③ 降雨量と河の流量と*
(那賀川の流量と流域の雨量との関係について)

菅　原　正　巳

1. は　し　が　き

我々の目的は那賀川流域の雨量から流量を推定することにある。 那賀川は四国の徳島縣の南部を東に流れる河で，源を剱山に発する。 河としてはあまり大きくないが，その流域は我國で最も雨量の多い地方の一つで年間3,000 mm以上の雨量がある。

それにも拘らずこの河は從來十分には水力電源として開発されていない。 その一つの理由は，この河は南海地方の河川の特徴として，秋期の颱風期に降雨が集中し，季節變動および年度による變動が甚だしいからである。 かかる河川については平均値のみを考えて開発計画を作ったのでは，ある年は渇水に困り，ある年は多量の無効放水をすることになる。 そこでダムを構築する際には，流量の變動を十分に考慮して，貯水池の規模を決定する必要が生ずる。 變動の大きい場合には，統計資料として，相当

註 * この報告は研究所高也山文行との共同研究によるものである

数の標本のあることが望ましいのであるが，那賀川については小浜測水所の流量記録は昭和７年以降のものしかない。　それに対して，雨量記録は明治３８年以降のものがあるので，雨量から流量が推定できるならば，４０年間の記録によつて那賀川の流量特性を知ることができて，開発計画に大いに役立つのである。

我々が経済安定本部資源調査会エネルギー部会から，那賀川の流量推定に関する研究を委頼されたのは，以上の理由からであつた。

元来，川の水は結局雨の水が流出したものであるから，雨量から流量を推定することは容易であろうと思われるが，これがそう簡単には行かない。　その第一の理由は雨がどのように降るかが，よく判つていないからである。

現在雨量観測地点は相当多数，各所に散在しているにも拘わらず，それらの大部分は平地の町にあるもので，山の中にあるものにしても，殆んどすべて川沿いの谷底にあるものである。　従つてこれらの資料から，流域に降つた雨の総量を算出することは危険であつて，従来の計算の大部分では，豊水期には総雨量よりも流量が多い，即ち流出率１００％以上という結果が出ているそうである。　雨量に関する調査の不足ということは，北大の中谷教授が何度も力説されている所で，現在大規模な調査が只見川や神流川について行われている。

以上の流域の総雨量が不明であることは，出納に例えれば，収入が不明であることである。　我々の問題で更に困るのは支出も不明なことであつて，どの位蒸発するか，どの位地下に浸透するか，どの位涵養されるかに関する十分の知識がない上に，流量の測定値も洪水時になると信頼度が落ちるのである。

結局，収入が正確には判らず，正体不明の支出があり，貯蓄が不明であるときに収支のバランスを考えるのであるから，問題は難しくなるのである。

我々は幾つかの仮定を置きつつ，雨量から流量を推定する方法

を種々考えた末，相関係数を0.95まで上げることに成功した。

以下我々の考えた順に従って，推定方式を述べることにする。もちろん全然役に立たなかつた方法は述べず，その方法自体としては不満足でも，将来に何らかの手掛かりを与えたものを述べるのである。

2. 雨量統計について

雨量と流量との関係について述べる前に，雨量に関する統計的結果を述べることにする。 これは我々が昨年度前半に，関東地方各地の5年間の日雨量観測記録を用いて得たものである。 その主な結果を次に挙げる。

1) 日雨量，または一雨（ひとあめ）雨量（降り続いた一続きの雨）について，1 mm以下の細雨が相当多いが（雨天の約半を占める），それを除くと残りについては雨量の対数をとつたものが，およそ正規分布をする。（ジブラ型分布）

2) 二地点の日雨量を比較すると，一方で1 mm以下の細雨に対し，他方では相当の雨が降ることがかなりあるが，二地点ともに1 mm以上の雨が降る場合だけについて考えると，二地点の雨量の対数をとつたものには，かなりよい正の正規相関が見られる。 従つて二地点ともに1 mm以上の雨が降る場合については，二地点の雨量の比の対数は，分散の小さい正規分布をする。

3) 二地点ともに1 mm以上の雨が降る場合について，雨量の対数の間に相関があるが，その相関係数は，およそ二地点間の距離の函数であつて，二地点を結ぶ直線の方向にはあまり関係しない。相関係数は二地点間の距離が20 km～30 kmの所で0.8～0.7程度であるが，二地点間の距離が50 km～60 km程度になると，0.5程度で，更に距離が100 kmになってもおよそこの程度の値をとる。

以上の結果から，ある地域で数か所の雨量が測られたとき，雨量の幾何平均により，地域全般の雨の規模が推定されるであろうと考えられる。 数か所の雨量観測結果を利用して無理に等雨量線を引き，数値積分を行つて地域の全雨量を求めることは，労の大きいのに反して，結果はかえつて信頼できないのではないかと感じられる。

3. 資　料

利用した資料はつぎのものである。（第一図）

1. 那賀川小浜測水所の流量

　昭和7年より22年まで，その中20年欠測，月別平均流量が立方米／秒で与えられている。

2. 流域数地点の月雨量（単位mm）

　これは明治38年より昭和20年までの記録があるが，流量との比較に用いたものは次の通りである。

昭和7年～10年	（富岡，和食）朴野，坂州，沢谷，出原，
昭和11年～15年	朴野，坂州，出原，
昭和16年～19年	朴野，坂州，出原（椿泊）

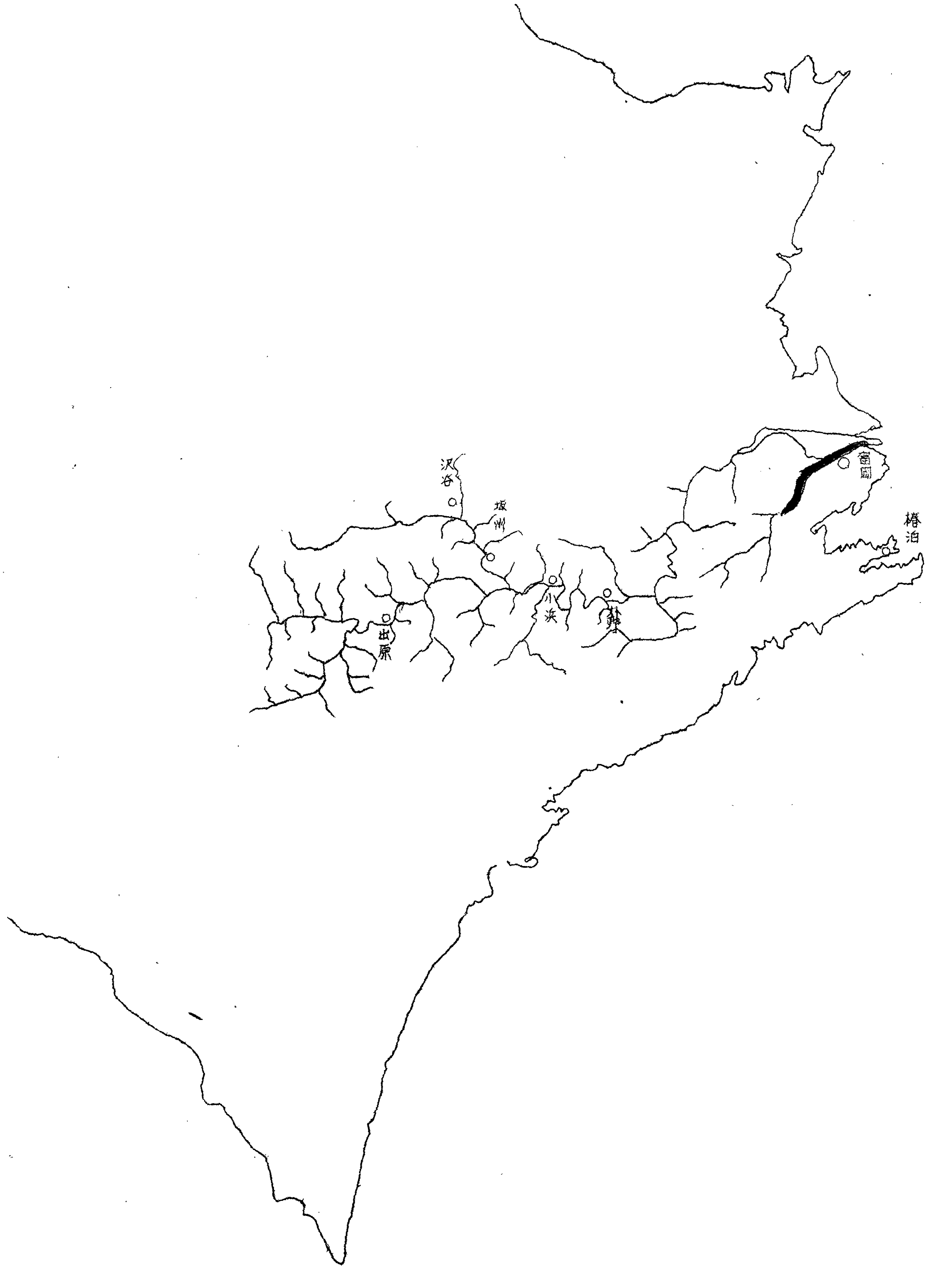
以上の記録を利用することにより，昭和7年より19年まで，13年間の資料を用いて，雨量と流量との関係を調べた。 雨量観測資料のうち，富岡，和食，椿泊は海岸に近く，上流の雨量と関係が少いと考えたので，これらは用いないことにした。

またた与えられた流量は月別平均流量であり，雨量は月別総雨量で，月に大小の区別があるため，そのままでは比較できない。どちらかを換算する必要があるので，ここでは流量を月別総流量に換算することとし，便宜上総流量を $31 \times 24 \times 60 \times 60$ で割つた値を総流量に比例する量として用いることにした。

これを y とすれば

119頁の次

第　一　図



$$y = (\text{月平均流量}) \times (\text{その月の日数}) \div 31$$

であるから，yは大の月には平均流量と一致し，小の月には平均流量より3％程小さい値となる。

4.　月流量を当月及び前月雨量の一次式により推定する方法

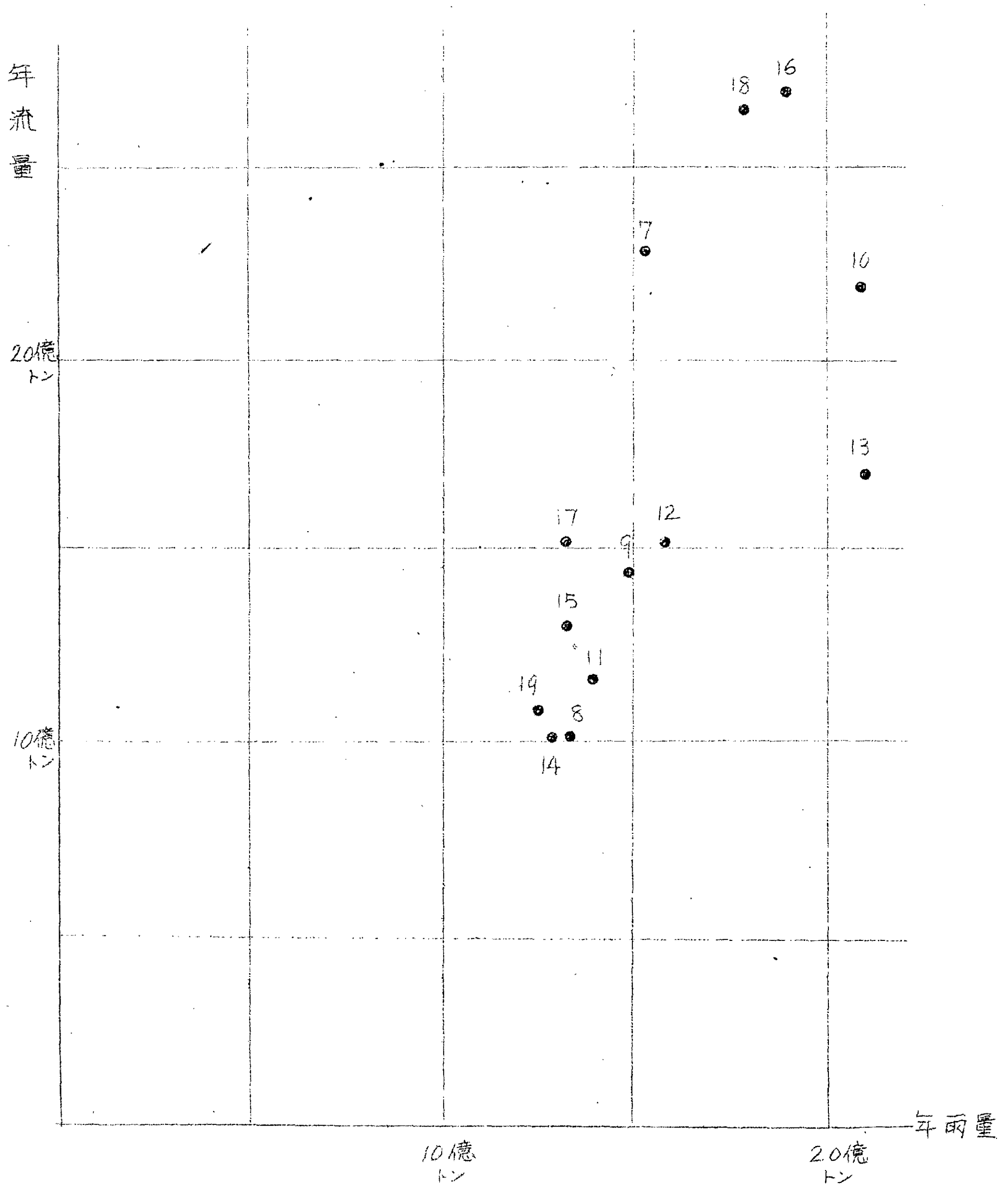
雨量，流量ともに季節的変動が激しく，また，雨量については地点による変動が甚しく，統計的処理に困難が多い。

まず各地点の月雨量より流域の毎月の総雨量を推定し，適当な機構のもとにこれが流出すると考えればよいのであるが，結局欲しいのは流量であり，与えられるのは地点別月雨量だけなのであるから，途中で蒸散や涵養を考慮に入れたとしても，結果では月雨量から月流量が出ればよいのである。

雨量と流量との間のおよその関係を求める目的で，まず年雨量と年流量とを比較した。　ある時は水が貯えられ，またある時は涵養された水が流出する等，種々複雑な出入があるにせよ，結局は降つた水が，蒸散，浸透，流出し，そのうち一年間を平均すれば，蒸散，浸透は毎年ほぼ一定値に近く，涵養されて前年からくり越される水量，翌年にくり越しになる水量はたがいに相殺するものと考えれる。　従つて，渇水期である冬を境にして年雨量と年流量との関係を調べれば，雨量と流量とのおよその関係が判明するであろうと期待したのであるが，結果は否定的で，何等思わしい結果は得られなかつた。（第二図），秋の颱風雨量が年間雨量の大きな部分を占め，しかもこの時期の雨量，流量資料の誤差が大きいことを考えれば，年雨量，年流量で考えても意味の少いことが理解される。

年雨量，年流量の関係ではうまく行かないので，月雨量と，月流量との関係を調べる。　月雨量は各地点別に与えられているのであるが，ここでは各地点の月雨量の幾何平均えを以つて，流域全般の雨量の規模を示す量にすることにした。　更にくわしく考えれば，地点別に重さを考える必要があるが，年度により観測地

第二圖　年雨量と年流量との相関図



点に変更があることや，欠測があること，計算が甚しく面倒になることを考え合せると，そこまで分析することは困難であった。

さて各地点の月雨量の幾何平均をxとし，このxなる雨量が流域全部に一様に降り，それがその月の内に全部流出したとすれば，流域面積は553平方粁であるから，月平均流量は（大の月とし）

$$x \times \frac{553 \times 10^6 \times 10^{-3}}{31 \times 24 \times 60 \times 60} = 0.2065x$$

となる筈である。

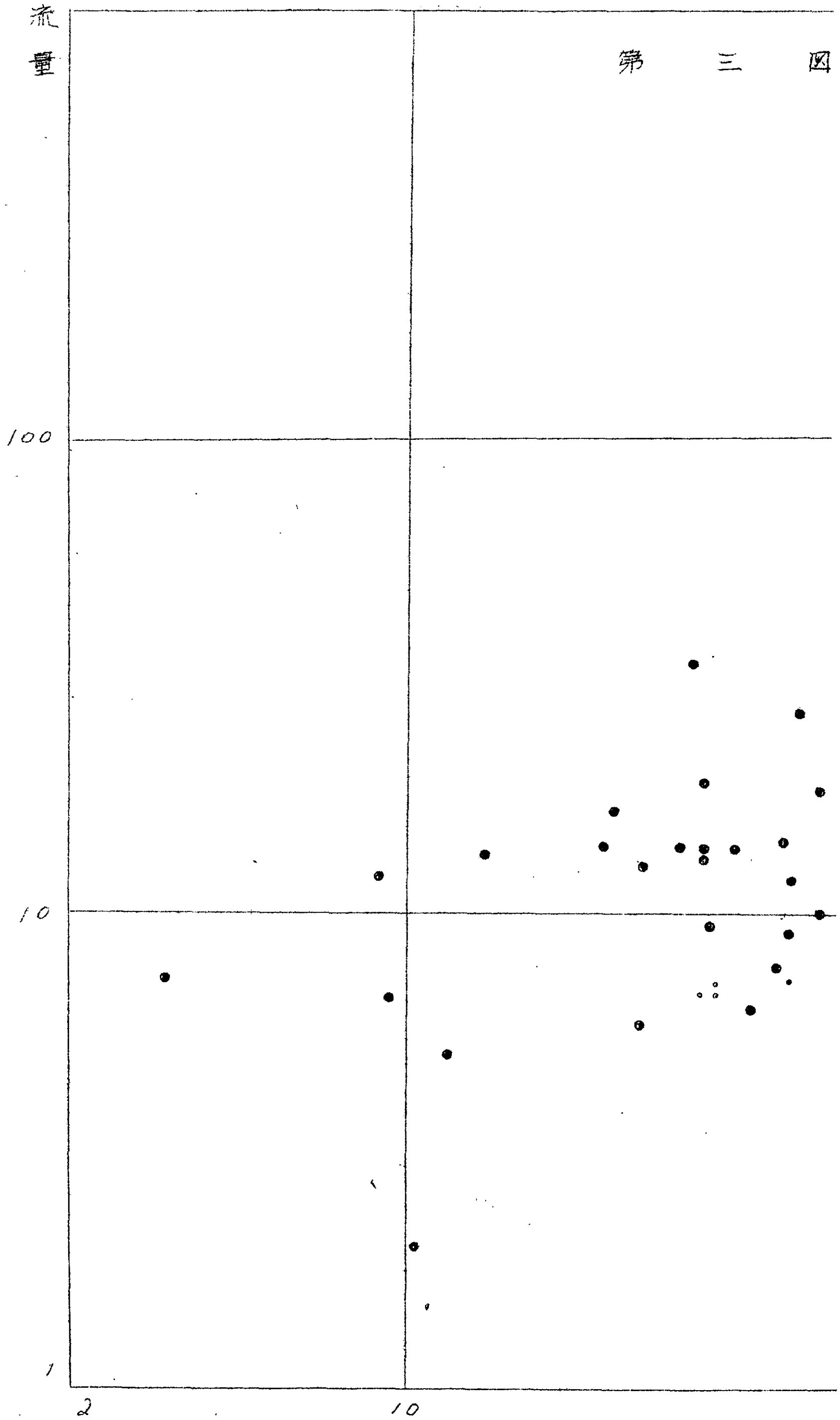
月流量yと，$0.2065x$とを比べると，かなりよく一致するが，全般的には$0.2065x$の方が大きすぎる傾向にある上に，1月，2月のような渇水期には，$0.2065x$にyより著しく小さい値を与える。（第三図）

ある月に雨が少し降っても，前月の雨量が大であれば　その月の流量はそう小さくはならないであろうし，また流域に涵養された水が定常的にある程度の流出を許すとも考えられる。　このように考えて，ある月の流量y_nはその月の雨量x_n，前月雨量x_{n-1}，前々月雨量x_{n-2}，・・・・・・・により推定されと考える，その推定式を求めるため，まず第一近似として一次式を考え，更にx_{n-2}，x_{n-3}，－－－－等の影響は少いと考えて無視し，流量y_nは一次式

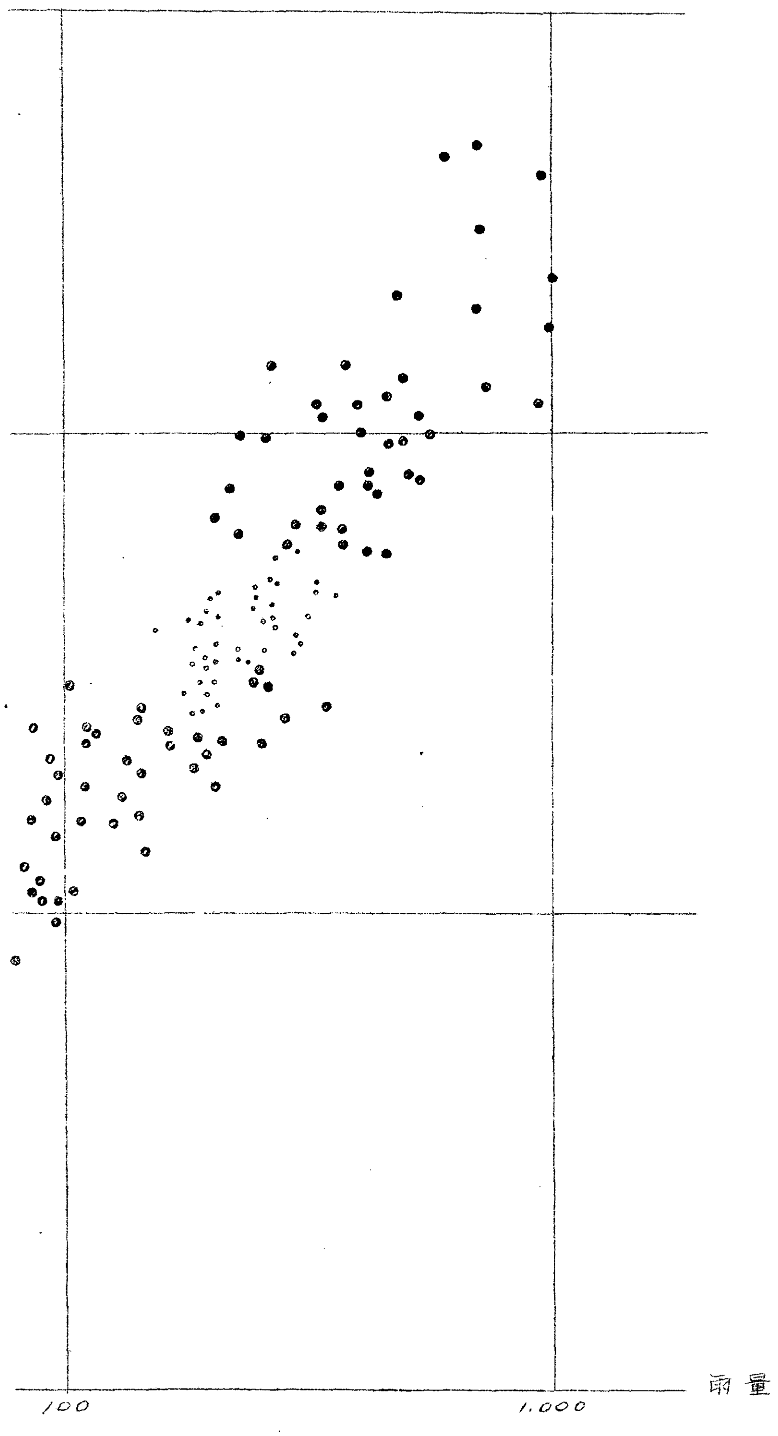
$$y_n = ax_n + bx_{n-1} + C$$

で近似されるものとした。　x_{n-2}，x_{n-3}，－－－等の影響および蒸散，浸透などは合せて定数項Cおよび誤差項にまとめられると考えるのである。

そこで問題は，推定の誤差が何らかの意味で最小になるように，a，b，Cの値を決定することである。　流量の測定誤差は流量におよそ比例し，相対誤差がおよそ一定と考えられるので，我々は相対誤差



第 三 図


雨量
100
1,000

$$\delta_n = \frac{y_n - (ax_n + bx_{n-1} + c)}{y_n}$$

の平方の和が最小になるように，a，b，c を定めることにした。

計算の結果

$a = 0.111$，　$b = 0.026$，　$c = 1.929$

が得られた。

この推定式によれば，豊水期には推定流量が常に小さく出る傾向が見られる。 ある程度以上雨が降れば，それは翌月に持ち越されずに流出してしまうであろうから，上の一次式による推定流量が豊水期に過小な値を与えるのは当然のことと考えられる。

上の結果でもう一つ注意すべきことは，a と b との比がおよそ 4：1 となることで，ある月の雨量は翌月におよそ $\frac{1}{4}$ だけ持ちこしになることを示す訳である。

5.　一次式による推定法の修正

上に得られた推定式は簡単な割に，豊水期以外ではかなりよい結果を与えるので，上の方法を適当に修正して，更により推定式を求めることを考えた。

a）豊水期と渇水期とを別々の一次式で推定する方法

これは甚だ便宜的な方法であるが，流量の多い6月～9月の4か月と，残りの8か月とを区別し，それぞれ異る一次式により推定しようとするものである。 最小二乗法により係数を求めると次の結果が得られる。

豊水期：　$a = 0.140$，　$b = 0.035$，　$c = -4.795$.

渇水期：　$a = 0.098$，　$b = 0.027$，　$c = 2.969$.

この係数を用いて流量を推定した結果を調べると，前より幾分よい結果を与えるだけで，そう大きな改良にはなっていない。注意すべきは，豊水期には $\frac{b}{a} = 0.25$，渇水期には $\frac{b}{a} \fallingdotseq 0.35$ であることと，渇水期の c がおよそ3であることである。

$C \fallingdotseq 3$ なる値は，涵養された水源から定常的に流出するものと考えてもよかろう。

b.) 涵養された水の量を考えること.

a) の方法で期待した程の効果が得られなかつたので，更に別な方法を考えることにした。 月別に，流量を雨量で割つてその比を作ると，3，4，5月頃が小さく，1月，2月頃の渇水期には大きいことがわかる。 これは渇水期には涵養された水が流出し，3，4，5月頃には逆に渇水期に流出して減つてしまつた水源の水が降雨で補われ，流出部分が減るからだと考えられる.

そこで何等かの方法で流域に涵養された水の量 Z_n を推定し，雨量 x_n と，Z_n との一次式で y_n を求めることを試みた。

ここで問題になるのは Z_n を推定する方法である. 降雨量も，流出量も，蒸発量もはつきりわからないのに，貯えられた量を知るのは甚だ困難であるので，まず大胆な仮説を立てることにする。

即ち，降つた雨のうち一定の割合が貯えられるとし，貯えられた水は，貯蓄高に比例する速度で流出するものとする。 そうすれば，涵養された水は，放射性元素と同様に，時とともに指数函数的に減少する。 かくて涵養された水の量 Z_n は次の式で表わされることになる。

$$
\begin{aligned}
Z_n &= kx_{n-1} + r(kx_{n-2}) + r^2(kx_{n-3}) + \cdots\cdots \\
&= k\sum_{i=1}^{\infty} r^{i-1} x_{n-i}.
\end{aligned}
$$

ここに r は1より小さいある未知の正数である. r を求めるためには，r に種々の値を代入して Z_n を計算し，その Z_n と x_n により y_n を近似し，誤差が最小になるようにすればよい

r が小さければ r^2 は小さくなつて，x_{n-2} は y_n に殆んど影響しないことになる。 x_{n-2} の y_n に対する影響が無視できるならば，それは§4の推定方式と同じことになる。 そこで r があまり小さくない場合についてまず計算することとし，

$r = 0.5$として計算を実行した。

$$Z_n = \sum_{i=1}^{\infty} 0.5^{i-1} x_{n-i}$$

と置き，相対誤差

$$\delta_n = \frac{y_n - (a x_n + b Z_n + c)}{y_n}$$

の平方の和が最小になるようにa，b，cを定めた。 計算の結果，次の値が得られた。

$$a = 0.118, \quad b = 0.018, \quad c = -0.102$$

これは流量を

$$\begin{aligned} &0.118 x_n + 0.018 Z_n - 0.102 \\ &= 0.118 x_n + 0.009 x_{n-1} + 0.0045 x_{n-2} + \cdots - 0.102 \end{aligned}$$

によって推定するものである。 この式のx_{n-2}の係数は相当小さいから，これは§4の一次推定式と実質的には大差のないもので，事実§4の推定式に比し良い結果を与えるとは言えない。

後にわかるように，$r = 0.5$という値が大き過ぎる所に，この推定式の欠点があるのであるが，この推定法の定性的長所はZ_nが事実3，4月頃に最も小さくなり，3，4月頃の流出比率の小さいことを説明するに適していることである。

以上の結果から，一次式を用いる限り，流量の推定はこれ以上うまく行きそうもないことがわかる。

6. 一次式によらない推定，Z_nとy_nとの相関関係

一次式によらない推定方式を考えることになると，どんな式を用いてよいか，方式の選擇に困る。それには水が貯えられ，流出する機構を模型的に考え，それに統計的処理をするのが正道であろうが，数学的，計算的に難しくなる。

そこで取り敢えず次のように考えることにした。 過去の降雨が現在の流量に及ぼす影響は指数函数的に減小すると考え，

$$Z_n = x_n + r x_{n-1} + r^2 x_{n-2} + \cdots = \sum_{i=0}^{\infty} r^i x_{n-i}$$

なる量を考える。　このZnは§5のZnとは異り，今月の雨量x_nまで入っている。　すなわち涵養された水と，今月の雨量との和である。　雨は一応全部貯蓄の中に繰り入れられ，前月からの貯蓄と一緒にされ，そこから流出すると考えるのである。

§5のように，x_nとZ_nとを考え，一次式を用いないで，x_n，Z_nからy_nを推定することになると，変数が3個になって処理が困難になるので，一応§5のx_nとZ_nとを，一つのZ_nにまとめ，Z_nとy_nとの関係だけを考えることにする訳である。　Z_nとy_nとの関係を調べるために，両対数方眼紙にZ_nとy_nとの相関関係を描いたものが，第四図である。　これを第三図の$\log x_n$と$\log y_n$との相関図表と比較して戴きたい。rを適当に選ぶことにより，$\log Z_n$と$\log y_n$との相関がすこぶるよくなることがわかる。　見た感じだけからでは不正確であるから，rの値を種々変えてその相関係数を計算し，かつ$\log y$を$\log Z$から最小二乗法により推定する式

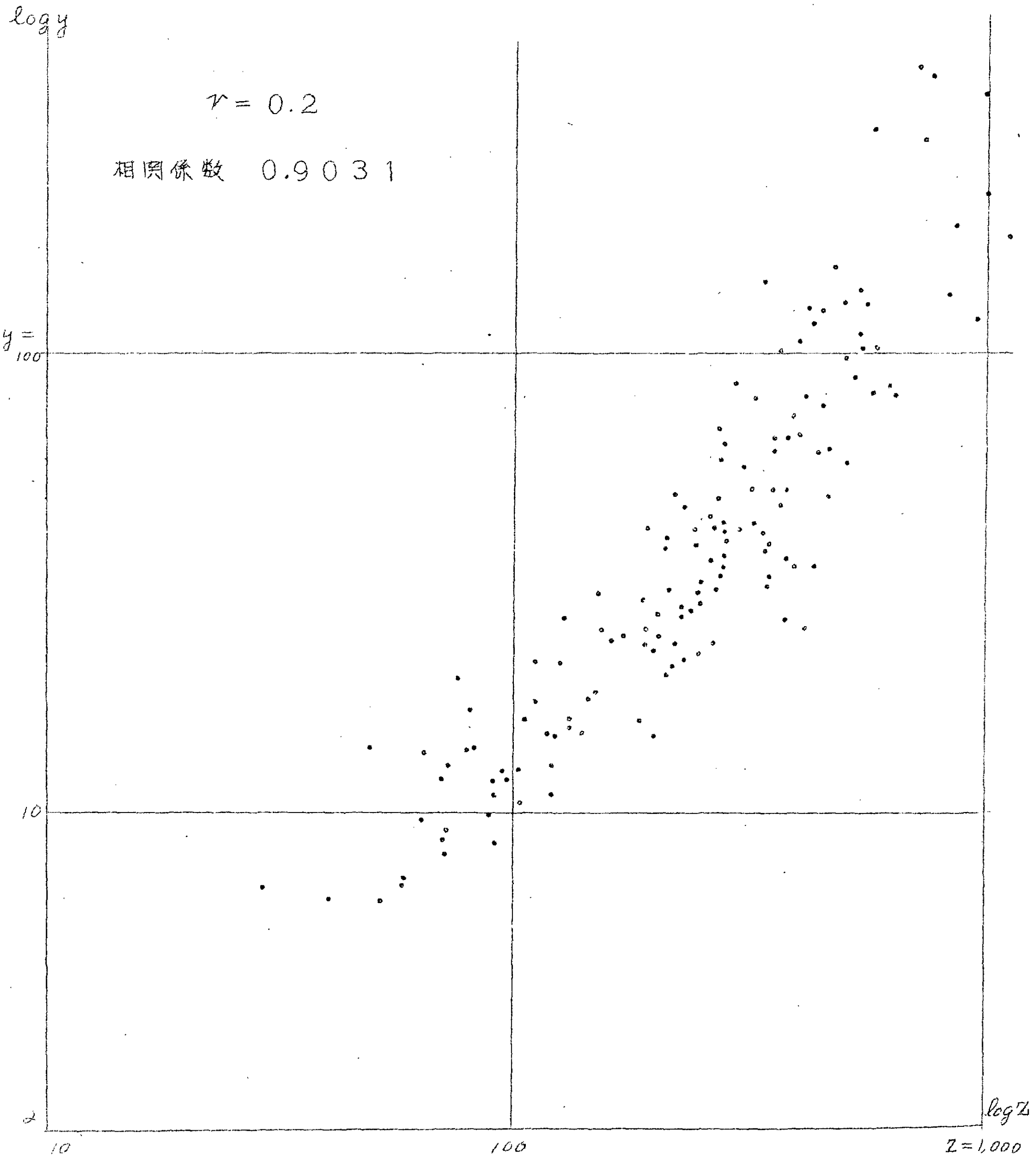
$$\log y = A \log Z + B$$

の係数を計算したものが，次の第一表である。　この表により，$r = 0.35$の時に相関係数が最大であることがわかる。

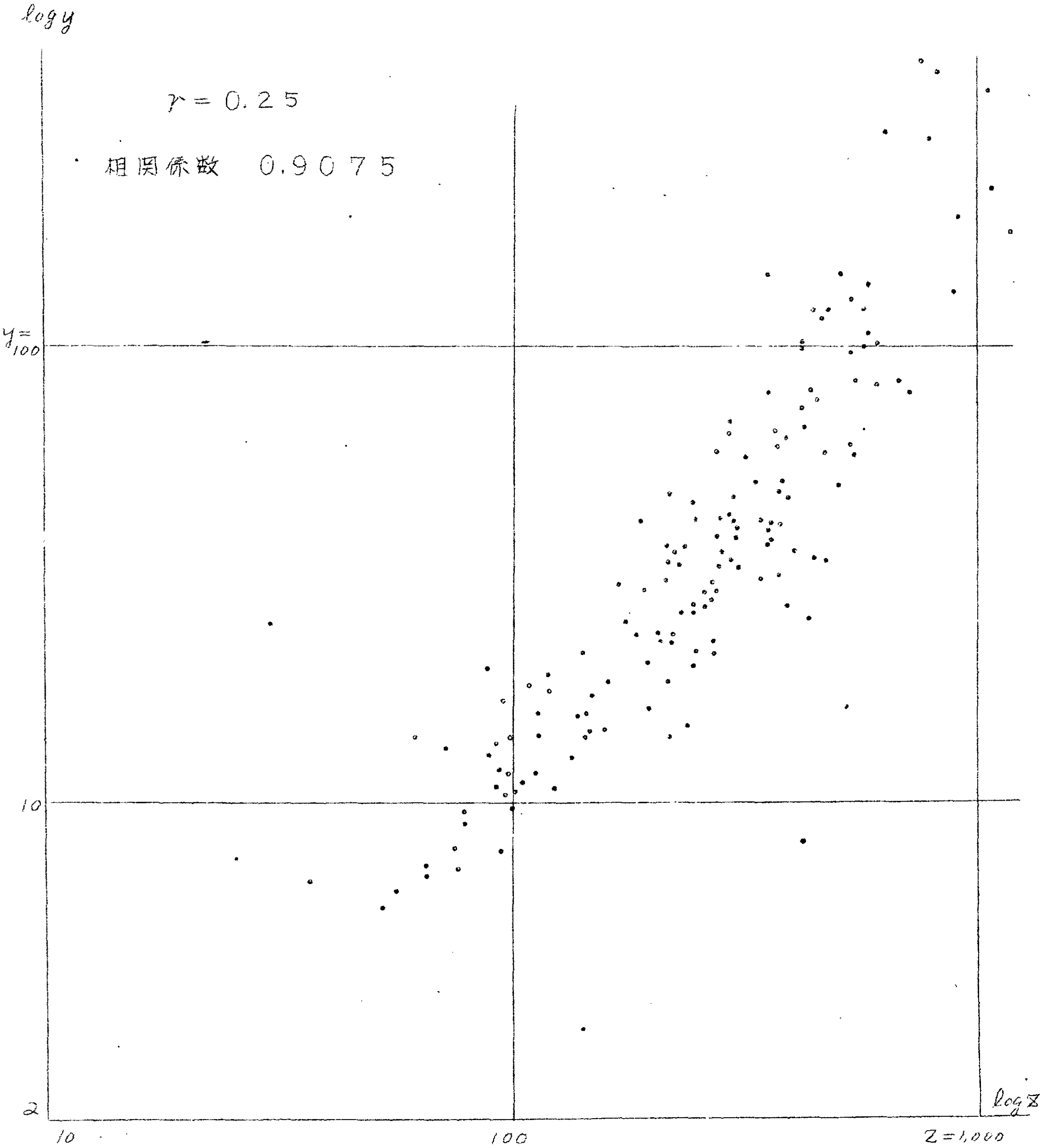
第　一　表

rの値	相関係数	A	B
0.20	0.9031	1.066	−1.004
0.25	0.9075	1.124	−1.184
0.30	0.9095	1.175	−1.349
0.35	0.9138	1.253	−1.593
0.40	0.8921	1.303	−1.764
0.50	0.8559	1.403	−2.152

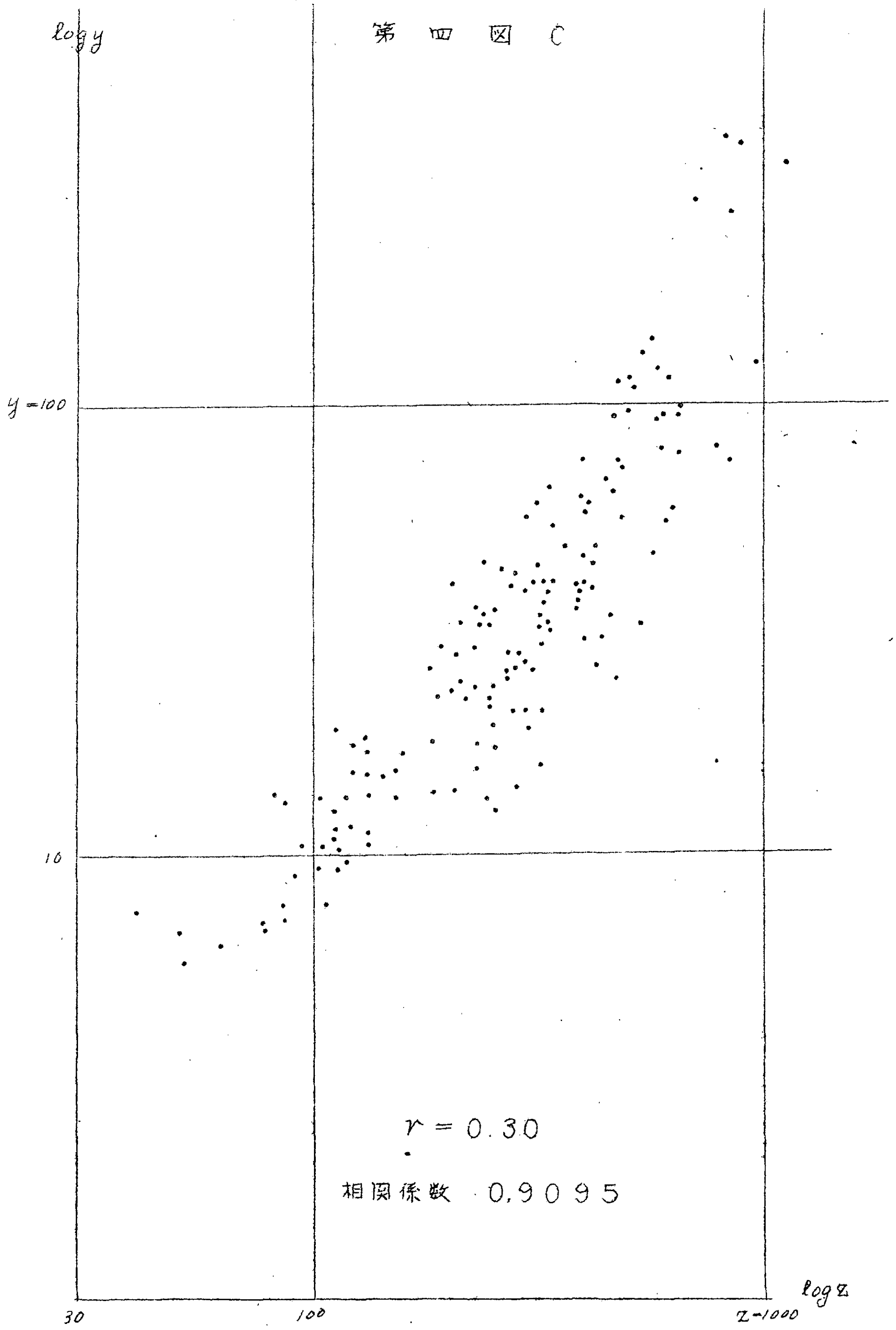
第 四 図 a



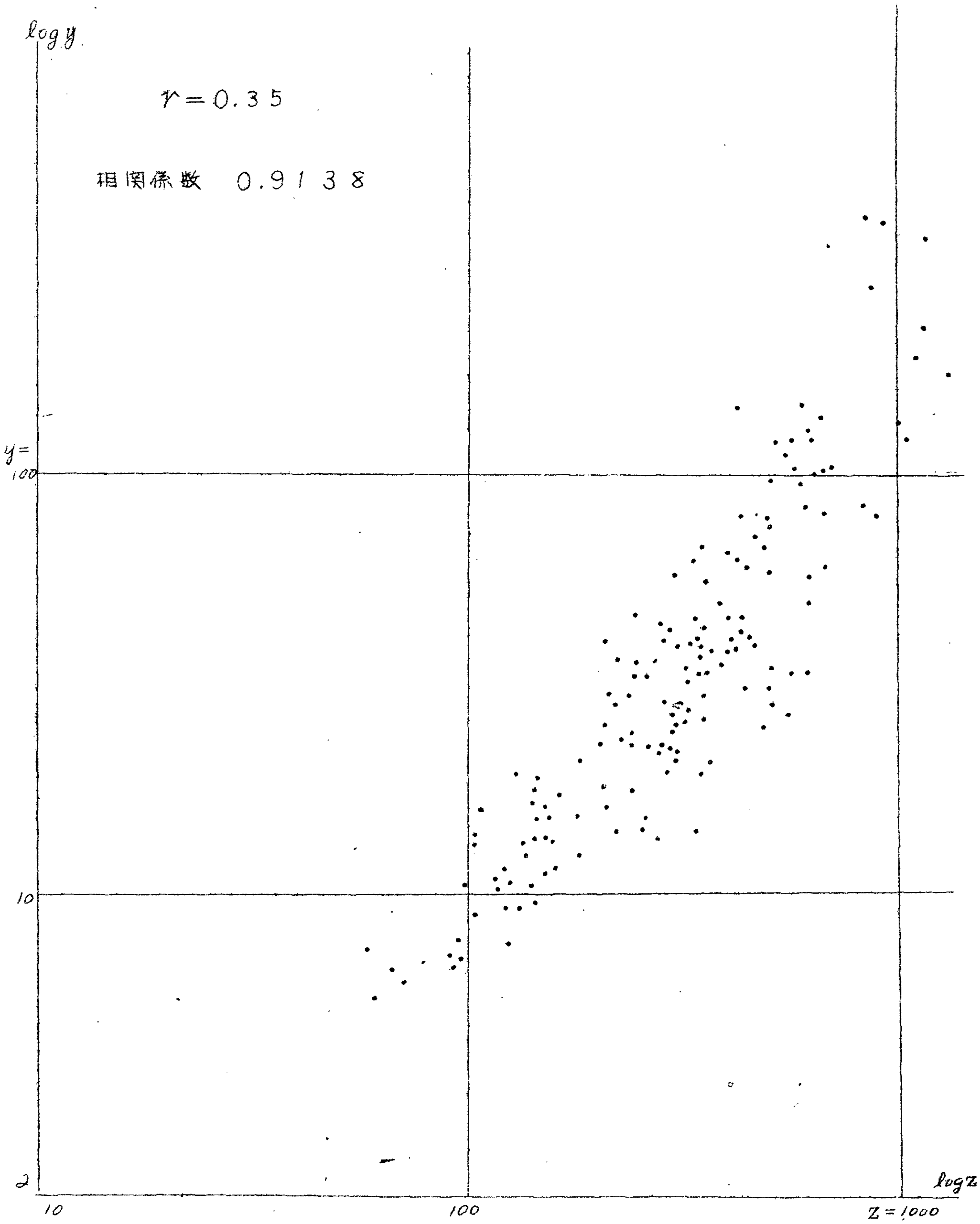
第 四 図 b



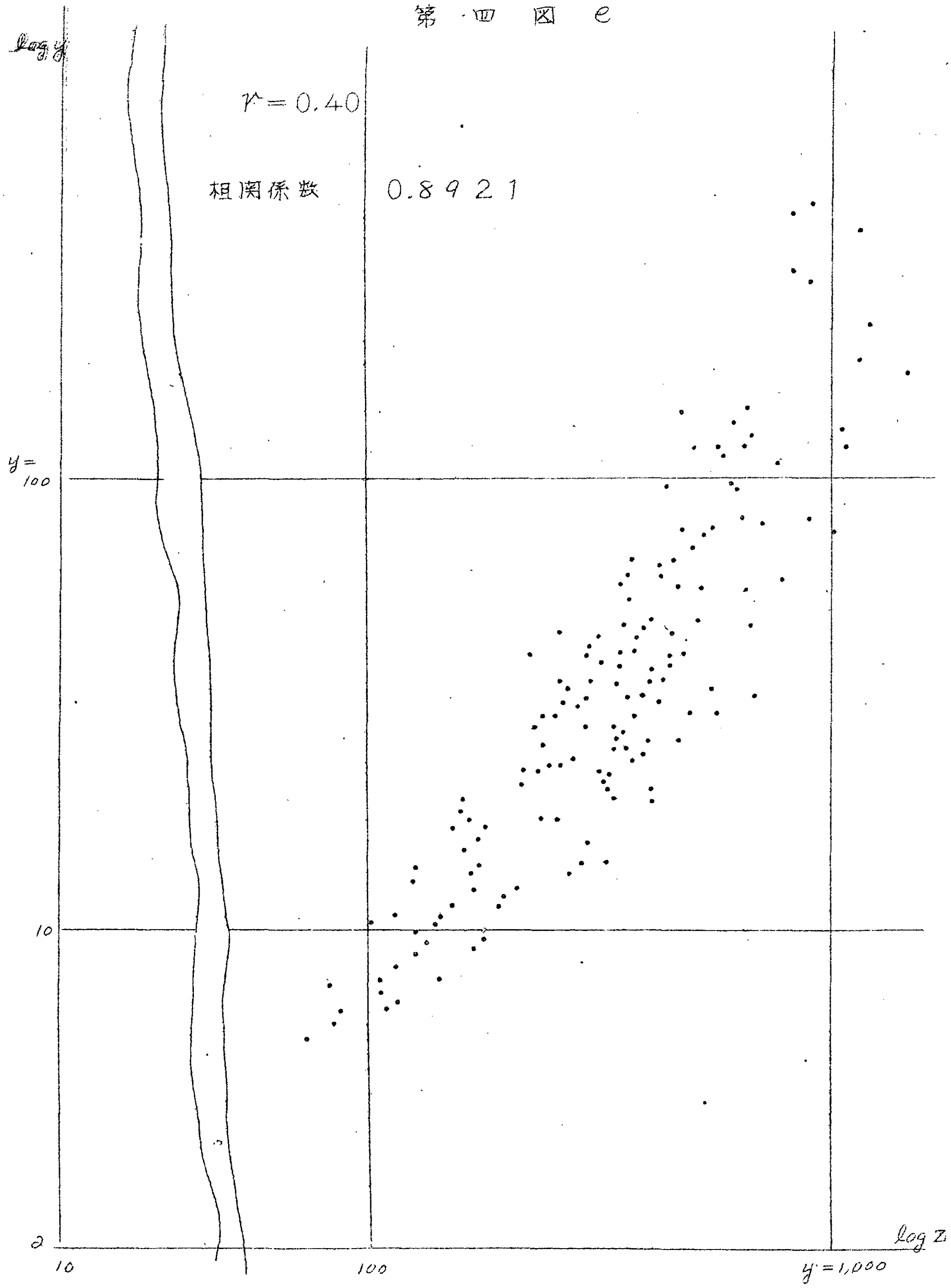
第四図 C



第 四 図 d



第 四 図 e



相関図を眺めた感じからいうと，$r=0.25$の時の方が帯状にまとまつているのに，相関係数がそれ程よくないのは，回帰線が幾分曲つていることと，流量の少い所に一二離れた点があることによるのである。

回帰線が直線から離れる一つの原因は，流量が少い所にある。これを修正するために，$\log y$ の代りに，適当な定数 C を選んで $\log(y-C)$ と $\log z$ との相関を調べることにする。Cには種々の値を代入し，相関係数が最大となるように定めるべきであるが，相関図を見て目分量で $C=3$ と定めた。§5の一次式による推定では，渇水期の流量推定式 $y_n=ax_n+bx_{n-1}+C$ に於て $C=2.969$ となつたことを考え合わせると，この $C=3$ なる値は，ほぼ適当であると考えられる。

第五図は $\log(y-3)$ と $\log z$ との相関を示すものである。$\log(y-3)$ と $\log z$ との相関係数，および $\log(y-3)$ を最小二乗法により $\log z$ から推定する式

$$\log(y-3)=A\log z+B$$

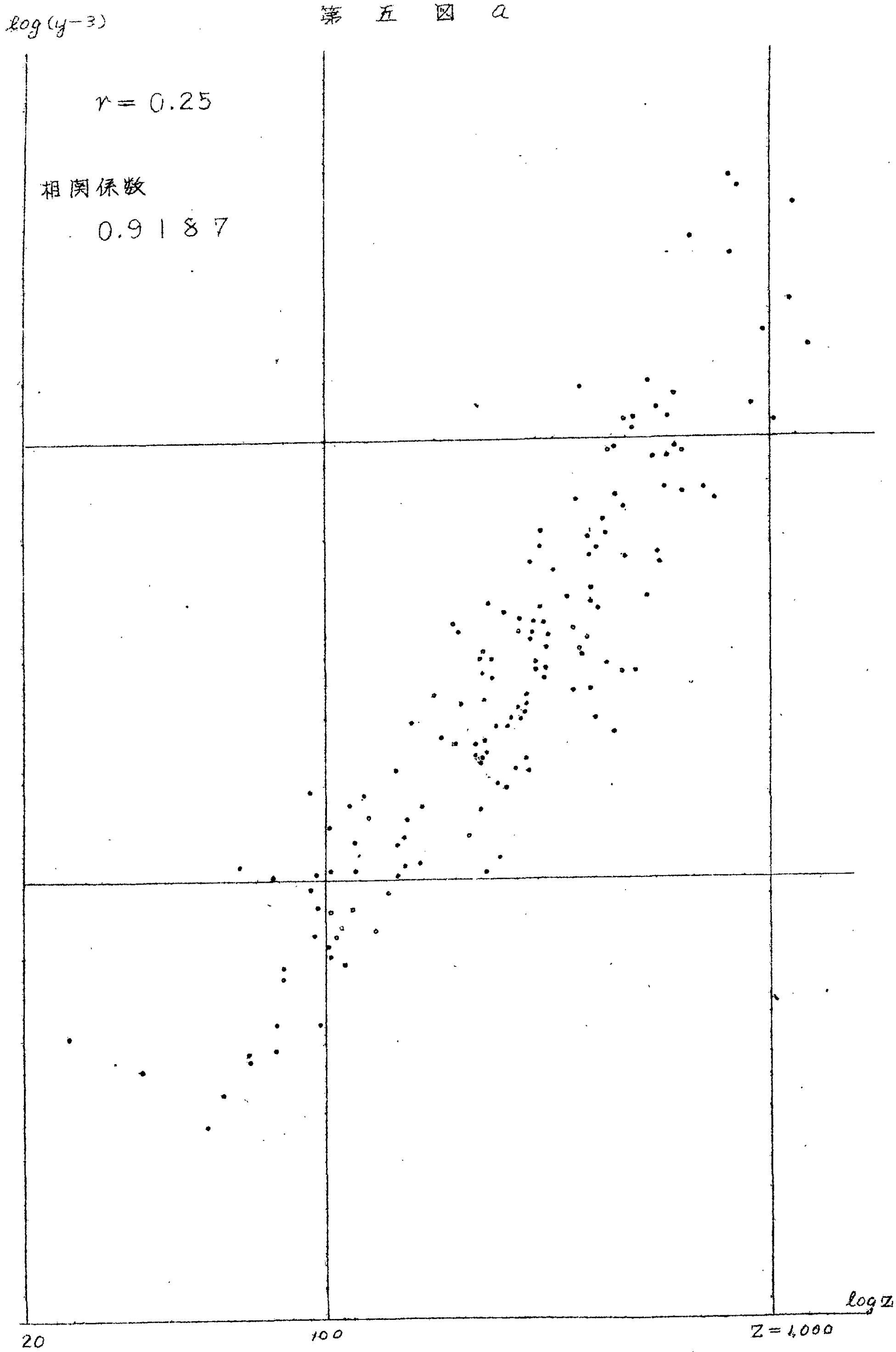
の係数を計算した結果が第二表である。

第二表

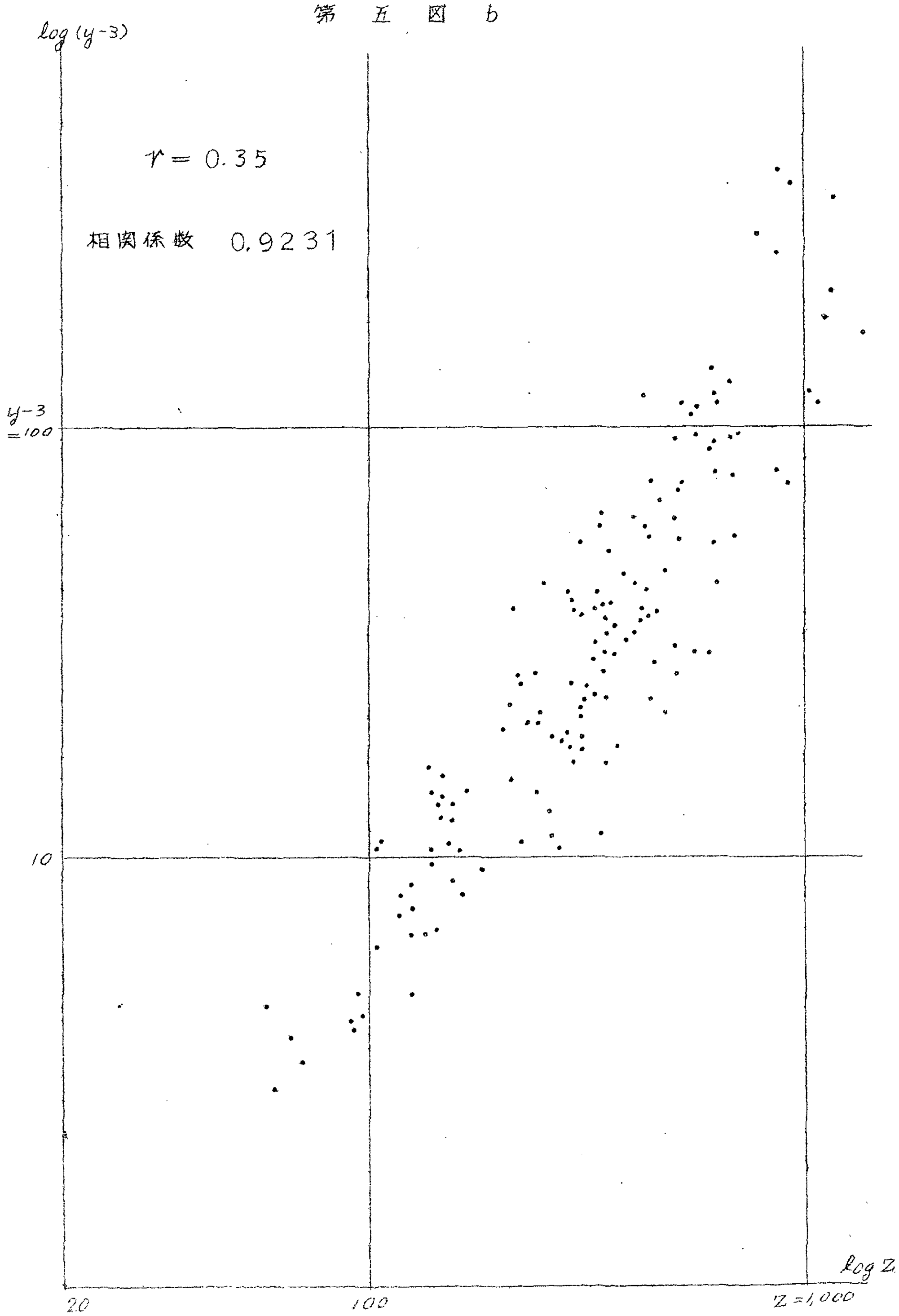
rの値	相関係数	A	B
0.25	0.9187	1.2892	−1.6454
0.30	0.9207	1.3468	−1.8350
0.35	0.9231	1.4338	−2.1059
0.40	0.9014	1.4915	−2.3030

この場合も $r=0.35$ の時に相関係数は最大となる。ここに得られた結果は，§4，§5の結果に比べると遙かによいのであるが，種々の不満足な点を持っている。

第 五 図 a



第　五　図　b



7. 前節の方法の批判

前節の方法は，涵養された水を

$$Z_n = \sum_{i=0}^{\infty} r^i x_{n-i}$$

で推定し，流量を

$$\log(y - C) = A \log Z + B$$

によつて推定するもので，$r = 0.35$，$C = 3$と置くことにより相関係数0.9231なる値に達したのである。

この推定式のCは渇水時に推定の精度を上げる役目をするもので，これを無視することにすれば，上の式は次のように書き換えられる。

$$y = kZ^A = (kZ^{A-1})Z \qquad (\text{ただし} \log k = B)$$

kZ^{A-1}をZに掛かる係数と考えれば，これは涵養された水の何%が流出するかを示すものであるから，仮にこれを流出率函数と呼ぶことにする。

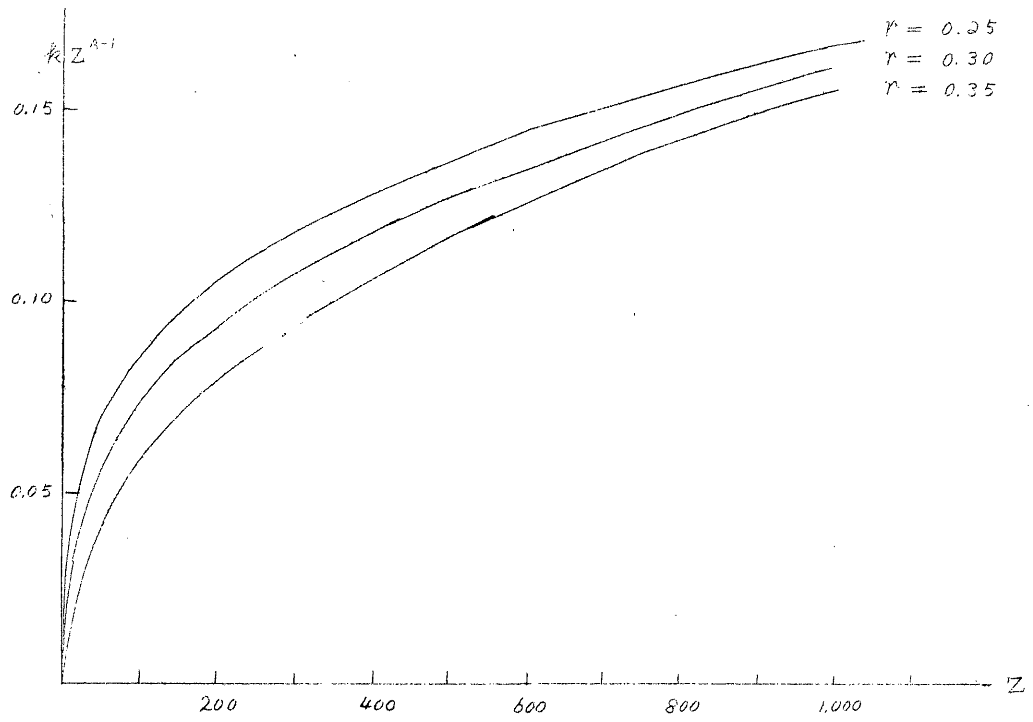
Aの値はrの値によつて変るが，およそ1.3〜1.5程度の数であるから，流出率函数kZ^{A-1}は，およそ$y = k\sqrt[3]{Z}$，$y = k\sqrt{Z}$のような曲線で，Zとともに増加する。その様子を示すものが，第三表及び第六図である。

Zは$\sum_{i=0}^{\infty} r^i x_{n-i}$で定義されているから，その単位は雨量と同じく$mm$単位である。従つて

第三表　流出率函数　kZ^{A-1}

r \ Z	100	200	300	400	500	600	700	800	900	1,000
0.25	0.086	0.105	0.118	0.128	0.137	0.144	0.150	0.156	0.162	0.167
0.30	0.072	0.092	0.106	0.117	0.126	0.134	0.142	0.149	0.155	0.160
0.35	0.058	0.078	0.093	0.105	0.116	0.126	0.134	0.142	0.150	0.157

第六図　流出率函数　$kZ^{\lambda-1}$



Zと流量yとを比較するには，前にも出た換算定数0.2065を考える必要がある。　涵養された水が全部流出するとすれば流出率函数は0.2065となるから，流出率函数はZとともに増し，0.2065に漸近する函数となるであろうと一応は考えられる。

我々が得た函数 kZ^{A-1} はZとともにいくらでも増すから，この條件には適さないが，第六図から明らかなように増加がゆるやかであるし，Zの値は事実上1,000を超えることが少いから，この辺では0.2065に下から近づくという，工合のよい性質を備えている。

我々はrの値を種々変えて，Zからyを推定する式を作つたのであるが，第六図から明らかなように，rの値を変えると流出率函数はかなり異つた曲線となる。　その理由を次に考えよう。

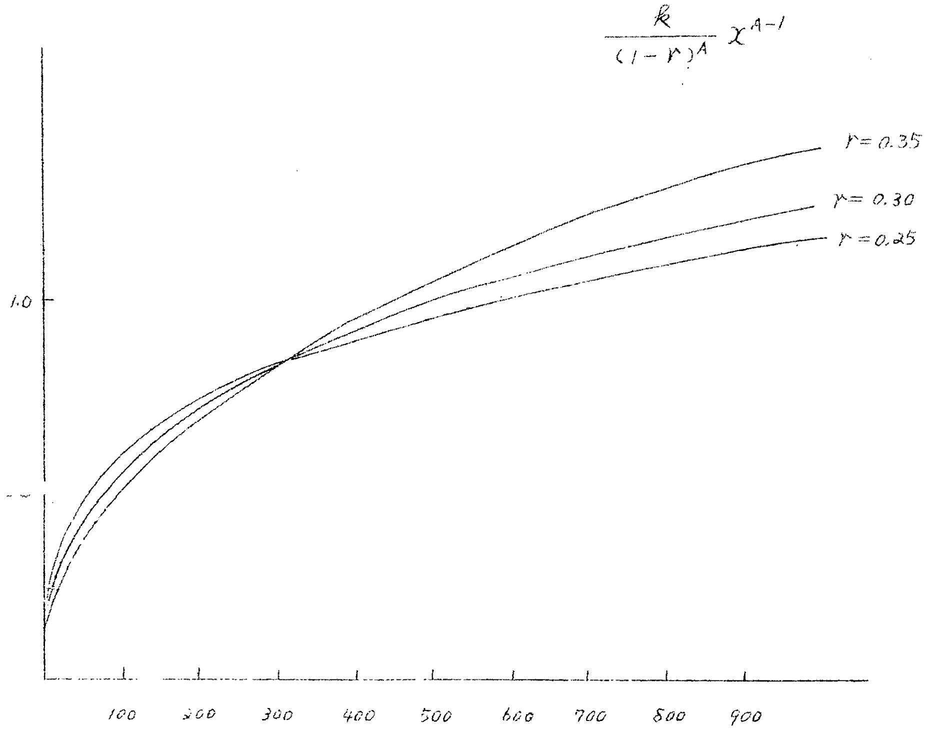
もし毎月同じ雨量xが降り続けば，涵養された水の量は

$$Z = \sum_{i=0}^{\infty} r^i x = x \sum_{i=0}^{\infty} r^i = \frac{x}{1-r}$$

となり，Zはxの $\frac{1}{1-r}$ 倍となる。　rを大きくとることは涵養された水の量を大きく見積もることであるから，これを用いて流量を推定する時は流出率函数が小さくなる筈で，第六図は確かにこの性質を備えている。　元来涵養された水とは言いながら，土と密接に結びついて容易に流出しない部分があれば，それはないと同じである。　涵養された水の量というのは，その実際の量が必要になるのではないので，雨量と流量との間の時間的ずれを説明する媒介として必要なのである。　涵養量を大きくとり流出率を小さくとるか，その逆にするかは互に相殺し合うので，$r=0.25$にしても，$r=0.35$にしても，推定された流量にはそれ程差異は生じないのである。　この間の事情を調べるために，毎月xの雨が降つたとすれば，涵養された水Zは，$Z=\frac{x}{1-r}$ となり，これから kZ^A なる水が流出する。　これと雨量xとの比をとると

$$kZ^A \div x = k\left(\frac{x}{1-r}\right)^A \div x = \frac{k}{(1-r)^A}x^{A-1}$$

第七図



となる。　これを雨量と流量との換算定数0.2065で割つたものが第四表及び第七図である。

第四表　$\frac{k}{(1-r)^A}x^{A-1}$

x	100	200	300	400	500	600	700	800	900	1,000
0.25	0.603	0.737	0.828	0.898	0.961	1.010	1.053	1.095	1.137	1.172
0.30	0.564	0.720	0.830	0.916	0.986	1.049	1.112	1.167	1.213	1.253
0.35	0.521	0.701	0.835	0.943	1.042	1.132	1.203	1.275	1.347	1.410

第七図を見ると，三本の曲線は甚だよく一致している。これによつて我々は流出率函数にかなり大きな信頼を持つことができる

ようになるのであるが，しかし第三表の流出率函数は大きな矛盾を持っているのである。

我々の推定方式は次の通りである。まず

$$Z_n = \sum_{i=0}^{\infty} r^i x_{n-i}$$

により涵養された水 Z_n を出し，これに流出率函数 kZ_n^{A-1} を掛けると流量が出る（Cは省略した）：

$$y_n = (kZ_n^{A-1})Z_n = kZ_n^A$$

この y_n が流出すれば，涵養された水は，y_n を mm 単位に換算し $\frac{y_n}{0.2065}$ だけ減るから，その残り $(1-kZ^{A-1}\times\frac{1}{0.2065})Z_n$ が翌月に持ち越され，これに x_{n+1} を加えたものが Z_{n+1} になるべきである。：

$$Z_{n+1} = x_{n+1} + \left(1 - \frac{kZ^{A-1}}{0.2065}\right)Z_n.$$

しかるに我々は定数 r を用いて

$$Z_{n+1} = x_{n+1} + rZ_n$$

により Z_{n+1} を求めている。

これは原理的に矛盾であるばかりでなく，10月，11月の推定流量が実際の流量より大きく出る傾向があるという。実験的な欠陥の原因にもなっている。　9月の豊富な雨量は，その月の内に大部分流出し，後に大きな影響を残さないのに，我々の推定式では10月，11月の流量に効いているのである。（第十一図）

8.　§6の方法の修正

以上の考察により§6の方法の修正方式は明らかである。

Z_n を求める式

$$Z_n = x_n + r Z_{n-1}$$

に於て，r を Z_{n-1} の函数として変化させればよいのである。

第四図から明らかなように，$r = 0.25$ の場合の $\log y$ と $\log Z$ の相関図で，点がかなり帯状にまとまつているのに，相関係数があまりよくないのは，Zの小さい所で点がとび離れるからで，この辺では $r = 0.35$ の方がまとまつている。それに対して，Zの大きい所では $r = 0.25$ の方が点はよくまとまつている。我々は§5，a）の豊水期，渇水期について別の一次式で流量を推定しようとしたことを考えるとよい。その時 $\frac{b}{a}$ は豊水期に 0.25，渇水期に 0.35となり，前月雨量が翌月にくり越される率は異つた値に出て来たのである。r の値をZに応じて適当に変えれば，$\log y$ と $\log Z$ との相関は更によくなるはずである。

そこで問題になるのは $r = r(Z)$ の定め方である。我々は取り敢えず，第六図の $r = 0.25$ に対する流出率函数を用い，つぎの函数，

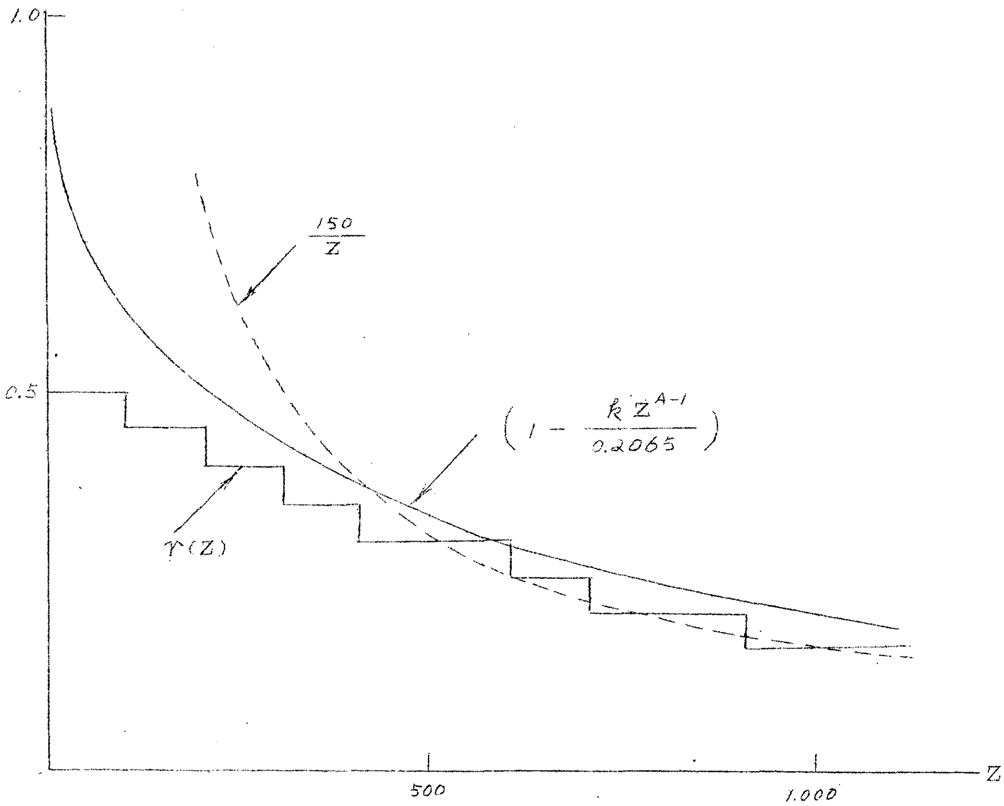
$$\left(1 - \frac{k Z^{A-1}}{0.2065} \right)$$

を r に用いることにし，計算を簡単にするため，これを第五表の階段状函数で近似することにした。（第八図）

第　五　表

Z	0 ~100	100 ~200	200 ~300	300 ~400	400 ~600	600 ~700	700 ~900	900 以上
r(Z)	0.5	0.45	0.4	0.35	0.3	0.25	0.20	0.15

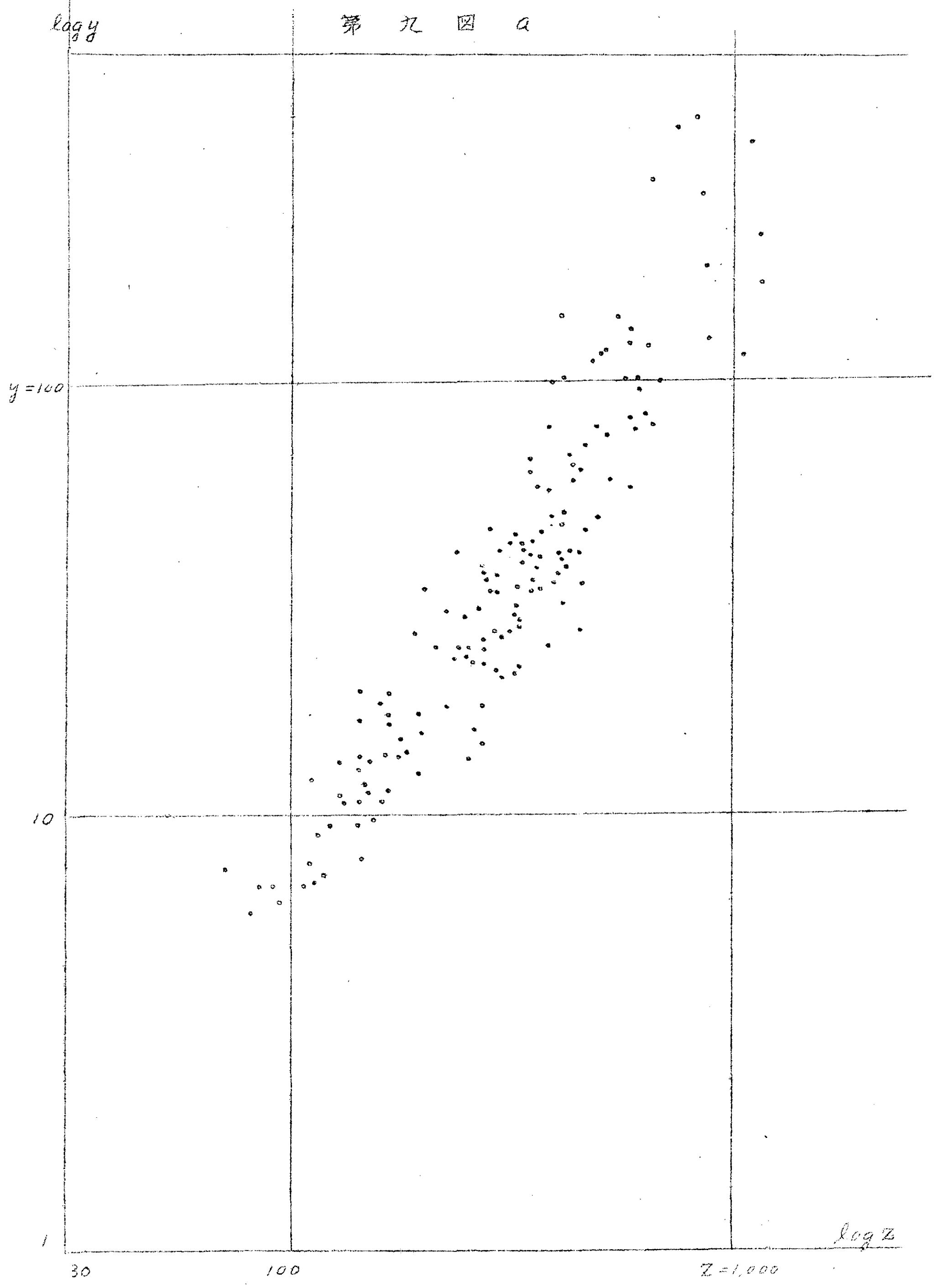
第 八 図

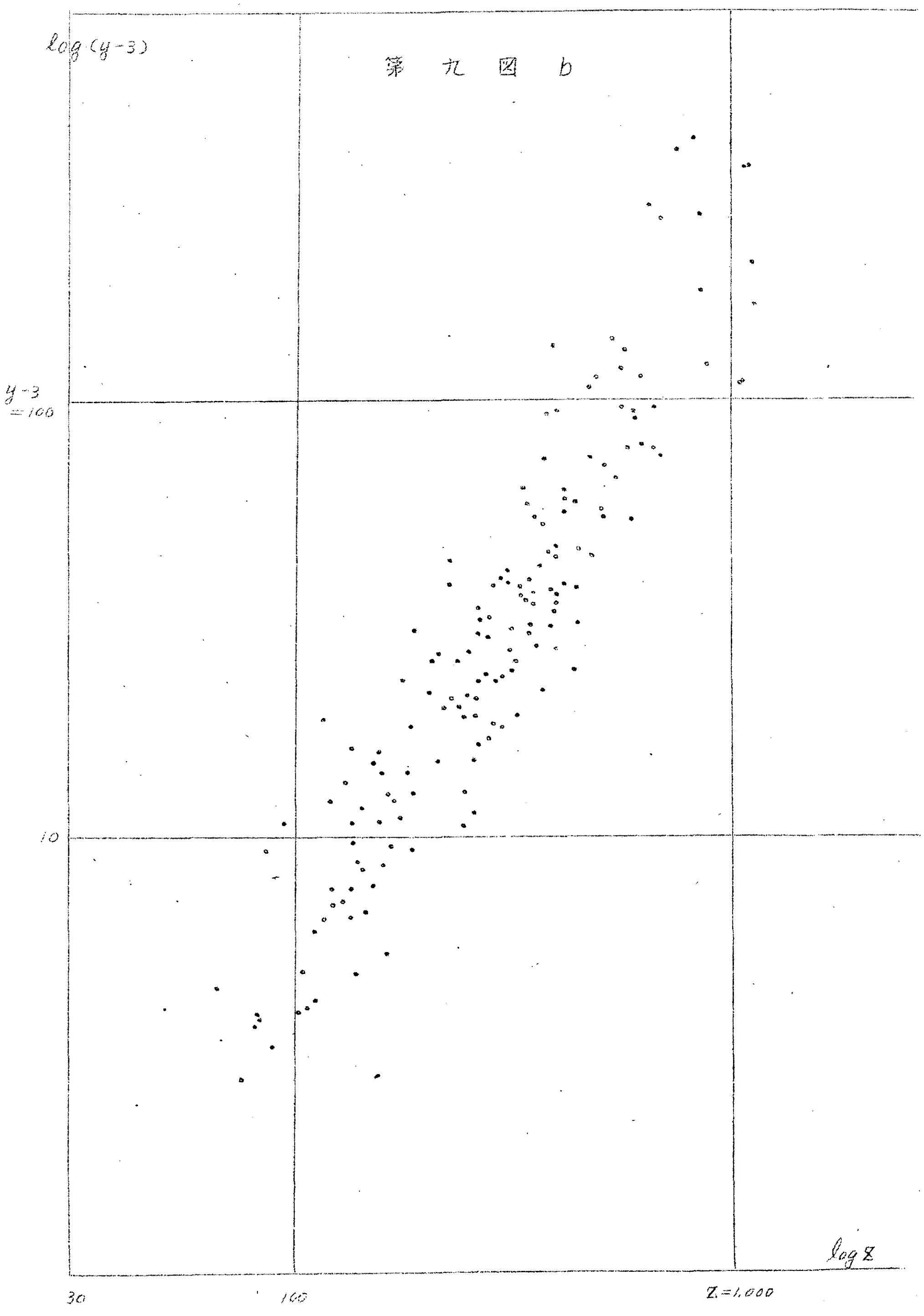


$r(Z)$を $\left(1-\dfrac{kZ^{A-1}}{0.2065}\right)$ より小さくとつたのは，蒸散，浸透を考えたとも言えるが，実質的には，このグラフを少し位変えても結果にはそう影響がないであろう。

このr(Z)を用いて Z_n を求め，$\log Z_n$ と $\log y_n$，および，$\log Z_n$ と $\log(y_n-3)$ との相関図を描いたものが第九図である。

第九図 a




log (y-3)
第九図 b
y-3 =100
10
log Z
30
100
Z=1,000

相関係数を計算すると $\log(y-3)$ と $\log Z$ との相関係数は 0.9524，$\log y$ と $\log Z$ との相関係数は 0.9304 と出る。

ここに得られた 0.9524 なる相関係数は先に得られた 0.9231 より目立ってよい値である。相関係数は 0.9 程度になると容易に大きくならないもので，ある統計によれば人の両脚の相関係数が 0.96 であるというし，観測された流量や雨量の誤差を考えればこれ以上相関係数を大きくすることに努力するのは，余り意味がないであろう。

$\log Z$ より $\log(y-3)$ または $\log y$ を推定する式を，最小二乗法から定めると次の通りである。

$$\log(y-3) = 1.6170 \log Z - 2.5298,$$

相関係数　0.9524.

$$\log y = 1.4118 \log Z - 1.9671,$$

相関係数　0.9304.

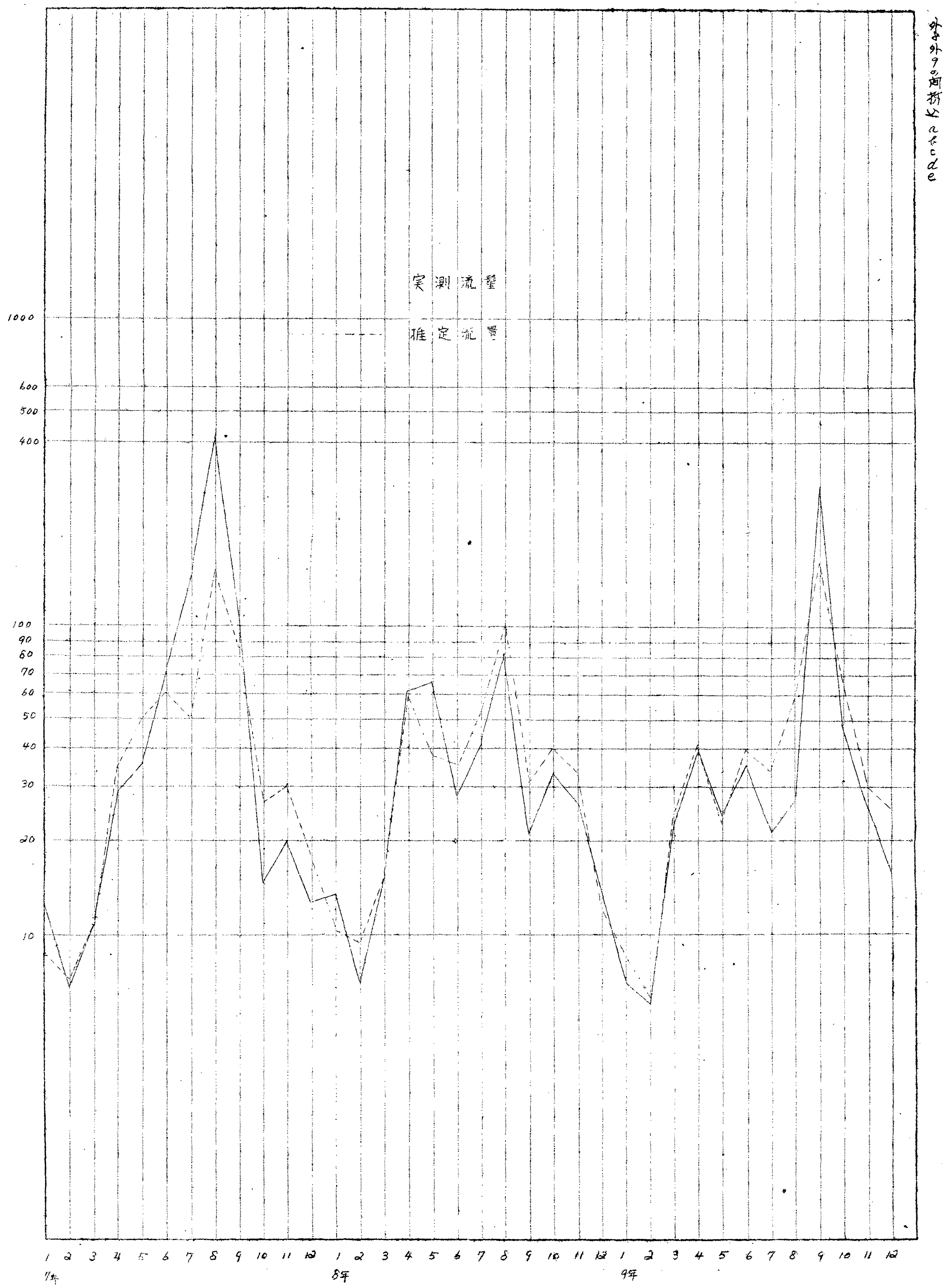
上の推定方式によつて，昭和7年から19年までの流量を推定し，これと実際の流量とを比較したのが，第六表及び第十図である。

第十図を見ると，昭和7年夏の推定流量が甚だ悪いことが目立つ。しかし昭和7年8月の資料に戻つて調べてみると，月降雨量は，朴野1144，坂州1330，沢谷461，出原309であつて，甚だしい地域的変動が見られる。しかも月平均流量は405という大きな値で，これは全流域に2,000 mm の降雨量があることに相当している。このような特別の場合まで推定することは無理であろう。

第六表　流量と推定流量

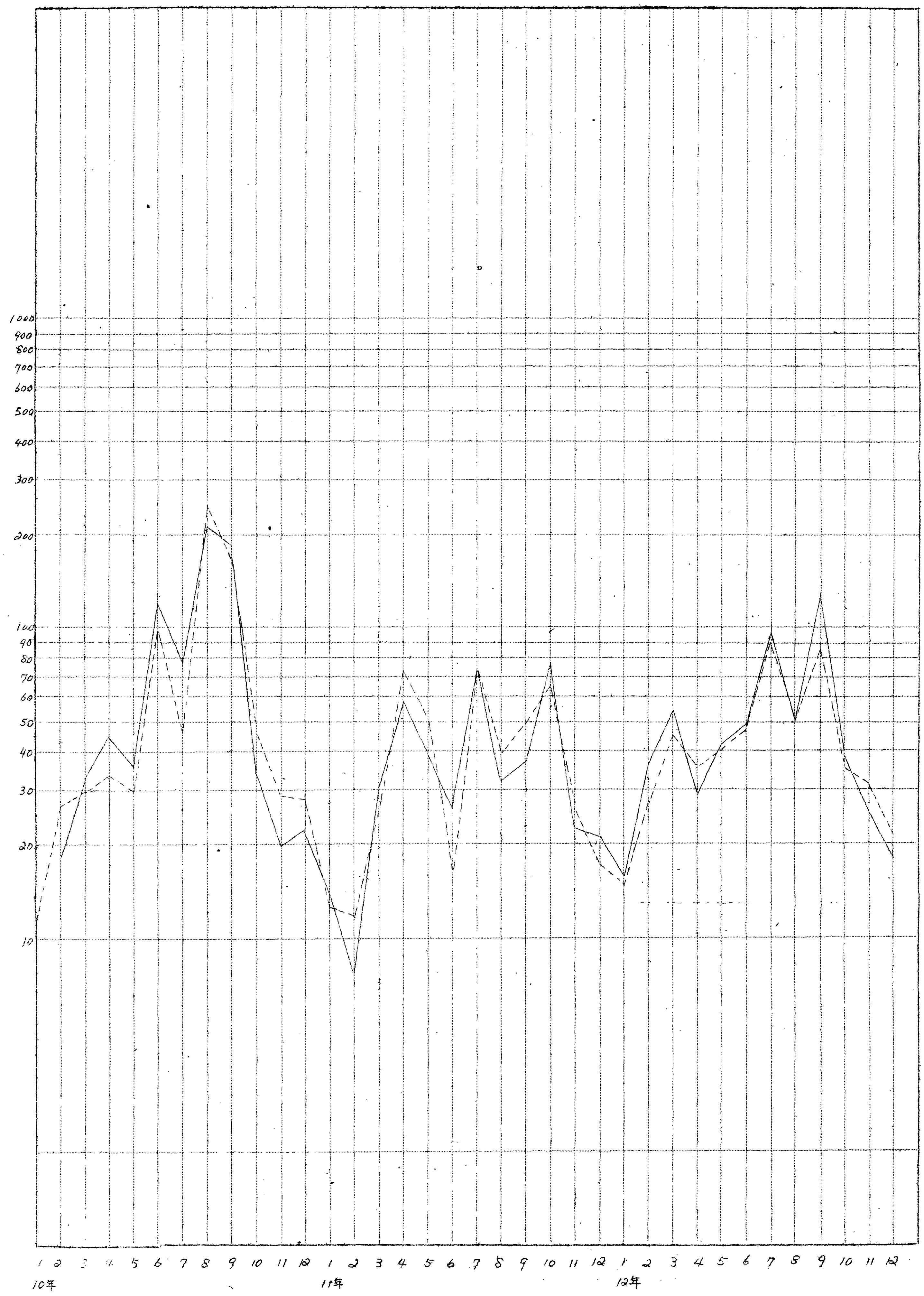
		1月	2月	3月	4月	5月	6月	7月	8月	9月	10月	11月	12月
昭和7年	y	12.3	6.8	10.6	28.8	35.6	70.4	139.0	405.0	100.1	14.4	19.9	12.4
	η	8.6	7.0	10.5	34.9	50.5	61.2	50.9	153.1	87.2	27.0	30.1	17.4
8年	y	13.2	7.2	15.2	61.8	66.4	27.5	40.4	79.9	21.0	33.2	26.5	13.7
	η	10.3	9.3	15.2	59.6	38.5	35.7	54.1	108.7	31.4	40.8	33.5	11.8
9年	y	6.9	5.8	22.7	39.0	23.8	34.5	21.0	26.7	272.9	47.5	26.4	15.7
	η	8.5	6.2	24.3	42.0	23.0	40.0	34.0	59.1	162.1	68.0	30.3	25.5
10年	y	19.2	18.0	32.3	44.2	35.0	119.0	77.0	215.0	181.9	33.4	19.6	22.0
	η	11.7	26.9	29.9	33.7	30.1	105.9	46.4	264.8	167.9	48.2	28.8	27.9
11年	y	13.4	7.8	29.8	57.3	39.3	25.9	75.0	32.3	36.9	77.6	22.4	21.1
	η	12.4	11.8	26.5	75.2	51.3	16.3	74.6	39.6	51.7	67.1	25.4	17.0
12年	y	15.4	36.0	54.6	28.2	41.8	48.3	95.1	49.3	122.9	37.8	25.8	18.1
	η	14.4	28.2	45.7	36.1	40.7	48.2	94.5	51.8	58.7	36.3	31.4	20.9
13年	y	17.9	18.9	28.7	22.8	63.8	33.1	116.0	171.0	76.9	59.4	14.1	9.4
	η	13.4	14.2	24.1	21.8	56.0	35.9	229.9	266.8	92.8	73.7	15.8	9.7
14年	y	9.1	7.8	42.7	36.8	29.5	15.6	32.6	45.0	58.5	56.5	40.2	11.7
	η	9.2	8.6	33.3	40.2	20.7	17.3	28.7	61.5	54.9	91.1	49.2	12.0
15年	y	7.5	13.6	17.1	39.6	13.8	22.1	62.0	99.6	141.3	34.1	25.6	12.7
	η	5.7	15.0	14.2	37.9	13.9	36.5	39.7	112.9	80.2	60.1	28.1	11.5
16年	y	11.5	10.1	40.4	34.8	40.5	96.8	111.0	356.0	125.8	99.5	30.6	24.4
	η	12.3	11.0	22.8	28.6	31.7	94.7	67.6	133.5	173.0	51.1	42.7	19.4
17年	y	13.8	10.6	56.7	45.0	41.0	81.8	33.1	132.0	116.1	24.2	11.6	6.8
	η	7.8	11.6	42.5	43.8	36.9	100.0	17.6	89.8	71.1	26.2	14.0	6.6
18年	y	6.3	10.9	10.7	46.0	23.7	116.1	350.0	81.3	289.4	30.4	14.0	9.8
	η	7.2	10.3	13.4	28.3	27.7	71.5	253.4	90.2	106.8	51.1	15.9	12.4
19年	y	7.1	9.5	17.1	46.6	41.7	13.7	24.9	64.9	97.7	40.0	30.0	16.5
	η	5.7	11.5	17.1	51.0	34.2	24.7	45.8	55.9	47.6	58.6	35.3	11.3

第 1 0 図 (a)

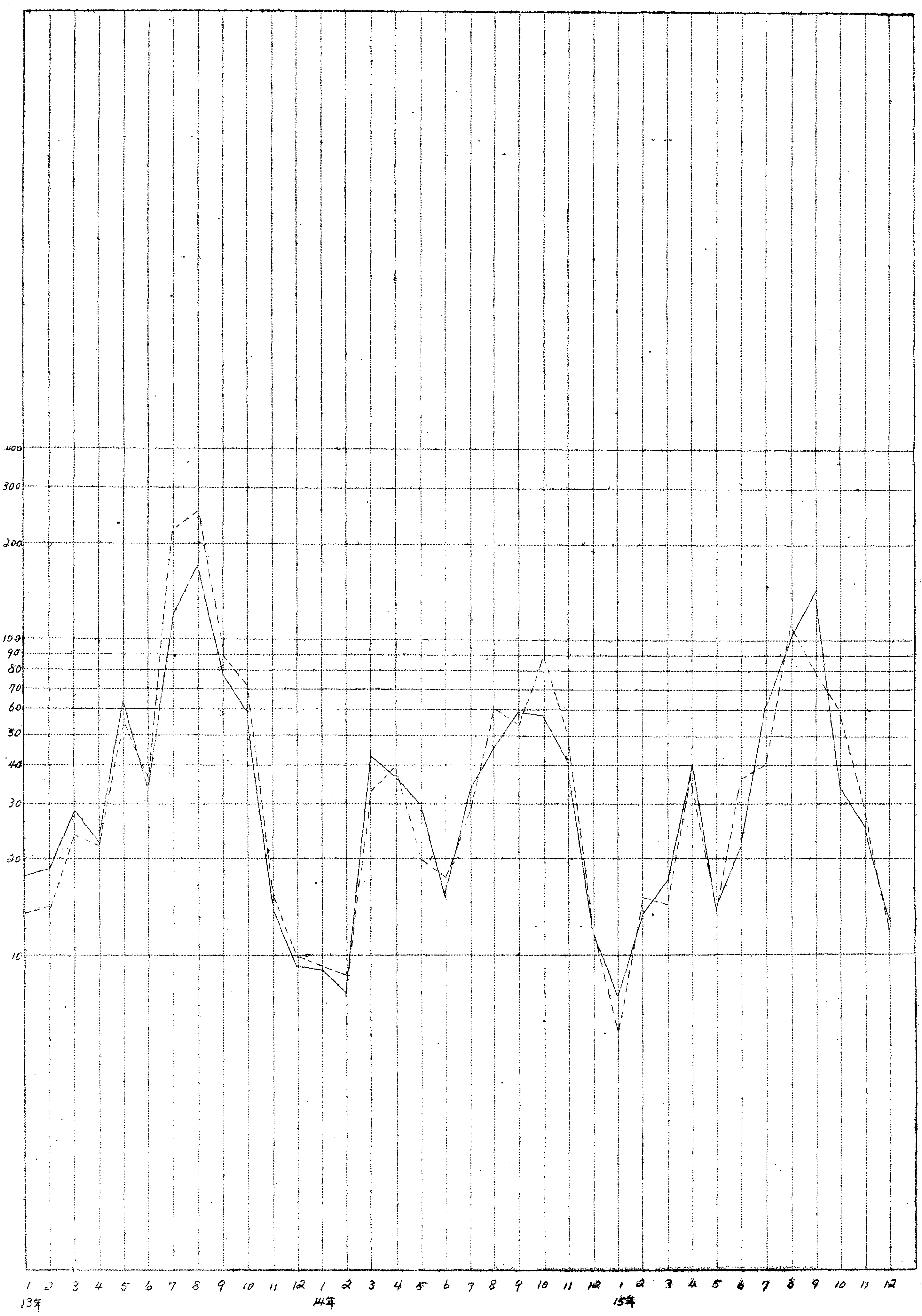


実測流量
推定流量
1000
600
500
400
100
90
80
70
60
50
40
30
20
10
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12
7年
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12
8年
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12
9年

第10図 b

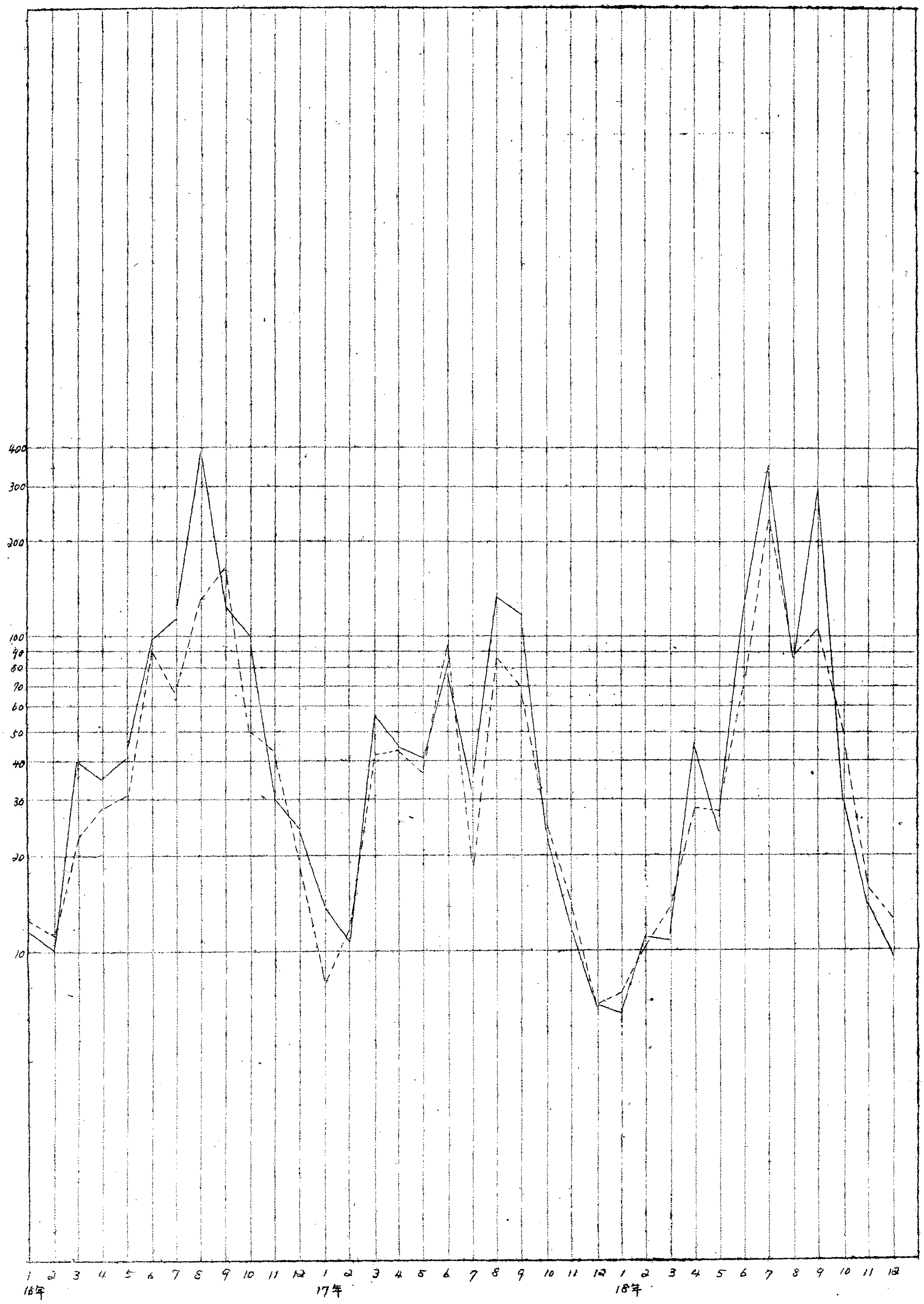

1000
900
800
700
600
500
400
300
200
100
90
80
70
60
50
40
30
20
10
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12
10年
11年
12年

第10図 C

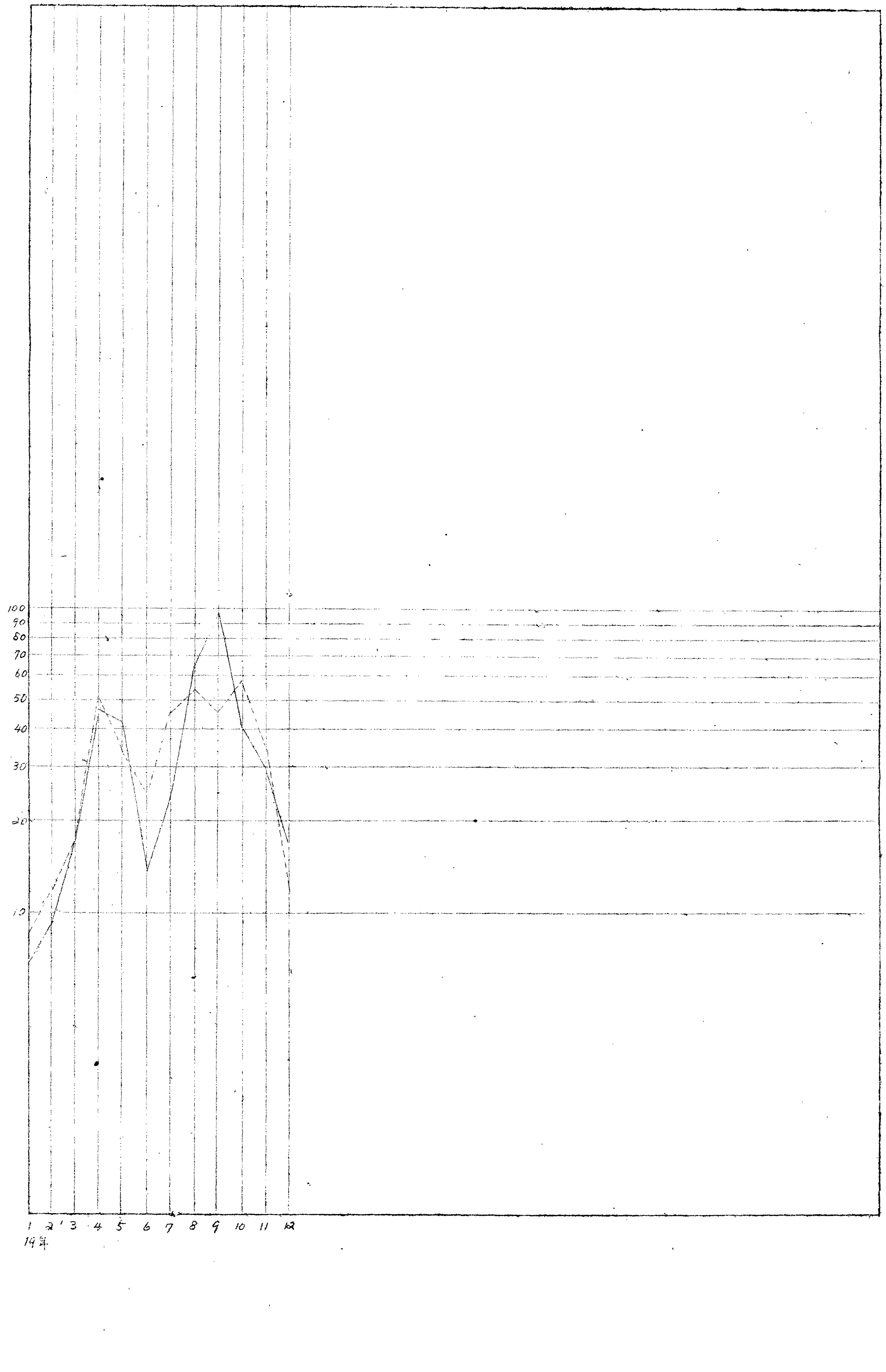


400
300
200
100
90
80
70
60
50
40
30
20
10
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12
13年
14年
15年

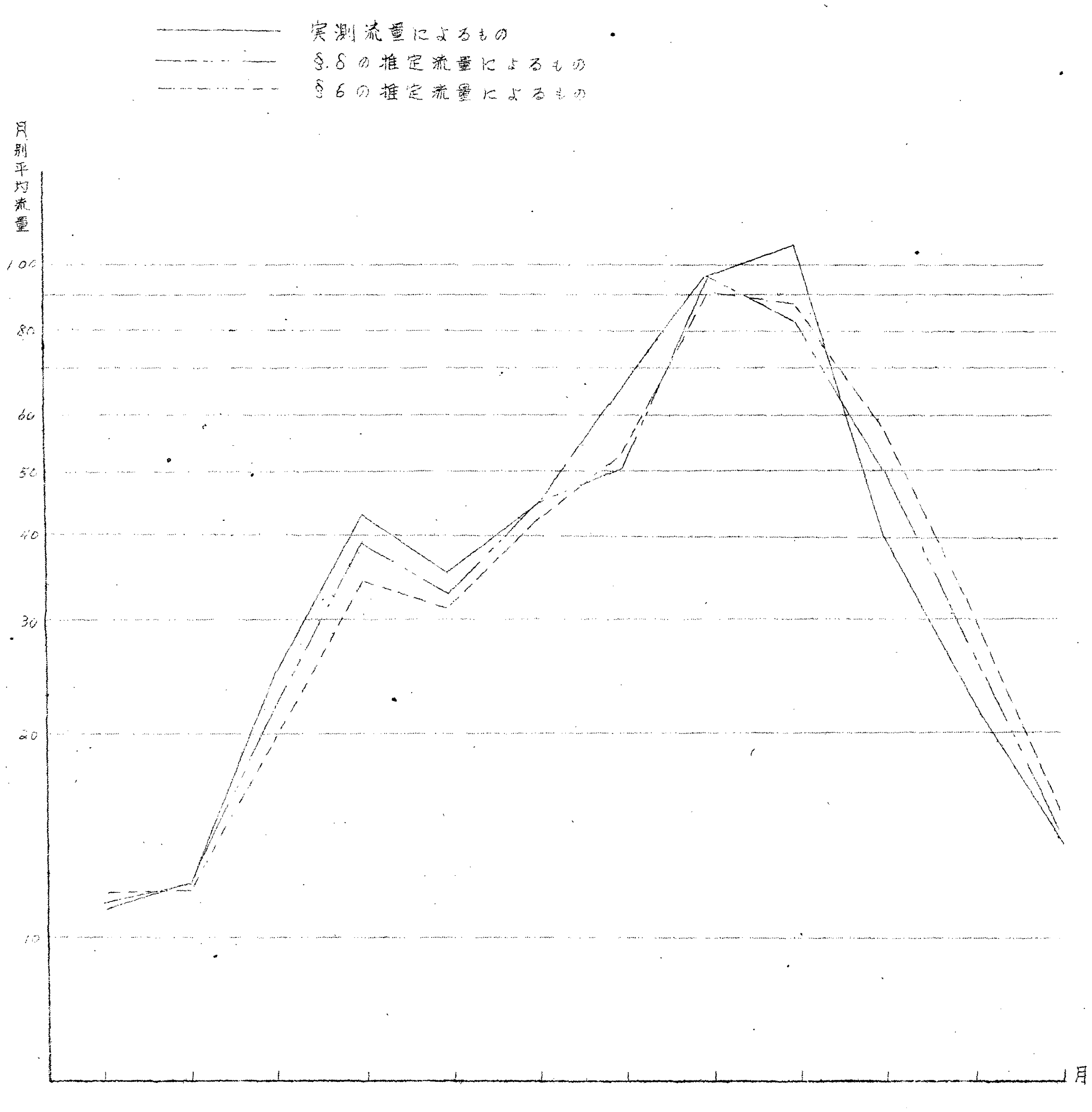
第10図　d


400
300
200
100
90
80
70
60
50
40
30
20
10
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12
16年
17年
18年

第 [illegible] 図 C



第十一図　　月別流量　13年間平均



第十一図は昭和7年より19年まで13年間の1月流量，2月流量，……等を幾何平均したもので，それを実測流量と，§6の方法による推定流量（$r = 0.35$ に対する）と，最後に本節で得られた方法による推定流量とについて計算してグラフに描いてある。　これにより，本節の方法が§6の方法より優れていることがよくわかる。

第七表は，本節で得られた方法により，明治38年からの雨量記録を用いて流量を推定したものである。　これにより那賀川の流量特性を更にくわしく知ることができる。

§9.　得られた流量推定式の意味

我々が§8で得た流量推定式は結局次のものである。

まず第五表（第八図）の函数 $r(Z)$（これを涵養率函数と呼ぶことにする）により，次式を用いて涵養された水の量 Z_n を求める。

$$Z_n = x_n + r(Z_{n-1})Z_{n-1}$$

この Z_n から，次の式により流量 y_n が求められる。

$$\log(y_n - 3) = 1.6170 \log Z_n - 2.5398.$$

この推定式について流出率函数 kZ^{A-1} を 0.2065 で割ったものを計算した結果が第八表，第十二図である。

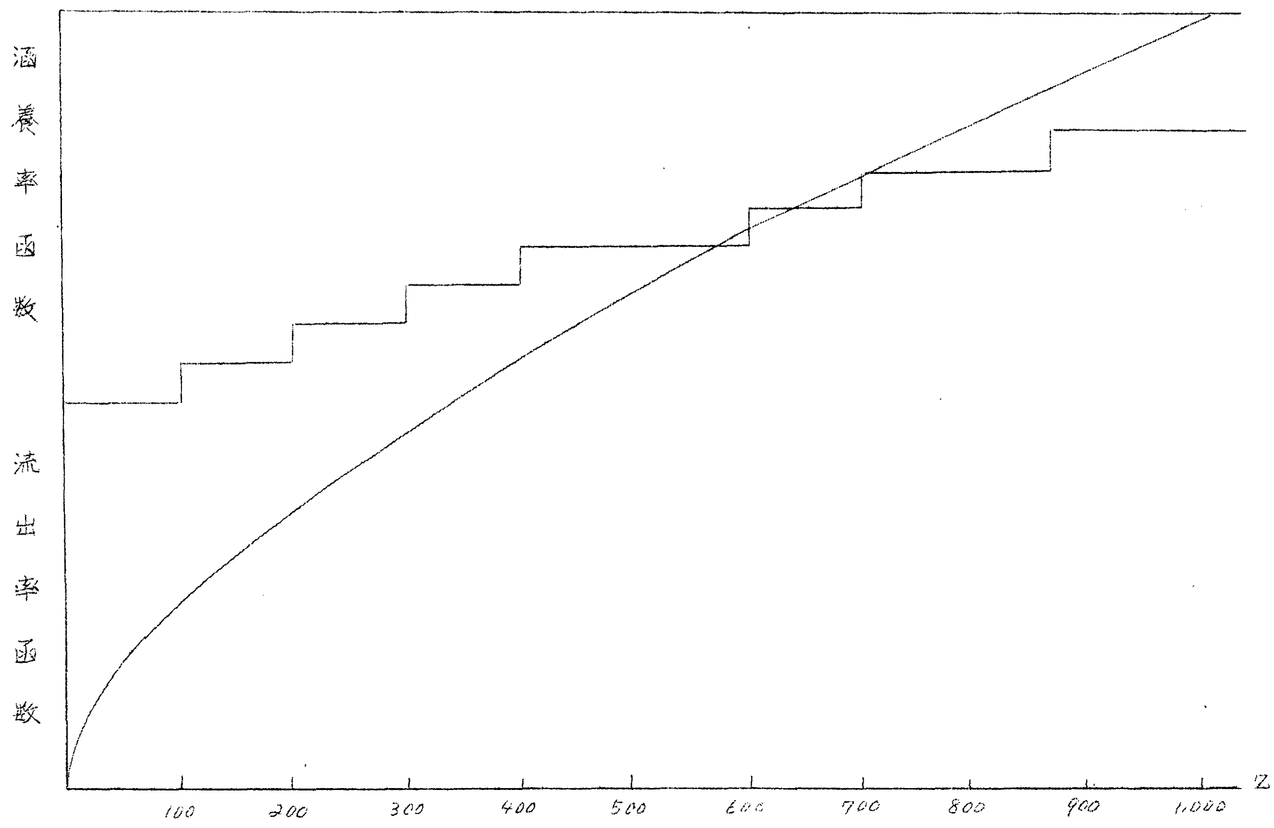
第　八　表

Z	100	200	300	400	500	600	700	800	900	1,000
$\frac{kZ^{A-1}}{0.2065}$	0.239	0.367	0.472	0.563	0.646	0.723	0.796	0.864	0.929	0.991

第七表　推定流量

	1月	2月	3月	4月	5月	6月	7月	8月	9月	10月	11月	12月
明治38年	17.5	16.6	39.0	30.5	28.5	198.0	135.0	188.0	61.0	46.0	19.0	23.7
39	18.2	22.2	17.5	24.0	50.0	77.0	228.0	29.0	39.0	79.0	30.0	20.0
40	18.8	9.0	28.5	83.0	83.0	75.0	149.0	84.0	161.0	50.0	53.5	11.2
41	7.6	9.6	22.3	45.2	40.5	49.0	39.5	177.0	43.5	34.0	15.0	26.0
42	22.8	15.0	34.0	47.5	43.0	75.0	59.0	103.0	113.0	24.8	46.0	16.5
43	19.7	11.6	13.0	23.8	69.0	57.5	38.0	48.0	48.0	59.8	31.0	10.0
44	20.2	9.7	20.3	35.5	28.5	101.0	92.0	92.0	92.0	33.7	33.0	21.0
45	12.4	47.0	43.5	53.0	36.8	34.5	69.0	203.0	203.0	95.0	21.0	18.0
大正2年	26.2	14.5	10.5	45.5	39.0	51.0	20.6	13.3	13.3	67.0	38.0	27.0
3	14.0	15.2	44.5	37.0	84.0	84.0	56.5	87.0	87.0	47.0	32.5	14.2
4	23.0	33.6	15.6	78.0	63.0	65.0	20.0	118.0	135.0	133.0	39.0	13.3
5	10.2	27.0	21.0	30.0	37.0	77.0	59.0	145.0	113.0	86.0	62.0	17.0
6	12.6	11.0	33.5	36.5	22.6	45.0	40.5	105.0	123.0	123.0	17.6	7.6
7	4.7	6.3	35.0	37.5	44.0	33.0	111.0	283.0	158.0	105.0	44.5	25.0
8	20.3	18.8	21.6	22.8	16.0	50.5	104.0	76.0	140.0	24.0	41.0	17.0
9	15.6	27.2	65.0	28.5	70.0	69.0	111.0	423.0	73.0	27.0	16.2	57.0
10	19.3	16.0	19.3	90.0	43.3	113.0	103.0	88.0	93.0	20.5	9.8	10.8
11	9.6	55.0	30.5	76.0	33.0	28.0	190.0	34.8	56.0	68.0	32.5	9.2
12	8.6	11.4	19.2	32.0	69.4	89.0	113.0	97.0	120.0	60.0	21.5	18.9
13	7.2	11.4	10.5	47.5	63.0	39.0	33.0	68.0	73.0	70.0	20.4	10.4
14	7.0	7.0	12.3	19.0	28.5	42.5	53.2	116.0	177.0	23.4	16.3	16.5
15	9.8	10.4	14.7	16.4	69.5	47.5	47.0	17.6	28.2	20.9	12.6	13.0
昭和2	12.0	7.4	16.0	28.5	30.0	23.0	14.4	39.0	76.0	24.2	14.6	9.6
3	13.5	11.0	17.6	24.5	33.5	76.0	68.0	142.0	83.0	36.9	13.8	10.4
4	5.5	7.7	8.2	17.8	31.0	44.5	45.5	71.0	71.0	70.0	36.9	23.0
5	12.0	13.2	26.0	38.5	29.0	14.6	26.0	57.0	25.0	23.2	16.0	9.6
6	15.3	16.0	20.6	27.0	43.6	75.0	73.0	68.0	100.0	101.0	24.0	22.0

第十二図



元来，流出した残りが涵養される（蒸散，浸透を無視して）のであるから，第八表の流出率函数と，第五表の涵養率函数とを加えれば1になる筈であるのに，明らかにZの大きな所では1より大となつている。　これは矛盾であると考えられる。

我々はさきに第五表の $r(Z)$ を定めたとき $r=0.25$ としたときの流出率函数を1から引いた残りによつて定めたので，その $r(Z)$ をもとにして，第八表の流出率函数が求められたのである。　従つてこの第八表の流出率函数から，新たに涵養率函数 $r(Z)$ を求め，これで更にZを求め，Zとyの関係を求めるというように，逐次近似をしたらばよかろうとも考えられる。　しかるに，この企では成功しないことが直ちにわかる。　第八表によれば，1から流出率函数を引いたものは，Z＝500で約0.35，Z＝700で約0.2　Z＝900で0.07，Z＝1,000で0.01となる。　これによると，Z＝500ならば約180，Z＝700ならば約140，Z＝900ならば約60，Z＝1,000で約10が貯蓄で翌月へ繰り越されることになる。　即ち収入が多い程支出が増えて，貯金は反つて減少するのである。　これは実際問題として少し工合が悪いようである。

そこでまたもとに戻つて第五表の $r(Z)$ について考えてみよう。　第五表の $r(Z)$ は階段状になつているが，所々の値を試みにとつてみると，Z＝500で $r=0.3$，Z＝600で $r=0.25$，Z＝800で $r=0.2$，Z＝1,000で $r=0.15$ であつてZに r をかけるとほとんど150という一定の値が出て来る。　即ちZ＝500以上の所で涵養率函数は $r=\dfrac{150}{Z}$ なる双曲線に近くなつているのである。（第八図）　これは言葉を変えていえば涵養された水の量は150mm程度の所で飽和状態に達し，それ以上雨が降つても全部流出してしまうということである。　第五表の函数は偶然にもそういう性質を備えたものであつた。そこで涵養された水の量の飽和点を130mmにしたり，170mmにしたりして，前と同様の計算を行い，相関係数を最大にするような

点を求めて見たい気がする。　しかし既にも述べた通り，相関係数が既に0.9524にまで上つていることを考えると，これ以上の計算をすることに果して意味があるかどうか疑問になるのである。　そこで一応この計算はここで打切ることにする。

第五表の $r(Z)$ を信頼することになると，第八表の流出率函数と $r(Z)$ との和が Z の大きい所で1より大になることが問題になる。　これは次のように考えるべきであろう。　大雨が降るときには，山の中腹では平地より遙かに多量の雨が降るため，川沿いの観測地点の雨量に流域面積を掛けたものより，更に多くの雨が実際降つているのである。　即ち我々が流出率函数と呼ぶことにした $kZ^{A-1}\times\frac{1}{0.2065}$ は，単に流出率だけでなく，大雨の時には何%の割り増しを考えるべきかという，割り増し率まで織り込まれた函数になつているのである。

最後に残つた問題は応用上は仲々大切な問題で，我々が流量推定に用いたのは，三ヶ所乃至四か所の雨量幾何平均であつたが，500平方粁の流域に三ヶ所の雨量観測点であるのは，かなり密度が大きい方であつて，我国全般で考えると観測点の密度はさらに小さい。　そこで一か所の雨量観測記録から，どの程度まで流量が推定できるか，実際に計算を行つた。

計算式は§8の方法，即ち第五表の $r(Z)$ から Z を求め

$$\log(y-3)=A\log Z+B$$

の推定式で y を推定するものである。　計算の結果は次の通りである。

第　九　表

雨量観測地	相関係数	A	B
朴　野	0.9211	1.5050	−2.2975
坂　州	0.9492	1.5130	−2.2630
出　原	0.9232	1.5150	−2.2901

坂州の雨量による推定は，特に甚だ良好で，これならばこの一地点だけの雨量により相当よい推定が期待出来る。

以上は観測地点の数を減らす問題であるが，これと似たことで観測年数を減らしたらば推定式の結果はどうなるかという問題が生ずる。　これを計算した結果が第十表である。

第　十　表

年　度		A	B	相関係数	年 度	A	B
昭和7年〜11年	(5年間)	1.6471	-2.6426	0.9263	昭和10年	1.4962	-2.2251
昭和12年〜15年	(4年間)	1.4263	-2.0749	0.9554	昭和13年	1.2937	-1.7523
昭和16年〜19年	(4年間)	1.7615	-2.5530	0.9366	昭和17年	1.5792	-2.3672

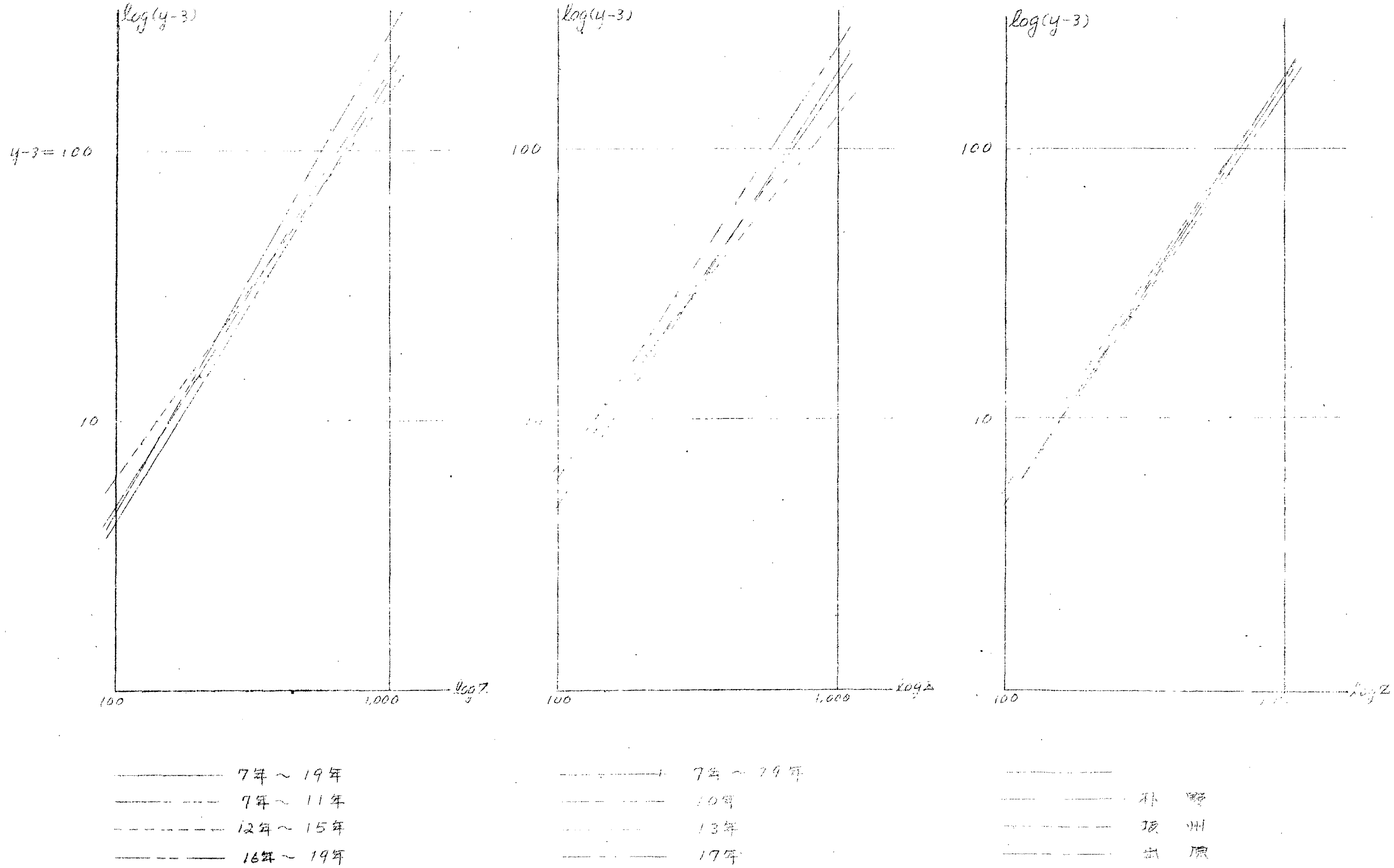
第十表では1年間の資料から計算したものについては，相関係数を計算しても無意味であるから省略した。　第九表，第十表を見るとA，Bの値がかなり異つて出て来るが，第十三図を見ればわかるように，Zが最も頻繁に値をとる300附近では，いずれも似た直線になつている。　第十表からわかるように一年間の資料では不足であるが，5年間程の資料があれば，かなり信頼のできる推定式を求めることができるであろう。

§10. むすび

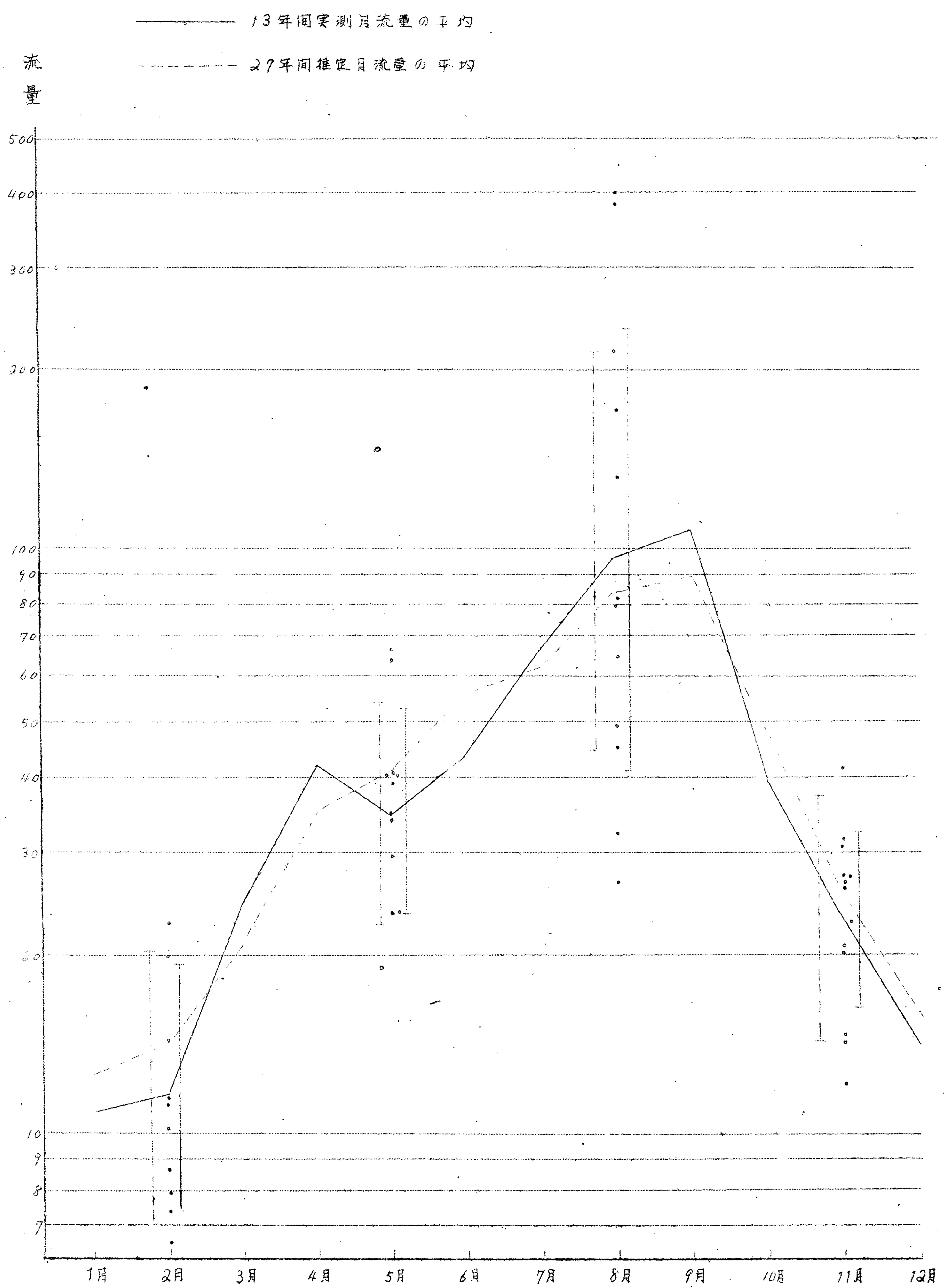
以上により我々は那賀川の流量を相当の精度で雨量から推定することに成功した。

第十一表は昭和7年〜19年の実測流量，および明治38年〜昭和6年の推定流量につき，月流量の対数をとり，前者は13年間，後者は27年間についての月別の平均値，および標準偏差を計算したものである。

第十三図 logZよりlog(y-3)を求める回帰直線



第十四圖


13年間実測月流量の平均
27年間推定月流量の平均
流量
500
400
300
200
100
90
80
70
60
50
40
30
20
10
9
8
7
1月
2月
3月
4月
5月
6月
7月
8月
9月
10月
11月
12月

第十一表

		1月	2月	3月	4月	5月	6月
平均	実測	2.41	2.48	3.22	3.71	3.57	3.78
	推定	2.56	2.68	3.07	3.58	3.73	4.03
標準偏差	実測	0.38	0.49	0.55	0.27	0.40	0.72
	推定	0.45	0.55	0.49	0.45	0.41	0.52
		7月	8月	9月	10月	11月	12月
平均	実測	4.19	4.56	4.65	3.69	3.13	2.64
	推定	4.13	4.43	4.49	3.89	3.23	2.77
標準偏差	実測	0.76	0.83	0.71	0.48	0.[illegible]4	0.36
	推定	0.68	0.77	0.57	0.58	0.43	0.44

第十四図は月別平均流量の幾何平均を図示したもので，13年間の実測による曲線と，27年間の推定による曲線とが相当よく一致していることは，我々の推定方式が13年間の資料に合うように作られただけの便宜的な式でないことを示すものと考えてよかろう。　13個の標本からでは信頼度の低い標準偏差の値も27年間の資料をつけ加えることにより，遥かに信頼度を増す。

第十一表の標準偏差の値を見ると，27年間の推定流量を用いて計算したものが，季節的に安定しているが，これも我々の推定方式にある信頼感を与える。　第十四図に示されたものは，月別平均流量の他に，2月，5月，8月，11月の13年間の実測月平均流量が点で示され，また標準偏差の大さが縦線で示されている。　実線は13年間実測資料により計算したもの，破線は27年間推定流量より計算したものである。

那賀川の流量推定方式は，紀伊半島，四国南部，九州南部等の河川に適用して，効果があるものと思うので，いずれ確めて見た

いと考えている。

一方，雪の降る地方の河川についても，雪融けを考慮に入れて，推定方式を考えるつもりでいる。