omega$ の one parameter group を考え，尤度比 $f(\omega, s)$ を

$$(1.1)\qquad P(\sigma^{-s}E)=\sigma^{s}P(E)=\int_E f(\omega,s)\,dP(\omega)$$

で定義するとき，

定理Ｉ． σ^s がすべての次元で（換言すれば，すべての size の sample space で）P-dissipative であるための必要条件は次の三つの一つが成立つことである．

（０）　σ^s が P-測度不変変換である。即ち $\log f(\omega,s)\equiv 0$ for all s，

（Ｉ）　$\log f(\omega,s) = -2As\,u(\omega) - As^2 + Bs,\ A>0.$ となる（$-\infty,\infty$）のすべての値をとる実函数 $u(\omega)$ ($u(\sigma^s\omega)= u(\omega)-s$) が存在する．

（II）　$\log f(\omega,s) = -Be^{Au(\omega)}(e^{As}-1)+Cs,\ B>0,\ Ac>0,$ となる（$-\infty,\infty$）のすべての値をとる実函数 $u(\omega)$ ($u(\sigma^s\omega)= u(\omega)-s$) が存在する．

（証明）５－㉑ 定理IIIより σ^s が P-測度不変変換でないならば，

（I'）　$\log f(\omega,s)= \alpha s^2 + 2\alpha s u(\omega) + \beta u(\omega) + \gamma s + \delta,$

$u(\sigma^s\omega) = u(\omega) - s,$

（II'）　$\log f(\omega,s) = (\gamma e^{\alpha u(\omega)}+\beta)(\gamma' e^{\alpha s}+\beta') + Cs + D,$

$u(\sigma^s\omega) = u(\omega)-s,$ である．こゝで５－㉑の p.280 の証明より $\beta=0$ なることは明らかであるから，（II'）は

（II_0'）　$\log f(\omega,s) = \gamma e^{\alpha u(\omega)}(e^{\alpha s}+\beta'') + Cs + D$

更に又 $\log f(\omega,0)\equiv 1$ であることに注意すれば（I'），（II_0'）は夫々次の（I''），（II''）となる。

（I''）　$\log f(\omega,s) = \alpha s^2 + 2\alpha s u(\omega) + \gamma s,$

（II''）　$\log f(\omega,s) = \gamma e^{\alpha u(\omega)}(e^{\alpha s}-1) + \delta s$

次に（I''）で $\alpha<0$ である．何となれば

$$1 = \sigma^s P(\Omega) = \int_\Omega f(\omega,s)\,dP(\omega) = \int_\Omega e^{\alpha s^2 + 2\alpha s u(\omega) + \gamma s}\,dP(\omega)$$

$$= \int_\Omega e^{\alpha(s+u(\omega))^2} e^{-\alpha u^2(\omega)+\gamma s} dP(\omega).$$

もし $\alpha \geqq 0$ ならば，$e^{\alpha(s+u(\omega))^2} \geqq 1$ （for all $\omega \in \Omega$）であるから

$$\geqq \int_\Omega e^{-\alpha u^2(\omega)+\gamma s} dP(\omega)$$

故にすべての s に対して

$$e^{-\gamma s} \geqq \int_\Omega e^{-\alpha u^2(\omega)} dP(\omega), \qquad \text{for all } s.$$

$\gamma s \to \infty$ とすると $P(E)=0$ for all $E \in \mathcal{B}$．故に $\alpha \geqq 0$ であり得ない。次に（II''）で $\gamma < 0$．何となれば上と同様に $1 = \sigma^s P(\Omega)$ より，

$$1 = \int_\Omega e^{\gamma e^{\alpha u(\omega)}(e^{\alpha s}-1)} e^{\delta s} dP(\omega)$$

$\gamma \geqq 0$ であれば $\gamma e^{\alpha u(\omega)}(e^{\alpha s}-1) \geqq -\gamma e^{\alpha u(\omega)}$ であるから，

$$e^{-\delta s} = \int_\Omega e^{\gamma e^{\alpha u(\omega)}(e^{\alpha s}-1)} dP(\omega) \geqq \int_\Omega e^{-\gamma e^{\alpha u(\omega)}} dP(\omega)$$

従って $\delta s \to \infty$ とすれば

$$\int_\Omega e^{-\gamma e^{\alpha u(\omega)}} \cdot dP(\omega) = 0$$

より $P(E) \equiv 0$．これは $\gamma \geqq 0$ であり得ないことを示す。

更に又（II''）で $\gamma < 0$ 且 $\alpha\delta > 0$ である。

先づ $\gamma < 0$，$\alpha\delta < 0$ とすれば

$$\int_\Omega e^{-\gamma e^{\alpha u(\omega)}} dP(\omega) = \lim_{\alpha s \to -\infty} \int_\Omega e^{\alpha u(\omega)(e^{\alpha s}-1)} dP(\omega) = \lim_{\alpha s \to -\infty} e^{-\delta s} = 0.$$

であるから，矛盾である。更に σ^s が P- 測度不変でないことより $\alpha \neq 0$，又 $\delta \neq 0$ であることも次の様にしてわかる：

$\gamma < 0$ より $\gamma e^{\alpha u(\omega)} < 0$，従って $\exp(\gamma e^{\alpha u(\omega)}) < 1$．

故に $\alpha s_1 > \alpha s_2$ ならば

$$\exp\{\gamma e^{\alpha u(\omega)}(e^{\alpha s_1}-1)\} < \exp\{\gamma e^{\alpha u(\omega)}(e^{\alpha s_2}-1)\}$$

であるから，$\delta = 0$ であれば

$$1 = \int_\Omega e^{\gamma e^{\alpha u(\omega)}(e^{\alpha S_1}-1)} dP(\omega) < \int_\Omega e^{\gamma e^{\alpha u(\omega)}(e^{\alpha S_2}-1)} dP(\omega) = 1$$

これは矛盾である。(Q, E, D)

定理 I. の逆として，

定理 II $(\Omega, \mathcal{B})$ 上で定義された（一つの parameter S をもつ）分布の集合 $\{P_S(E)\}$ の各要素 $P_S(E)$ が互に絶対連続とする。このとき Ω 内にすべての次元で P_0-dissipative な変換 σ^S が定義出來て

$$(1.2) \qquad P_S(E) = \sigma^S P_0(E) = P_0(\sigma^{-S}E), \quad \text{for all } E \in \mathcal{B}.$$

となるための充分條件は $\{P_S(E)\}$ の尤度比 $f(w, s)$：$P_S(E) = \int_E f(w, s)\, dP_0(w)$ が定理 I の（I）又は（II）となる様な函数 $u(w)$ が存在してそれが Ω の要素全体を実数全体の集合への一対一な可測函数（実数全体の集合内の可測集合としてはルベック可測集合をとる。）であることである。

上の定理を証明するために

補題. Ω 全体から実数全体の集合への一意対応 $u(w)$ によって $(\Omega, \mathcal{B})$ の上の互に絶対連續な分布の集合 $\{P_S(E); -\infty < S < \infty\}$ の尤度比 $f(w, s)$：$P_S(E) = \int_E f(\omega, s)\, dP_0(\omega)$ が定理 I の（I）又は（II）の如くかけるときは夫々

$$(\mathrm{I}_a) \qquad P_0(u(w) \leq a) = \frac{\sqrt{A}}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{a} e^{-\frac{1}{4A}(2Au - B)^2} du \quad ((\mathrm{I})\text{のとき}),$$

$$(\mathrm{II}_a) \qquad P_0(u(w) \leq a) = \frac{|A|\, B^{\frac{C}{A}}}{\Gamma(\frac{C}{A})} \int_{-\infty}^{a} e^{-Be^{Au} + Cu} du \quad ((\mathrm{II})\text{のとき})$$

（補題の証明）(I_a)

$$1 = P_S(\Omega) = e^{-AS^2 + BS} \int_\Omega \exp(-2ASu(w))\, dP_0(w)$$

において $-2Au(\omega)=v(\omega)$, $F_0(v)=P_0(v(\omega)\leqq v)$ とおけば

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{sv} d\, F_0(v) = \exp.(As^2 - Bs), \quad (-\infty < s < \infty)$$

これは $F_0(v)$ の積率田函数であるから

$$F_0(v) = \int_{-\infty}^{v} \frac{1}{\sqrt{4\pi A}} e^{-\frac{1}{4A}(v+B)^2} dv$$

故に a の如何に関せず (I_a) が得られる。

(II_a)

$$1 = P_s(\Omega) = e^{cs}\int_{\Omega} \exp.(-Be^{Au(\omega)}(e^{As}-1))\, d\, P_0$$

において $Be^{Au(\omega)}=v(\omega)$, $F_0(v)=P_0(v(\omega)\leqq v)$, $\theta=1-e^{As}$ とおけば

$$\int_{0}^{\infty} e^{\theta v} d\, F_0(v) = (1-\theta)^{-\frac{c}{A}}, \quad -\infty < \theta < 1$$

これも $F_0(v)$ の積率田函数であるから

$$F_0(v) = \frac{1}{\Gamma(\frac{c}{A})}\int_{0}^{v} v^{\frac{c}{A}-1} e^{-v} dv$$

故に a の如何に関せず (II_a) が得られる。

（定理 II の証明）

$$(1.3) \qquad \sigma^s \omega = u^{-1}(u(\omega)-s)$$

とおく，但 u^{-1} は実数全体の集合から Ω 全体への $u(\omega)$ の逆対応である。このとき明らかに σ^s は one-parameter の可測変換であり，

$$(1.4) \qquad u(\sigma^s\omega) = u(\omega) - s.$$

a) $f(\omega, s)$ が定理 I の（I）のとき，$P_0(E)$ は (I_0) であるから，$E \in \mathcal{B}$ に対して

$$P_0(\sigma^{-s}E) = \int_{\sigma^{-s}E} \frac{\sqrt{A}}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{1}{4A}(2Au(\omega)-B)^2} du(\omega)$$

$$= \int_E \frac{\sqrt{A}}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{1}{4A}(2Au(\sigma^{-s}\omega)-B)^2} du(\sigma^{-s}\omega)$$

$$= \int_E \frac{\sqrt{A}}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{1}{4A}(2Au(\omega)+s-B)^2} d(u(\omega)+s)$$

$$= \int_E e^{-As^2-2Au(\omega)+B} \frac{\sqrt{A}}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{1}{4A}(2Au(\omega)-B)^2} du(\omega)$$

$$= \int_E f(\omega,s)\,dP_0(\omega) = P_s(E)$$

b)　$f(\omega, s)$が定理Iの（II）のとき，$P_0(E)$は（II_0）であるから，$E \in \mathcal{B}$に対して a)の場合と同様の計算により

$$P_0(\sigma^{-s}E) = \int_E f(\omega, s)\,dP_0(\omega) = P_s(E).$$

従つて（1.2）が成立する。　さて 5−⑲ 定理IIIによれば one parameter の変換群 σ^sが存在するとき σ^sがすべての次元で P_0−dissipative であるための條件が尤度比 $f(\omega, s)$が Koopman 型であることであつたからこの場合も（1.3）の如く定義された σ^sがすべての次元で dissipative であることが明らかとなる。

系．（Ω, $\mathcal{B}$, P_s）は（Ω^*, $\mathcal{B}^*$, P_s^*）と（U, $\mathcal{U}$, Φ）との直積測度空間とする，ここで P_s^*は s を parameter とする Ω^*, $\mathcal{B}^*$の上の互に絶対連続な測度である。　このとき Ω^*全体から実数全体の集合への一対一可測函数 $u^*(\omega^*)$（$\omega^* \in \Omega^*$）が存在し

$$(1.5) \qquad u(\omega) = u(\omega^*, v) = u^*(\omega^*)$$

（ここで $\omega = (\omega^*, v) \in \Omega$, $\omega^* \in \Omega^*$, $v \in U$）と定義された $u(\omega)$によつて $\{P_s(E)\}$ の尤度比 $f(\omega, s)$: $P_s(E) = \int_E f(\omega, s) \times dP_0(\omega)$ が定理Iの（I）又は（II）の型に書かれるならば，すべての次元で P_0−dissipative 且（1.2）が成立する様な Ω内の変換 σ^sを定義することが出来る。

（証明）　先づ Ω^* 内で

$$(1.6) \qquad \sigma^s\omega^* = u^{*-1}(u^*(\omega^*) - s)$$

と定義する，しかし u^{*-1} は一対一対応 $u^{*}(\omega^{*})$ の逆対応である。

更に Ω 内での変換 σ^{s}（Ω^{*} 内の σ^{s} との混同が起らないから同じ記号でかく）は

$$(1.7)\qquad \sigma^{s}(\omega^{*}, v) = (\sigma^{s}\omega^{*}, v)$$

とする。このとき σ^{s} は one-parameter の変換であり，且

$$u(\sigma^{s}\omega) = u(\omega) - s$$

は明らか，故に唯（1.2）を証明すればよい。

P_s は P_s^{*} と Φ との直積測度なることより

$$P_s(E^{*}\times V) = \int_V P_s^{*}(E^{*})\,d\Phi(v), \quad E^{*}\in \mathcal{B},\ V\in \mathcal{V}.$$

又一方 $f^{*}(\omega^{*}, s)$ を $f(\omega, s)$ の $u(\omega)$ を $u^{*}(\omega^{*})$ でおきかえた函数とすれば（1.5）より $f(\omega, s) = f^{*}(\omega^{*}, s)$ であるから

$$\begin{aligned} P_s(E^{*}\times V) &= \int_{E^{*}\times V} f(\omega, s)\,dP_0(\omega) \\ &= \int_{E^{*}\times V} f(\omega, s)\,dP_0^{*}(\omega^{*})\,d\Phi(v) \\ &= \int_V \left\{ \int_{E^{*}} f^{*}(\omega^{*}, s)\,dP_0^{*}(\omega^{*}) \right\} d\Phi(v). \end{aligned}$$

故に Φ に関して almost all v に対して

$$P_s^{*}(E^{*}) = \int_E f^{*}(\omega^{*}, s)\,dP_0^{*}(\omega^{*})$$

故に Ω^{*} 全体から実数全体の集合への一対一函数 $u^{*}(\omega^{*})$ を用いて（1.6）によつて定義された変換 σ^{s} は

$$(1.8)\qquad P_0^{*}(\sigma^{-s}E^{*}) = P_s^{*}(E^{*}), \qquad E^{*}\in \mathcal{B}^{*},$$

を満す．一方

$$E_v = (\omega^{*} \mid (\omega^{*}, v)\in E), \quad E\in \mathcal{B}$$

$$P_s(E \mid v) = P_s^{*}(E_v)$$

とおけば，Fubini の定理より

$$P_S(E)=\int_V P_S(E|v)\,d\Phi(v)$$

であるから，$(\sigma^{-S}E)_v=\sigma^{-S}E_v$ なる関係及び（1.8）より

$$P_S(E)=\int_V P_S(E|v)\,d\Phi(v)=\int_V P_S^*(E_v)\,d\Phi(v)$$

$$=\int_V P_0^*(\sigma^{-S}E_v)\,d\Phi(v)=\int_V P_0(\sigma^{-S}E|v)\,d\Phi(v)=P_0(\sigma^{-S}E)$$

(Q.E.D)

以上ですべての次元で dissipative な変換が定義出来，従って α－estimate が存在する分布型が二通りあり，二通りにかぎることが証明された。（勿論，測度不変の場合は除外する）．所が上の補題により定理Ⅰの（Ⅰ）を尤度比 $f(\omega,S)$ にもつ型では正規分布が本質的であり（Ⅱ）の型では gamma 分布（χ^2 分布）が本質的であることが示された。

今ここでは（Ⅰ）型，（Ⅱ）型の分布型を夫々正規分布型（假説）gamma 分布型（假說）と呼ぼう。

§ 2. α－estimate の分布とその表現函数との関係

先づ次の定理からはじめる．

定理Ⅲ．$\Omega,\mathcal{B}$ の上で dissipative な変換 σ^S によって作られた分布型 $\{\sigma^S P\}$ の α－estimate $S_\alpha(\omega)$ が定義されるときその P に関する分布函数 $D_\alpha(S|0)$ に対して

$$(2.1)\qquad \Phi(S)=P(-\hat{S}_\alpha(\omega)<S)=1-D_\alpha(-S|0)=\gamma(\alpha|S)$$

とするとき，その表現函数 $\gamma(\alpha|S)$（vol. 5 p.171）は任意の α_0 に対して

$$(2.2)\qquad \gamma(\alpha_0|S)=\Phi(\Phi^{-1}(\alpha_0)+S)$$

（但しここで Φ^{-1} は Φ の逆函数である）となる。

（注意）　岩村聯"函数方程式 $F(x,\theta_1+\theta_2)=F(F(x,\theta_1),\theta_2)$ について（Ⅱ）"本誌 vol. 5 ㉕ p. 316　定理Ⅶの f^{-1} が我々の定理の Φ に相当する事

（証明） 5－⑲ p. 187 (6.6)式より

$$(2.3)\qquad \Phi(S)=\gamma(\alpha\mid S)$$

であるから，任意の α_0 に対して

$$\gamma(\alpha\mid\Phi^{-1}(\alpha_0))=\alpha_0$$

従つて

$$\Phi(\Phi^{-1}(\alpha_0)+S)=\gamma(\alpha\mid\Phi^{-1}(\alpha_0)+S)=\gamma(\gamma(\alpha\mid\Phi^{-1}(\alpha_0))\mid S)$$

$$=\gamma(\alpha_0\mid S).\qquad (Q.E.D)$$

更に上に引用した岩村氏の論文の定理 VII によれば f 即ち我々の Φ^{-1} は不定積分

$$(2.4)\qquad \Phi^{-1}(\alpha)=\int\frac{d\alpha}{\left[\frac{\partial}{\partial S}\gamma(\alpha,S)\right]_{S=0}}.$$

で求められるのであるからそれは常数を無視すれば一意的に定まる。しかるに一方 α－推定値 $\hat{S}_\alpha(\omega)$ は α を変えるとき唯常数のみの違いである故定理III の Φ もその逆函数 Φ^{-1} は常数を無視するとき一意的である。従つて

定理 IV. α－ estimate $\hat{S}_\alpha(\omega)$ が存在し，その表現函数 $\gamma(\alpha|S)$ が知られてゐて，(2.2) の関係にある函数 $\Phi(S)$ を求めるとき $1-\Phi(S)$ は或る $\hat{S}_\alpha(\omega)$ の分布函数である。 他の α に関しては適当な常数 C を求めて $1-\Phi(S+C)$ とすればよい。

又上記岩村氏論文定理 V 及び VI と (2.4) から Φ^{-1} 従つて Φ は常に有限な函数をもつてゐることがわかる。 故に Φ の導函数を Φ' とすれば，(2.3) 及び

$$(2.5)\qquad \gamma(\alpha/S)=\sigma^S P(R_\alpha)$$

なる γ の定義から

定理 V. $f(\omega|S)$ を尤度比にもつ（即ち $\sigma^S P=\int f(\omega|S)dP$ なる）

分布型假説 $\{\sigma^s P\}$ が α-estimate $\hat{S}_\alpha(\omega)$ をもてば

$$(2.6) \qquad f(\omega|s) = \frac{\Phi'(-\hat{S}_\alpha(\omega)+s)}{\Phi'(-\hat{S}_\alpha(\omega))}$$

補題． 二つの非負な測度 $P(E)$, $P_1(E)$ の間に可測実函数

$$P(E) = \int_E f(g(\omega))\,d_1(\omega)$$

なる関係があるとき，

$$\Phi(s) = P(g(\omega) < s), \quad \Phi_1(s) = P_1(g(\omega) < s)$$

とおけば

$$\Phi(s) = \int_{-\infty}^{s} f(x)\,d\,\Phi_1(x)$$

補題は明らかである。

（定理Ⅴの証明） 5 − ⑲ p. 195 (8.1)式より $f(\omega|s)$ は $\hat{S}_\alpha(\omega)$ を通して ω の函数となつてゐる．故に今

$$(2.7) \qquad \lambda(-\hat{S}_\alpha(\omega)|s) = f(\omega|s)$$

なる函数 $\lambda(s'|s)$ をとると，補題から

$$\sigma^s P(-\hat{S}_\alpha(\omega) < s') = \int_{-\infty}^{s'} \lambda(r|s)\,d\,\Phi(r)$$

しかるに

$$\sigma^s P(-\hat{S}_\alpha(\omega) < s') = P(-\hat{S}_\alpha(\omega) < s+s') = \Phi(s+s').$$

故に

$$\Phi(s+s') = \int_{-\infty}^{s'} \lambda(r|s)\,d\,\Phi(r).$$

ところが $\Phi(s)$ が微分可能であることは $\gamma(\alpha|s)$ が s で微分可能なこと（本誌 Vol. 5 ㉕ p. 313 定理Ⅳ）からわかるから（(2.1)による）

$$(2.8) \qquad \lambda(r|s) = \frac{\Phi'(r+s)}{\Phi'(r)}$$

故に定理Ⅴが云はれる．

定理 VI. 上の定理の（2.7）のλを用いて

$$(2.9)\qquad \left[\frac{\partial}{\partial s}\log\lambda(r,s)\right]_{s=0}=L(r)$$

が存在するならば

$$(2.10)\qquad \Phi(r)=\int_{-\infty}^{r}e^{\int L(r)dr}dr\Big/\int_{-\infty}^{\infty}e^{\int L(r)dr}dr$$

（証明）　（2.8）により

$$(2.11)\qquad \lim_{s\to 0}\frac{\log\lambda(r.s)}{s}\ \lim_{s\to 0}\frac{\log\Phi'(r+s)-\log\Phi'(r)}{s}$$

上の極限は $f(\omega|0)\equiv 1$ 即ち $\lambda(r,0)\equiv 1$ により（2.9）より存在して $L(r)$に等しい。しかるに（2.11）の右辺は $\log\Phi'(r)$のrにおける微係数であるから

$$L(r)=\frac{d}{dr}\log\Phi'(r).$$

$\Phi(\infty)=1$, $\Phi(-\infty)=0$（Φ の定義）より（2.10）が得られる。

補題 1. 二つの実変数 r,s の正な実函数$\lambda(r,s)$が

1）s に関して偏微分可能，即ち

$$(2.12)\qquad \ell(r,s)=\frac{\partial}{\partial s}\log\lambda(r,s)$$

が存在し（$-\infty<r<\infty$，$-\infty<s<\infty$）

2）$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}e^{\int\ell(r,0)dr}dr$ が存在し

3）$\lambda(r,0)\equiv 1$

ならば，或る単調且微分可能な函数$\Phi(r)$が存在し

$$(2.13)\qquad \lambda(r,s)=\frac{\Phi'(r+s)}{\Phi'(r)}$$

となる必要充分条件は

$$(2.14)\qquad l(r,s)=l(r+s,0)$$

なることである.

(証明) 必要性: 定理VIより $\Phi(r)$ は (2.10)となるから (2.13) に代入し, $L(r)=l(r,0)$ とおけば (2.14) が得られる。

充分性: $l(r,0)=L(r)$ とおけば $l(r,s)=L(r+s)$ ((2.14)より). この両辺をSで積分し, 3) を用いると

$$\log\lambda(r,s)=\int_r^{r+s}L(s)ds$$

となる。故に

$$\Phi(r)=K_1\int_0^r e^{\int L(s)ds}dr+K_2$$

とおけば (2.13) が得られる.

補題 2. $k(x)$ をいたる所正且 $\int_{-\infty}^{\infty}k(x)dx=1$ 且つその特性函数

$$(2.15)\qquad \varphi(y)=\int e^{iyx}k(x)dx$$

の零点の集合が内点をもたないとする. そのとき或一次元の分布函数 $F(x)$ に対して

$$(2.16)\qquad \int_{-\infty}^{\infty}\frac{k(x+y)}{k(x)}dF(x)\equiv 1 \qquad \text{for all } y$$

ならば

$$(2.17)\qquad F(x)=\int_{-\infty}^{x}k(x)\,dx$$

である。

(証明) $k(x)$ は $L(-\infty,\infty)$ であるから任意の有限區間で

も積分可能である。

故に (2.16) の両辺を y について $t-\frac{1}{2}$, $t+\frac{1}{2}$ で積分すれば

$$\int_{t-\frac{1}{2}}^{t+\frac{1}{2}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{k(x+y)}{k(x)}\,dF(x)\,dy\equiv 1 \qquad \text{for all } t$$

積分の順序を交換することが出来るから

$$\int_{t-\frac{1}{2}}^{t+\frac{1}{2}} k(x+y)\,dy = K(x+t)$$

とおくときこの $K(x+t)$ なる連続函数に対して

$$(2.18)\qquad \int_{-\infty}^{\infty}K(x+t)\,\frac{dF(x)}{k(x)}\equiv 1 \qquad \text{for all } t$$

を得る。このとき (2.18) より

$$(2.19)\qquad \mu[a,b]=\int_a^b\frac{dF(x)}{k(x)}$$

が任意の区間 $[a,b]$ で有限な値をもつ，何となれば $K(x)$ が或点 x_0 で正なる値 2ε をもてばその点の充分小さな近傍 $(x_0-\delta,\ x_0+\delta)$ で $K(x)\geqq\varepsilon$ とすることが出来る。故に (2.18) より

$$1\geqq\int_{x_0-\delta-t}^{x_0+\delta-t}K(x+t)\,\frac{dF(x)}{k(x)}\geqq\varepsilon\int_{x_0-\delta-t}^{x_0+\delta-t}\frac{dF(x)}{k(x)}$$

即ち

$$\int_{x_0-\delta-t}^{x_0+\delta-t}\frac{dF(x)}{k(x)}\leqq\frac{1}{\varepsilon}.$$

t_i を適当に有限箇とり $[a,b]\subset\bigcup_{i=1}^{n}(x_0-t_i-\delta,\ x_0-t_i+\delta)$ とするならば (2.19) は有限である． 以上により (2.16) は

$$(2.20)\qquad \int_{-\infty}^{\infty}k(x+y)\,d\mu(x)\equiv 1 \qquad \text{for all } y$$

となる。　しかるにの解が二通り μ, ν あれば

$$\int_{-\infty}^{\infty} k(x+y)\,d\nu(x) \equiv 1 \qquad \text{for all } y$$

故に

$$(2.21) \qquad \int_{-\infty}^{\infty} k(x+y)\,d(\mu-\nu)(x) \equiv 0$$

となる。　ここで $\mu-\nu$ は有限区間では正且有限なる測度である。

Y. 河田氏によれば[1] (2.21) が constant zero 以外の根をもつための必充條件は $k(x)$ の特性函数 $\varphi(y)$ (2.15) の零点の集合が内点をもつことである。従って我々の假定から (2.21) の解は恒等的零である。

即ち

$$\mu = \nu$$

でなければならぬ、しかるに (2.20) は

$$\mu = \text{Lebesque measure}$$

とするとき満足されるから (2.19) から (2.17) が得られる。

定理 VII.　$S(-\infty < S < \infty)$ を parameter とする互に絶対連続な確率測度の集合 $\{P_S(E)\}$ の尤度比 $f(\omega|S)$ (即ち $P_S(E) = \int f(\omega|S)\,dP_0$) が Ω 全体から実数全体の集合への一対一函数 $u(\omega)$ によつて

$$(2.22) \qquad f(\omega|S) = \lambda(u(\omega), S)$$

とかゝれ，且つこの函数 $\lambda(r,S)$ が補題の 1), 2) 且 (2,14) を満し，(2.10) の如く定義された $\Phi(r)$ の微係数の特性函数の零点の集合が内点をもたぬならば，Ω 内に dissipative な変換 σ^S が定義出来て

$$P_S(E) = \sigma^S P_0(E) = P_0(\sigma^{-S}E) \qquad \text{for all } E \in \mathcal{B}.$$

(証明) (2.10) の如く $\Phi(r)$ をおくとき，補題 1 より

註 1) 河田敬義："Abel 群上の正値函数に関する二三の注意" 実函数論研究月報 vol. 4. No. 1. (1950) 定理 3. 参照

$$\lambda(r,s) = \frac{\Phi'(r+s)}{\Phi'(r)}$$

故に $F(r) = P_0(u(\omega) < r)$ とおくとき (2.22) より

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Phi'(r+s)}{\Phi'(r)} dF(r)$$

故に補題2によつて

$$F(r) = \int_{-\infty}^{r} \Phi'(r) dr = \Phi(r).$$

今定理IIの証明における如く

$$\sigma^s \omega = u^{-1}(u(\omega) - s)$$

とおくとき、$E \in \mathcal{B}$ に対して u が一対一の函数であることから

$$P_0(\sigma^{-s}E) = \int_{\sigma^{-s}E} dP_0(\omega) = \int_E dP_0(\sigma^{-s}\omega)$$

$$= \int_{u(E)} d\Phi(u+s) = \int_{u(E)} \frac{\Phi'(u+s)}{\Phi'(u)} d\Phi(u)$$

$$= \int_E \frac{\Phi'(u(\omega)+s)}{\Phi'(u(\omega))} dP_0(\omega) = \int_E f(\omega|s) dP_0(\omega) = P_s(E)$$

Q.E.D.

この定理から定理IIの系の如く

系．$(\Omega, \mathcal{B}, P_s)$ は $(\Omega^*, \mathcal{B}^*, P_s^*)$ と $(\dot{U}, \mathcal{W}, \Phi)$ との直積測度空間とする。 ここで P_s^* は s を parameter とする $\Omega^*, \mathcal{B}^*$ の上の互に絶対連続な測度，$(U, \mathcal{W}, \Phi)$ は任意の確率空間とする。 このとき Ω^* 全体から実数全体の集合の上への一対一可測函数 $u^*(\omega^*)$ $(\omega^* \in \Omega^*)$ が存在し，

$$u(\omega) = u(\omega^*, v) = u^*(\omega^*)$$

$$\omega = (\omega^*, v) \in \Omega, \omega^* \in \Omega^*, v \in U$$

なる函数 $u(\omega)$ をもつて定理VIIの條件の $u(\omega)$ にかえても同様のことが云える.

証明は定理IIの系と同じである.

§1. の最後で定義した *sample size n* の正規分布型假説, *gamma* 分布假説は定理VII 或はその系の條件をみたす特別な場合である。

定理VII 又はその系の條件をみたす分布型 $\{P_S(E)\}$ があるときその α- *estimate* $\hat{S}_\alpha(\omega)$ は或る一つの α_0 に対して

$$\hat{S}_{\alpha_0}(\omega) = -u(\omega).$$

なることは直ちに上の議論から理解せられる。 しかし一般の α に対しては如何と云うと, それは単に常数の違いにすぎないから

$$\hat{S}_\alpha(\omega) = -u(\omega) + c$$

そこで c を α で表はすために, $u(\omega)$ の分布函数 $\Phi(r)$ を用いるときは, $-\hat{S}_\alpha$ の分布函数は $\Phi(r+c)$ であり, 且つ $P_0(\hat{S}_\alpha(\omega) \leqq 0) = \alpha$ なることに注意すると

$$\Phi(c) = \alpha, \quad 或は \quad c = \Phi^{-1}(\alpha)$$

である。 故に

定理VIII. 定理VII 又はその系の條件をみたす如き $u(\omega)$ の存在する分布型 $\{P_S\}$ の α- *estimate* は

$$\hat{S}_\alpha(\omega) = -u(\omega) + \Phi^{-1}(\alpha) \tag{2.23}$$

である, ここで Φ は (2.10) でもとめられる函数である。又その分布密度函数 $\varphi_\alpha(S)$ は

$$\varphi_\alpha(S) = \Phi'(\Phi^{-1}(\alpha) - S) \tag{2.24}$$

（証 明） 定理の後半だけが証明されてゐない。（2.2）及び，5－⑲の（6.6），（6.8）より

$$\varphi_\alpha(S) = -\frac{\partial}{\partial S}\gamma(\alpha|-S) = -\frac{\partial}{\partial S}\Phi(\Phi^{-1}(\alpha)-S)$$
$$= \Phi'(\Phi^{-1}(\alpha)-S)$$

最後に最尤法にもとずく α－estimate は 5－⑲ §8 の議論から $\varphi_\alpha(S)$ を最大ならしめる S の値が零である様な α の値を α_0 とするとき

$$\frac{\partial}{\partial S}\varphi_\alpha(S) = \frac{\partial}{\partial S}e^{\int L(x)dx}/K$$

（ここで $\gamma = \Phi^{-1}(\alpha)-S$，$K = \int_{-\infty}^{\infty} e^{\int L(x)dx}d\gamma$ ）

$$= -e^{\int^{\Phi^{-1}(\alpha)-S} L(\gamma)dx} L(\Phi^{-1}(\alpha)-S)/K$$

であり，第一の因数は零にならないから，最尤解は

$$L(\Phi^{-1}(\alpha)) = 0$$

の解である．従つて

定理 IX． 定理VIII の場合の最尤解は

$$L(x) = 0$$

の解 x をもつて

$$\hat{S}_{\alpha_0}(\omega) = -u(\omega)+x$$

であり，その分布函数は

$$\varphi_{\alpha_0}(S) = \Phi'(x-S)$$

である。

§ 3. 正規，ガンマ分布型に対する応用及びその実例

以上 $w=(w_1, \cdots\cdots, w_N)$, Σは i を 1 から N までの和とする即ち Sample size N の場合である。

（Ⅰ）正規分布型の場合

$$\Sigma \log. f(w_i|s) = -2As\Sigma u(w_i) - NAs^2 + BNs,$$

$\dfrac{\Sigma u(w_i)}{N} = u(w)$ とおくとき

$$\log \lambda(u,s) = -2ANu - ANs^2 + BNs,$$

$$L(x) = -2ANx + BN$$

$$\Phi(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{t(s)} e^{-\frac{t^2}{2}}dt, \quad t(s)=\sqrt{2AN}\left(s-\frac{B}{2A}\right)$$

$$\varphi_{\alpha}(s) = \sqrt{\frac{AN}{\pi}}\exp.\left\{-2AN\left(s-\Phi^{-1}(\alpha)+\frac{B}{2A}\right)^2\right\}$$

$$\hat{s}_{\alpha_0}(w) = -\frac{\Sigma u(w_i)}{N} + \frac{B}{2A}$$

$$\varphi_{\alpha_0}(w) = \sqrt{\frac{AN}{\pi}}\exp.(-ANs^2)$$

（Ⅱ）ガンマ分布型の場合

$$\Sigma \log f(w_i|s) = -B(e_0^{As}-1)\Sigma e^{Au(w_i)} + NCs,$$

$\dfrac{1}{A}\log\Sigma e^{Au(w_i)} = u(w)$ とおけば

$$\log \lambda(u,s) = -B(e^{As}-1)e^{Au} + NCs,$$

$$L(x) = -BAe^{Ax} + NC,$$

$$\Phi(s) = \frac{1}{\Gamma(\frac{NC}{A})}\int_0^{t(s)} e^{-x}x^{\frac{NC}{A}-1}dx, \quad t(s)=Be^{As}, \text{ if } A>0,$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\frac{NC}{A})}\int_{t(s)}^{\infty} e^{-x}x^{\frac{NC}{A}-1}dx, \quad t(s)=Be^{As}, \text{ if } A<0,$$

$$\varphi_\alpha(S)=\frac{|A|}{\Gamma\left(\frac{NC}{A}\right)}\left(Be^{A\Phi^{-1}(\alpha)}\right)^{\frac{NC}{A}}\exp\left(-Be^{A\Phi^{-1}(\alpha)}e^{-AS}-NCS\right),$$

$$\hat{S}_{\alpha_0}(\omega)=-\frac{1}{A}\log\frac{BA\Sigma e^{Au(\omega_i)}}{CN},$$

$$\varphi_{\alpha_0}(S)=\frac{|A|}{\Gamma\left(\frac{NC}{A}\right)}\left(\frac{NC}{A}\right)^{\frac{NC}{A}}\exp\left(-\frac{NC}{A}e^{-AS}-NCs\right).$$

実例としては イ) 正規分布の平均値の推定，ロ) 分散の推定，ハ) 指数分布の平均値の推定に関しては 5-⑲ §9. でくわしく論じられてゐる。 そこでその他の場合では，

ニ) ピアーソン第Ⅲ型分布型 $\frac{m^\lambda}{\Gamma(\lambda)}x^{\lambda-1}e^{-mx}$ $(x>0, m>0, \lambda>0)$ の m の推定

この場合は $s=\log m$ として

$$\log f(x|s)=\lambda s-(e^s-1)x$$

故にガンヽ分布型であり $B=A=1$, $C=\lambda$, $u=\log x$ とすればよい.

ホ) ピアーソン第Ⅴ型 $\frac{m^\lambda}{\Gamma(\lambda)}x^{-\lambda-1}e^{-m/x}$ $(x>0, m>0, \lambda>0)$ の m の推定

$$s=\log m,\quad u=-\log x$$

とすれば

$$\log f(x|s)=-(e^s-1)e^u+\lambda s.$$

故に $B=A=1$, $C=\lambda$ のガンマ分布型である。

ヘ) ピアーソン第Ⅷ分布型 $(1-m)(1+x)^{-m}$, $(-1<x<0, 1>m)$ の m の推定

$$s=\log(1-m),\ u=\log\{-\log(1+x)\}$$

とすれば

$$\log f(x|s) = -(e^{s}-1)e^{u} + s$$

故に $A=B=C=1$ のガンマ分布型

ト）ピアーソン第IX型 $(1+m)(1-x)^{m}$; $(0<x<1, -1<m)$ の m の推定

$$s = \log(1+m),\quad u = \log\{-\log(1-x)\}$$

とすれば

$$\log f(x,s) = -(e^{s}-1)e^{u} + s$$

これは $A=B=C=1$ のガンマ分布型

チ）ピアーソン第XI型 $(m-1)x^{-m}$, $(1<x, 1<m)$ の m の推定

$$s = \log(m-1),\quad u = \log\log x$$

とすれば

$$\log f(x,s) = -(e^{s}-1)e^{u} + s$$

$A=B=C=1$ のガンマ分布型

尚念の為イ)―チ）の各分布型に対する最尤α―推定値を誌せば次の通り．

イ） $\dfrac{\Sigma x_i}{N}$，ロ） $\log\sqrt{\dfrac{\Sigma x_i^2}{N}}$，ハ） $\log\dfrac{\Sigma x_i}{N}$，ニ） $-\log\dfrac{\Sigma x_i}{\lambda N}$，

ホ） $-\log\dfrac{1}{\lambda N}\Sigma\dfrac{1}{x_i}$，ヘ） $-\log\dfrac{-\Sigma\log(1+x_i)}{N}$，

ト） $-\log\left\{\dfrac{-1}{N}\Sigma\log(1-x_i)\right\}$，チ） $-\log\left\{\dfrac{1}{N}\Sigma\log x_i\right\}$