① 統実験的研究に於ける有効な計画 ………………………… 橋爪

もしも，有意因子の存在と，その効果について何も知る事が出来ないならばそれらの未知の因子を適当な乱化法による実験で消去する事が最善である。

しかしながら，もし有意因子についてある知識があるならば，それに応じた系統的並べ方又は一部分を系統的他を乱化法をした方が，更に有効な検定が得られる。

層別標本論に於て我々は或る知識があるときは層別した方が，しない方より有利である事を知つてゐるのと同じであらう。

25 乱塊法

$v_1, v_2, \cdots \cdots, v_m$ を m ケのことなつた農産物変量とする。　我々は今虚無假説として，それらの農産物の各々の平均が皆同じであると云ふ虚無假説を検定する問題を考へる。

実験用耕作地を r けのブロックに分割し更にその各々を m ケのプロットに更分割して居く。

さて P_{jk} を j 番目のブロックの k 番目のプロットを表はすものと記号づけておく（$j=1, \cdots r$; $k=1, \cdots, m$）。

さて各変量が各ブロックに於て各プロットに一つそして唯一つだけあらはれる様変種を定める。　x_{ijk} を j ブロック，k プロットの i 番目の変種の産物とする。

各変量は各ブロックに正確に一回あらはれるから，添数 k は添数 i と j の一價函数である。

我々は産物の平均値について変種、ブロック、プロットの効果が加法的であると假定する。　即ち

$$(77) \quad x_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \gamma_k + \varepsilon_{ijk}$$

こゝで数量 μ, α_i, β_j γ_k は常数で変量 ε_{ijk} は平均値が 0 で標準偏差が皆 σ^2 に等しく正規分布に，しかも統計的に独立に分布してゐると假定する。　我々は一般性を失はずに

$$(78)\quad \sum_{i=1}^{m} \alpha_i = \sum_{j=1}^{r} \beta_j = \sum_{k=1}^{m} \gamma_k = 0$$

と假定しても差支へない。なんとなれば

$$\mu' = \mu + \alpha + \beta + \gamma$$

$$\alpha_i' = \alpha_i - \alpha,\quad \beta_j' = \beta_j - \beta,\quad \gamma_k' = \gamma_k - \gamma$$

$$\alpha = \left(\sum_{i=1}^{m} \alpha_i\right)/m,\quad \beta = \left(\sum_{j=1}^{r} \beta_j\right)/r \quad \gamma = \left(\sum_{k=1}^{m} \gamma_k\right)/m$$

とおけば

$$\mu + \alpha_i + \beta_j + \gamma_k = \mu' + \alpha_i' + \beta_j' + \gamma_k'$$

であるからである。

数量 γ_k は同じブロック内に於てもプロットからプロットへの土壌の肥沃度の変動に影響されるから，前に述べた様に各ブロックの m ケのプロットに系統的方法で変種をきめてしまうならば，かゝる検定方法は偏倚をもたらすであらう。それは m ケの変種が作物に影響する効果が同じブロック内のプロットの土壌肥沃度による変異をもともなうからである。

かゝる偏倚をなくすために m ケの変種を m ケのプロットに無作為にきめるべきであらう。

これは例えば次の様にすればよい。数字 $1, 2, \cdots\cdots, m$ が記されてある m 枚のカードをとりだし，よくきつた後カードを一列にならべておく。これは m ケの整数 $1, 2, \cdots\cdots, m$ の順列に等しい。この順列を $i_1, i_2, \cdots\cdots, i_m$ とする。

そして v_{i_1} を最初のブロックの最初のプロット，v_{i_2} を最初のブロックの二番目のプロット，$\cdots\cdots$，v_{i_m} を最初のブロックの m 番目のプロットに対応づける。

カードを再びきりなほし又新しい順列を作る。　そして m ケの変種に従つて二番目のブロックの m ケのプロットへ同じようにしてきめる。　かゝる方法を3番目4番目，—— r 番目のブロックに繰り返し行ふ。

さてこのやうにしてから，k は i と j の一価函数であるから x_{ijk} の代りに x_{ij} と書いてよい。

そしてもしも我々は上に述べた無作爲な方法でプロットに変種を対応さすならば（87）と（78）から

$$(79)\qquad x_{ij} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \eta_{ij} + \varepsilon_{ij}$$

となる。　こゝで ε_{ij} は平均0標準偏差が等しく σ^2 なる正規に独立に分布する。　そして変数 η_{ij} は矩形分布に従ふ。

即ち η_{ij} は $\gamma_1, \gamma_2, \cdots\cdots, \gamma_m$ の価を皆確率 $\frac{1}{m}$ でとる。

η_{ij} は（確率論的意味で）ε_{ij} と独立である事は明らかである。　更に又 η_{ij_1} と $\eta_{i_2j_2}$ はもし $j_1 \neq j_2$ ならば独立である。

しかし $\eta_{1j}\ \eta_{2j}, \cdots\ \eta_{mj}$ は独立でない。

そして次式がなりたつ。

$$(80)\qquad E(\eta_{ij}) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{m}\gamma_k = 0$$

$$(81)\qquad \sigma^2(\eta_{ij}) = \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m}\gamma_k^2 \equiv d^2$$

$$(82)\qquad E(\eta_{ij}\ \eta_{i_2j}) = \frac{1}{m(m-1)}\sum_{k \neq k'}\sum \gamma_k\gamma_{k'} \equiv c$$

（79），（80），（81），（82）から

$$(83)\qquad E(x_{ij}) = \mu + \alpha_i + \beta_j$$

$$(84)\qquad \sigma^2(x_{ij}) = \sigma^2 + d^2$$

$$
(85)\quad \begin{cases} \sigma(x_{i_1 j}\ x_{i_2 j}) = c & (i_1 \neq i_2 \text{ に対して}) \\ \sigma(x_{i_1 j_1}\ x_{i_2 j_2}) = 0 & (j_1 \neq j_2 \text{ に対して}) \end{cases}
$$

26. 作物の平均高についての変種の効果の検定

我々は作物の平均値に変種の効果がないと云ふ假説，即ち $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots\cdots = \alpha_m = 0$，を検定する事を考へる。

もしも x_{ij} が独立に正規に同じ標準偏差をもつて分布してゐるならば，変量分析法に関する假定がみたされる。

そして，普通の変量分析法の手段を用ひれば良い。変量分析論によれば我々が問題にしてゐる假説は次の統計量F

$$
(86)\quad F = \frac{(r-1)(m-1)}{m-1} \quad \frac{r \sum (x_{i\cdot} - x)^2}{\sum_j \sum_i (x_{ij} - x_{i\cdot} - x_{\cdot j} + x)^2}
$$

を用いて検定される。

こゝで

$$
x_{i\cdot} = \left(\sum_{j=1}^{r} x_{ij}\right)\Big/ r, \qquad x_{\cdot j} = \left(\sum_{i=1}^{m} x_{ij}\right)\Big/ m
$$

$$
x = \left(\sum_j \sum_i x_{ij}\right)\Big/ mr
$$

である。

もしも検定されるべき假説が眞であるならば，そしてもしも上に述べた変量分析法の假定が満足されるならば，統計量 (86) は自由度 $m-1$ と $(r-1)(m-1)$ の F－分布に従ふ。

棄却域として或る適当な棄却点 F_0 より大きな区間を用ひ，F が F_0 より大きいならば假説を棄却する。

もしも $\gamma_k = 0 \quad (k = 1, \cdots, m)$ ならば，変量分析法に於けるすべての假定は満足され統計量 (86) は F－分布になる。

しかしながらもし x_{ijk} が独立でなく，そして正規に分布していないとするならば統計量 F ははたして F－分布してゐるかどうかについて問題が起きてくる。

我々は之に対して答を示さう。

もしも確率変数 X_{ij} が（84）と（85）で與へられた標準偏差と共分散をもつ多変数正規分布に從ふと假定するならば，この問は肯定される。

多くの場合に於て X_{ij} の同時分布は正確には正規分布してゐなくても，η_{ij} の分散は δ_{ij} の分散に較べて小さい事が屢々であるから，そうとうな近似度をもって正規であると見做され得るであらう。

27. X_{ij} の同時分布が正規であるとゆう假定のもとに於ける F の分布

$\|\lambda_{ij}\|$　$(i, j = 1, \cdots\cdots, m)$　を

$$\lambda_{m1} = \lambda_{m2} = \cdots\cdots = \lambda_{mm} = 1/\sqrt{m}$$

なる直交行列とする。

$$(87)\qquad X^*_{ij} = \sum_{e=1}^{m} \lambda_{ie} X_{ej} \qquad (i = 1, \cdots, m\ ;\ j = 1, \cdots, r)$$

とおく

$$\lambda_{m1} = \lambda_{m2} = \cdots\cdots = \lambda_{mm} = 1/\sqrt{m}$$

で $\|\lambda_{ij}\|$ は直交行列であるから

$$(88)\quad \begin{cases} \lambda_{i1} + \cdots\cdots + \lambda_{im} = 0 & (i = 1, 2, \cdots, m-1) \\ \lambda^2_{i1} + \cdots\cdots + \lambda^2_{im} = 1 & (i = 1, \cdots\cdots m) \\ \lambda_{i1}\lambda_{i'1} + \cdots\cdots + \lambda_{im}\lambda_{i'm} = 0 & (i \neq i',\ i, i' = 1, \cdots, m) \end{cases}$$

（88）から

$$
(89)\begin{cases}
\displaystyle\sum_{e\neq e'} \lambda_{ie}\lambda_{ie'} = \Big(\sum_{e}\lambda_{ie}\Big)^2 - \sum_{e}\lambda_{ie}^2 = -1 \\
\qquad\qquad\qquad (i=1,\cdots\cdots,m-1) \\
\displaystyle\sum_{e\neq e'} \lambda_{ie}\lambda_{i'e'} = \Big(\sum_{e}\lambda_{ie}\Big)\Big(\sum_{e'}\lambda_{i'e'}\Big) - \sum_{e}\lambda_{ie}\lambda_{ie'} = 0 \\
\qquad\qquad\qquad \text{for } (i\neq i') \\
\qquad\qquad\qquad (i,\ i'=1,\cdots\cdots,m)
\end{cases}
$$

(84), (85), (87), (89) から

$$
\begin{cases}
\sigma^2(x^*_{ij}) \doteqdot \sigma^2 + d^2 - c \quad (i=1,\cdots,m-1\ ;\ j=1,\cdots,r) \\
\sigma(x^*_{i_1 j},\ x^*_{i_2 j_2}) = 0 \quad \text{for } i_1 \neq i_2\ (i_1, i_2 = 1,\cdots,m-1)
\end{cases}
$$

かくて x^*_{ij} $(i=1,\cdots\cdots,m-1\ ;\ j=1,\cdots\cdots,r)$ は同じ分散をもち，独立に正規に分布する。

行列 $\|\lambda_{ij}\|$ の直交性から明らかに

$$(x^*_{1.})^2 + \cdots\cdots + (x^*_{m.}) = (x_{1.})^2 + \cdots\cdots + (x_{m.})^2$$

故に

$$(91)\quad (x^*_{1.})^2 + \cdots\cdots + (x^*_{m-1.})^2 = (x_{1.})^2 + \cdots + (x_{m.})^2 - (x^*_{m.})^2$$

$$= (x_{1.})^2 + \cdots\cdots + (x_{m.})^2 - m x^2 = \sum_{i=1}^{m}(x_{i.} - x)^2$$

さて次の良く知られた等式を用ひる。

$$(92)\quad \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{r} x_{ij}^2 = m r x^2 + r\sum_{i=1}^{m}(x_{i.} - x)^2$$

$$+\ m\sum_{i=1}^{r}(x_{.j} - x)^2 + \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{r}(x_{ij} - x_{i.} - x_{.j} + x)^2$$

又

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{r} x^{*2}_{ij} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{r} x_{ij}^2\ ,\quad m r x^2 + m\sum_{j=1}^{r}(x_{.j} - x)^2 = m\sum_{j=1}^{r} x_{.j}^2 = \sum_{j=1}^{r}(x^*_{ij})^2$$

であるから，(91) と (92) から

$$(93)\quad \sum_{i=1}^{m-1}\sum_{j=1}^{r}(x^*_{ij})^2 = r\sum_{i=1}^{m-1}(x^*_{i})^2 \Sigma\Sigma(x_{ij}-x_{i.}-x_{.j}+x)^2$$

よって

$$(94)\quad \sum_{i=1}^{m-1}\sum_{j=1}^{r}(x^*_{ij}-x^*_{i.})^2 = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{r}(x'_{ij}-x_{i.}-x_{.j}+x)^2$$

(86)，(91)，(94) から

(94)'

$$F = \frac{(r-1)(m-1)}{(m-1)}\ \frac{r\sum_{i=1}^{m-1}(x^*_{i})^2}{\sum_{i=1}^{m-1}\sum_{j}(x^*_{ij}-x^*_{i.})^2}$$

$$= \frac{(r-1)(m-1)}{(m-1)}\ \frac{r\sum_{i=1}^{m}(x_{i.}-x)^2}{\sum_{i=1}\sum_{j=1}(x_{ij}-x_{i.}-x_{.j}+x)^2}$$

x^*_{ij} ($i=1,\cdots,m-1$; $j=1,\cdots,r$) は同じ分散を持ち正規・独立に分布してゐるから，もし $E(x^*_{i})=E(x^*_{ij})=0$ ($i=1,\cdots,m-1$; $j=1,\cdots,r$) ならば，統計量 (94)' は F-分布に従ふ事が証明される。

(87) から

$$E\,x^*_{ij} = \sum_{e}\lambda_{ie}E\,x_{ej} = \sum_{e}\lambda_{ie}(\mu+\alpha_e+\beta_j)$$

$$= \sum_{e}\lambda_{ie}\alpha_e \quad (i=1,\cdots,m-1)$$

かくて，もし検定さるべき假説が眞であるならば，即ち，もしも $\alpha_i=0$ ($i=1,2,\cdots,m$) ならば

$$E\,x^*_{ij}=0 \quad (i=1,\cdots,m-1;\ j=1,\cdots,r)$$

である。

故に統計量 (94)'は F — 分布に従ふ。

28. 乱塊法についての精密検定論

(この章については E. Peason. Some aspect of the problem of randomization, Biometrika, June 1938 を参照せよ)

我々は前章と同じく m ケの異なつた変種, r ケのブロック, そして各ブロックは m ケのプロットを持つとする。

y_{ijk} を j ブロック, k プロットに i 変種 ($i=1,\cdots,m$; $j=1,\cdots,r$; $k=1,\cdots,m$) が施された作高とする。

各変種は各ブロックに正確に一回施される様に並べる。

さて我々はならべ方のあらゆる場合の数を計算する事が出来る。明らかに各ブロックに於て m ケのプロットに m ケの変種を任意の順序にならべる事が出来る。そしてその可能な数は $m!$ 通りある。それ故全体の可能なならべ方は $(m!)^r$ である。

これは又次の様に云い表はしても良い。mr プロットの上への変種のならべ方は j と k の函数 $i(j,k)$ によつてあらはされ得る。こゝで $i(j,k)$ は j ブロックの k プロットに定められた変種の番号とする。もちろん, 任意に與へられた j に対して $i(j,1)$, $i(j,2)$, $\cdots$ $i(j,m)$ は整数 $1,2,\cdots,m$ のある一つの順列に等しくなければならない。

かくして我々は $(m!)^r$ 組の函数 $i(j,k)$ が考えられる事を云ふ事が出来る。変種を各プロットに無作為な方法で決定したとするならば, $(m!)^r$ の可能な場合が皆等しい確率で起る。

かくて, $i(j,k)$ の価は無作為な方法によつていろいろとかはるから $i(j,k)$ は確率変数であると考へる事が出来る。

次に j ーブロックの k プロットに於ける作高があるきまつた a_{jk} ($j=1,\cdots,r$; $k=1,\cdots,m$) を持つやうな部分母集団を考へよう。

この部分母集団に於て，j ブロックに於ける i 変種による作高 y_{ij} はプロットへ変種を無作爲ならべ方をする事によって生じる確率変数である。

検定されるべき假説が眞であるとゆう前提，即ち変種は作高にいかなる効果も及ぼさず――――のもとでは

$$y_{ij} \quad (i=1,\cdots\cdots,m;\ j=1,\cdots\cdots,r)$$

の同時分布は次の様に與へられるであらう。

r ケの組，$(y_{11},\cdots\cdots y_{m1}),\cdots\cdots(y_{1r}\cdots\cdots y_{mr})$ は互に独立で，又整数 $1,\cdots\cdots,m$ の任意の順列 $K_1,\cdots\cdots,K_m$ に対し $(y_{1j}\cdots\cdots y_{mj})=(a_{jk_1},\cdots\cdots,a_{jk_m})$ なる確率は $1/m!$ に等しい。この部分母集団に於て統計量

$$(95)\quad F=\frac{(r-1)(m-1)}{(m-1)}\ \frac{r\sum_{i=1}^{m}(y_{i\cdot}-y)^2}{\sum_j\sum_i(y_{ij}-y_{i\cdot}-y_{\cdot j}+y)^2}$$

$$\left[\ y_{i\cdot}=\left(\sum_j y_{ij}\right)/m\ ;\ y_{\cdot j}=\left(\sum_i y_{ij}\right)/m\ ;\ y=\left(\sum_{ij} y_{ij}\right)/mr\right]$$

の正密分布は次の様にして得られる。

$(y_{1j},\cdots\cdots y_{mj})$ に $(a_{j1}\cdots\cdots a_{jm})$ の順列のすべての場合をつくして代入して得られる F の $(m!)^r$ の価を計算する。

しからば統計量 F は $(m!)^r$ の異った価を等しい確率でとる事になる。

かくして，かゝる考慮のもとに假説の精密検定は次の様にして実行し得る。j ブロックの k プロットに於て実際に観測した作高を a_{jk} とおく。しからばプロットへの変種の可能な限りの並べ方に対応して統計量 F の価が対応する。

もし，検定されるべき假説が眞であるならば，それらの F の価は等しい確率を持つ。

このF－統計量の適当な棄却領域をきめる。 そして標本から得られるFの統計量値がこの棄却領域に落ちるならば，假説を棄却する。

$1',\cdots\cdots,m'$を整数 $1,\cdots\cdots,m$の或る順列とする。

$i(j,k)$，$i^*(j,k)$を夫々 $i^*(j,k)=[i(j,k)]'$なるjとkの函数とする。

しからば，$i(j,k)$によつてきめられる處種の並べ方に対応するFの価は$i^*(j,k)$によつてきめられた並び方に対応するFの値に等しい。 よつて，例へば$i(1,1),\cdots\cdots,i(1,m)$を固定して，残りをいろいろ変へる並べ方 ―― 即ち$(m!)^{n-1}$通り ―― に問題を制限してしまつて差支へない。

Welch.（Biometrika 29. p.p. 21－52） Pitman（Biometrika Feb. 1938）は，もし検定さるべき假説が眞であるならば，この今述べたFの分布は，正規理論からよほど違つていると云ふ事はないであらうとゆう事を示してゐる。

我々はこの問題に関して次章で議論しよう。

29. §28で定義された部分母集団に於ける統計量Fの近似分布

先づ我々はy_{ij}の期望値$E(y_{ij})$，分散$\sigma^2(y_{ij})$及びy_{ij}とy_{i_2j}（$i_1\neq i_2$）の共分散$\sigma(y_{i_1j}\,y_{i_2j})$の計算しよう。 y_{ij}は$a_{j1}\cdots\cdots a_{jm}$の任意の値を確率$1/m$でとるから

$$(96)\qquad E(y_{ij})=\frac{a_{j1}+\cdots\cdots+a_{jm}}{m}\equiv a_j$$

$$(97)\qquad \sigma^2(y_{ij})=\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m}(a_{jk}-a_j)^2=b_j$$

又明らかに

$$E(y_{i_1 j}\ y_{i_2 j}) = \frac{1}{m(m-1)}\left(\sum_{k_1 \neq k_2} a_{jk_1} a_{jk_2}\right)$$

であるから

$$(98)\quad \sigma(y_{i_1 j}\ y_{i_2 j}) = \frac{1}{m(m-1)} \sum_{k_1 \neq k_2} a_{jk_1} a_{jk_2} - a_j^2$$

$$= \frac{(\sum_k a_{jk})^2 - \sum_k a_{jk}^2}{m(m-1)} - a_j^2 = \frac{m^2 a_j^2 - \sum_k a_{jk}^2}{m(m-1)} - a_j^2$$

$$= \left(\frac{m}{m-1} - 1\right) a_j^2 - \frac{\sum_k a_{jk}^2}{m(m-1)}$$

$$= \frac{1}{m-1}\left[\, a_j^2 - (\textstyle\sum_k a_{jk}^2)/m \,\right]$$

$$= -\frac{1}{m-1}\,\sigma(y_{ij}) = -\frac{1}{m-1}\, b_j$$

(97) と (98) から

$$(99)\quad E(y_{i\cdot}) = \frac{1}{r}\sum_{j=1}^{r} a_j$$

$$(100)\quad \sigma^2(y_{i\cdot}) = \frac{1}{r^2}\sum_{j=1}^{r} \sigma^2(y_{ij}) = \frac{1}{r^2}\left(\sum_{j=1}^{r} b_j\right) \equiv b$$

$$(101)\quad \sigma(y_{i_1\cdot}\, y_{i_2\cdot}) = \frac{1}{r^2}\sum_j \sigma(y_{i_1 j}\ y_{i_2 j})$$

$$= \frac{-1}{r^2(m-1)}\left(\sum_{j=1}^{r} b_j\right) \equiv c$$

を得る。

$$y_{i\cdot}^{*} = \sum_{r=1}^{m} \lambda_{ir\cdot}\, y_{r\cdot}$$

とおく。ただし $\|\lambda_{ir}\|$ $(i, r = 1, \cdots\cdots, m)$ は直交行列で又 $\lambda_{m1} = \cdots\cdots = \lambda_{mm} = \dfrac{1}{\sqrt{m}}$ とす

しからば次式は容易に験證する事が出来る.

$$E(y_{i\cdot}^{*}) = 0 \qquad (i = 1, \cdots\cdots, m-1)$$

$$\sigma^2(y_{i\cdot}^{*}) = b - c \qquad (i = 1, \cdots\cdots, m-1)$$

$$\sigma(y_{i_1}^{*}\ y_{i_2}^{*}) = 0 \qquad (i_1 \neq i_2 \quad i_1, i_2 = 1, \cdots, m-1)$$

更に

$$(103) \qquad \sum_{i=1}^{m-1} y_{i\cdot}^{*\,2} \equiv \sum_i y_{i\cdot}^2 - m y^2 = \sum_{i=1}^{m} (y_{i\cdot} - y)^2$$

が成り立つ。もし $y_{1\cdot}, \cdots\cdots y_{m\cdot}$ が多変数正規分布に従ふならば, $y_1^{*} \cdots\cdots y_m^{*}$ も又多変数正規分布である。

この場合

$$(104) \qquad \frac{(y_{1\cdot}^{*})^2 + \cdots + (y_{m-1\cdot}^{*})^2}{b - c} = \frac{\sum_{i=1}^{m} (y_{i\cdot} - y)^2}{b - c}$$

は自由度 $m-1$ の χ^2 ― 分布に従ふ。

(99), (100), (101) から

$$b - c = \frac{1}{p^2}\left(1 + \frac{1}{m-1}\right)(\Sigma\, b_j) = \frac{1}{p^2}\,\frac{m}{m-1}\,\frac{\sum_j \sum_k (a_{jk} - a_j)^2}{m}$$

$$= \frac{\sum_j \sum_k (a_{jk} - a_j)^2}{p^2(m-1)}$$

を得る。さて $\sum_k (a_{jk} - a_j)^2$ は $a_{j1}, \cdots, a_{jm}$ について対稱な函数であるから

$$\sum_{k=1}^{m} (a_{jk} - a_j)^2 = \sum_{i=1}^{m} (y_{ij} - y_{\cdot j})^2$$

である。 かくて

$$(105)\quad b-c = \frac{1}{r^2(m-1)}\sum_i\sum_j (y_{ij}-y_{\cdot j})^2$$

となる。 よつて我々は次の結果を得る。

もしも $y_{1\cdot}, \cdots\cdots y_{m\cdot}$ が多変数正規分布に従ふならば

$$(106)\quad G = \frac{(m-1)r^2\sum_{i=1}^{m}(y_{i\cdot}-y)^2}{\sum_i\sum_j (y_{ij}-y_{\cdot j})^2}$$

は自由度 $m-1$ の χ^2 分布に従ふ。

さて $y_{i\cdot}$ は r ケの独立な確率変数の和であるから，固定した m に対して，$y_{1\cdot}, \cdots\cdots y_{m\cdot}$ の同時分布は $r\to\infty$ とした時 a_{jk} （$j=1, \cdots\cdots r$; $k=1, \cdots\cdots m$ ）についてごくゆるい條件をつければ正規分布に近似する。

かくて，r が十分大きいとき実用的に統計量 G は自由度 $m-1$ の χ^2－分布をなすと假定され得るであらう。

さて統計量 G と F との間の関係を研究しよう。

$$\sum\sum(y_{ij}-y_{i\cdot}-y_{\cdot j}+y)^2 = \sum\sum(y_{ij}-y_{\cdot j})^2 - r\sum_{i=1}^{m}(y_{i\cdot}-y)^2$$

であるから

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{(r-1)}\,\frac{\sum\sum(y_{ij}-y_{\cdot j})^2 - r(\sum y_{i\cdot}-y)^2}{r\sum(y_{i\cdot}-y)^2}$$

$$= \frac{1}{G}\,\frac{r^2(m-1)}{r(r-1)} - \frac{1}{r-1} = \frac{1}{G}\,\frac{r(m-1)}{(r-1)} - \frac{1}{r-1}$$

かくて，十分大きな r に対して

$$\frac{1}{F} \sim \frac{m-1}{G} \quad 又ハ \quad F \sim \frac{G}{m-1}$$

となる。

十分大きな r に対して $\frac{G}{m-1}$ の分布は，自由度 $(m-1)$，$(m-1)(r-1)$ の F 分布に殆んど等しいから，我々は十分大きい r に対して統計量 F は，F 分布に近似する。

Pitman は Biometrika p. 322. Feb. 1938 で統計量 G に比例してゐる次の統計量

$$(107) \qquad W = \frac{r\Sigma(y_{i\cdot} - y)^2}{\Sigma\Sigma(y_{ij} - y_{\cdot j})^2}$$

を考へてゐる。かくして W は F の単調函数であるから W を基にした検定は F を基にしたそれと同値である。

Pitman は最初に §28 で考へた部分母集団に於ける W の分布の4次のモーメント迄を計算した。

W の一次及び二次のモーメントは次の様に與へられる。

$$(108) \qquad E(W) = 1/r$$

$$(109) \qquad E[W - EW]^2 = \frac{2}{r(m-1)}\left[1 - \frac{\sum_{j=1}^{r} b_j^2}{\left(\sum_{j=1}^{r} b_j\right)^2}\right]$$

こゝで b_j は (97) で與へられたものである。（そこでは b_j の代りに $\frac{1}{r}\sum_{k=1}^{m} a_{jk}^2$ を用ひてゐる。しかし彼は $\sum_{k=1}^{m} a_{jk} = 0$ $(j = 1, \cdots, r)$ と假定してゐるから兩者は一致する。）

次に正規分布論で良く用ひられる B— 分布を考へる。

$$(110) \qquad B(u, v) = \frac{\Gamma(u+v)}{\Gamma(u)\Gamma(v)} W^{u-1}(1-W)^{r-1} dW$$

こゝで　$u=\frac{1}{2}(m-1)$，$v=\frac{1}{2}(r-1)(m-1)$　$(0\leqq W\leqq 1)$
とする。　上の分布の平均値と標準偏差は

$$\frac{1}{r} \text{ と } \quad \frac{2(r-1)}{r(rm-r+2)}=\frac{2(r-1)}{r[r(m-1)+2]}$$

である。

かくて，B 分布に対する W の期待値はいままで考へてゐた部分母集団より導いた分布に対する W のそれと全く一致する。（方程式（108）を見よ）。

B－分布の場合 W の分散は r が十分大きいとき

$\dfrac{2}{r^2(m-1)}$ に近似する。よってもしも $\dfrac{\Sigma b_j^2}{(\Sigma b_j)^2}\to 0$
（$r\to\infty$）なら（109）で與へられた分散は，この分散に近似する。

これは b_j（$j=1,\cdots\cdots,r$）が正の下界及び有限な上界をもつてゐるならば可能である。

$\varphi_j(t)$ を t について連続，単調増大な函数とする。

もしも，a_{jk} の代りに $a'_{jk}=\varphi_j(a_{jk})$，$y_{ij}$ の代りに $y'_{ij}=\varphi_j(y_{ij})$ とおき又 F にかゝるおきかえをしたものを F' とすれば F' の分布は a_{jk} の代りに a'_{jk} をおきかえた F のそれから得られる。　特に F' のモーメントは a_{jk} の代りに a'_{jk} をおいた F のモーメントから得られる。

もしも．$\varphi_j(t)=\lambda_j t$ なる変換によって $b'_1=\cdots\cdots=b'_r$ なる如く λ_j をきめる事が出来るならば $(\Sigma b'^2_j)/(\Sigma b'_j)^2$ は $r\to\infty$ としたとき急速に零に收斂する。

もし，$b'_1=\cdots\cdots=b'_r$ ならしめる様な λ_j（$j=1,\cdots r$）を決める計算技術が困難で，又最初の a_{jk} によって（109）で與へられる分散が，B－分布の W の分散と相当離れてゐるや

うた場合．Pitman は夫々（108），（109）で與へられる量に等しい平均，分散を持つ或る B－ 分布を用ふる事を勧告してゐる。

30. 一般的線型假說

我々は簡單に或る記号と，後に必要と思はれる変量分析法に於ける結果について述べよう。 先づ一般的線型假說の記号から初めよう。 確率変数の組（$y_1, \cdots\cdots, y_N$）を考へる。

こゝで次の事が先驗的に假定されてゐるものとする．

（i）． $y_1, \cdots\cdots, y_N$ は正規独立に分布してゐる。

（ii）． y_α の分散 $\sigma^2(y_\alpha)$ は，皆分散 σ^2 に等しい。

（iii） 次の等式が成り立つ

$$E(y_\alpha) = g_{1\alpha}\beta + \cdots\cdots + g_{p\alpha}\beta_p \quad (\alpha = 1, \cdots N)$$

こゝで $\| g_{i\alpha} \|$ （$i = 1, \cdots, p$; $\alpha = 1, \cdots, N$）は階数 p の行列で，$\beta_1, \cdots\cdots, \beta_p$ は未知の常数である。

條件（iii）は又別の方法で述べる事が出來る．（iii）に於ける方程式系は $\beta_1 \cdots\cdots, \beta_p$ の N ケの一次式系である事を注意せよ。 未知数 $\beta_1, \cdots\cdots, \beta_p$ を消去すれば，我々は y_α の期望値についての一次独立な一次関係式を得る。 かくて $E(y_\alpha) = \mu_\alpha$ とおけば，條件（iii）は $N－p$ 個の一次関係式

$$(\mathrm{IV}) \quad g_{i1}\mu_1 + \cdots\cdots\cdots + g_{iN}\mu_N = 0 \quad (i = 1, \cdots, N-p)$$

に同値である。

行列 $\| g_{i\alpha} \|$ は位数 $N-p$ の或る與へられた行列である。

線型假說とは，先驗的に眞であると假定されている関係（iii）に加えて s（$s \leqq p$）ケの関係式

$$(\mathrm{V}) \quad \sum_{i=1}^{p} h_{ij}\beta_i = 0 \qquad (j = 1, \cdots\cdots, s)$$

が満足されるとゆう事である。

こゝで $\| h_{ij} \|$ ($i = 1, \cdots p$; $j = 1, \cdots, s$) は位数 s の行列である。

さて (V) も μ_α の項で表はされる事が容易に分るであらう。

$$(\mathrm{VI}) \qquad \sum_{\alpha=1}^{N} r_{j\alpha} \mu_\alpha = 0 \qquad (j = 1, \cdots, s)$$

かくて線型假説の検定は正規、独立に同じ分散を持つ確率変数の期望値がある一次方程式系を先験的に満足してゐる事が分つてゐるとして，與へられた別の一次方程式系を満足してゐるとゆう假説の検定である。

Q_α を先験的な関係式 (iii) (又は iv) のもとに $\mu_1, \cdots\cdots \mu_N$ に関して $\sum_{\alpha=1}^{N} (y_\alpha - \mu_\alpha)^2$ の最小値を Q_r とする。次に条件(III)と(V)(又は(IV)と(VI))のもとに $\mu, \cdots$

しからば考慮下に於ける線型假説を検定するための適当な統計量 F

$$(\mathrm{III}) \qquad F = \frac{N-p}{s} \; \frac{Q_r - Q_\alpha}{Q_\alpha}$$

は自由度 $s, N-p$ の F－分布に従ふ。 そして虚無假説を検定するために適当な棄却領域をきめる。

Q_α と Q_r の計算は回帰分析技術を用ひる事によつて手軽に出来る。 回帰分析に於て我々は $p+1$ 個の変数 ($y, x_1, \cdots, x_p$) を考へる。 こゝで最初の一つを従属変数と云ひ残りの p ヶを独立変数と云ふ。 y_α, $x_{i\alpha}$ を夫々 y, x_i の α 番目の観測値とする。 ($i = 1, \cdots, p$; $\alpha = 1, \cdots, N$)

我々は y_α は同じ分散を持つ正規分布に従ふと假定し，又その平均値は，未知の常数 $\beta_1, \cdots\cdots, \beta_p$ とするとき

$$E(y_\alpha) = \beta_1 x_{1\alpha} + \cdots + \beta_p x_{p\alpha} \qquad (\alpha = 1, \cdots\cdots, N)$$

であるとする。 $x_{i\alpha}$ は確率変数ではなく，行列 $\| x_{i\alpha} \|$ の位数が p である確定変数である。

β_iを夫々 $x_1, \cdots\cdots, x_p$ についての y の母集団回帰係数と呼ぶ。そして，標本観測値 y_α，$x_{i\alpha}$ をもとゝして β_i を推定したり或は $\beta_{i's}$ に関する或る假説を検定する事を取扱ふ。

$\beta_{i's}$ を推定するために，最小自乗法の原理を用ふる。
即ち

$$(112) \qquad \sum_\alpha (y_\alpha - \beta_1 x_{1\alpha} - \cdots\cdots - \beta_p x_{p\alpha})^2$$

を最小ならしめる $\beta_1, \cdots\cdots, \beta_p$ の値を夫々 $b_1, \cdots\cdots, b_p$ とするとき，それは $\beta_{i's}$ の標本推定値であり，標本回帰係数と呼ぶ。

さて，$\beta_1 = \cdots\cdots = \beta_s = 0$ とゆう假説を検定したいとする。我々はこの假説は前に與へた定義の意味に於て線型假説である事を認識すべきである。こゝで $x_{i\alpha}$ は（iii）に於ける $g_{i\alpha}$ に対応する。假説 $\beta_1 = \cdots\cdots = \beta_s = 0$ は式（V）の一次式系に対応する。

この假説を検定するために，$\beta_{i's}$ に関して式（112）を最小にした Q_α と，$\beta_1 = \cdots\cdots = \beta_s = 0$ と前と同じ條件のもとに（112）を最小にした値 Q_r が必要である。

かくて

$$Q_a = \sum_\alpha (y_\alpha - b_1 x_{1\alpha} - \cdots\cdots - b_p x_{p\alpha})^2$$

が得られる。

こゝで $b_1, \cdots\cdots, b_p$ は y の $x_1, \cdots\cdots, x_p$ に関する標本回帰係数である。我々は

$$b_1 x_{1\alpha} + \cdots\cdots + b_p x_{p\alpha} = Y (x_{1\alpha}, \cdots\cdots x_{p\alpha})$$

と書き，$Y (x_{1\alpha}, \cdots\cdots x_{p\alpha})$ を $x_1, \cdots\cdots x_p$ についての y_α の標本回帰値と呼ぶ事にする。

よつて

$$Q_a = \sum_\alpha [y_\alpha - Y (x_{1\alpha}, \cdots\cdots x_{p\alpha})]^2$$

式 Q_r は

$$(113)\quad \sum_{\alpha=1}^{N}(y_\alpha-\beta_{s+1}x_{s+1\alpha}-\cdots\cdots-\beta_p x_{p\alpha})^2$$

を $\beta_{s+1},\cdots\cdots,\beta_p$ に関して最小ならしめたものである。

かくて，

$$Q_r=\sum_\alpha(Y_\alpha-b^*_{i+1}X_{j+1,\alpha}-\cdots\cdots b^*_i X_{p\alpha})^2$$

$$=\sum_\alpha[Y_\alpha-Y(X_{s+1\alpha},\cdots\cdots,X_{p\alpha})]^2$$

である。こゝで $b^*_{s+1},\cdots\cdots b^*_p$ は $X_{s+1},\cdots X_p$ についての y の標本回帰係数である。

我々は次の記号を用ひよう。$u_1\cdots\cdots u_r$ を任意の独立な確定変数とするとき $Y(u_{1\alpha},\cdots\cdots,u_{r\alpha})$ を $u_{1\alpha},\cdots\cdots,u_{r\alpha}$ についての Y_α の標本回帰値と云ひ又

$$A(u_1,\cdots\cdots u_r)=\sum_{\alpha=1}^{N}[Y(u_{1\alpha},\cdots\cdots u_{r\alpha})]^2$$

なる記号を用ふる。

次の定理は回帰理論に於て良く知られた定理である。

I) $$\sum_\alpha[Y_\alpha-Y(u_{1\alpha},\cdots\cdots,u_{r\alpha})]^2$$

$$=\sum_\alpha Y_\alpha^2-A(u_1,\cdots\cdots,u_r)$$

何となれば

$$\sum_\alpha Y_\alpha x_{i\alpha}=\sum_\alpha x_{i\alpha}\sum_{i'}b_{i'}x_{i'\alpha}$$

が成り立つから

$$\sum_\alpha[Y_\alpha-Y(u_{1\alpha},\cdots\cdots u_{r\alpha})]^2=\sum_\alpha Y_\alpha^2-2\sum_\alpha Y_\alpha\sum_i b_i x_{i\alpha}+A(u_1\cdots u_r)$$

$$=\sum_\alpha Y_\alpha^2-2\sum_i b_i\sum_\alpha Y_\alpha x_{i\alpha}+A(u_1\cdots u_r)$$

$$=\sum_\alpha Y_\alpha^2-2\sum_i b_i\sum_\alpha x_{i\alpha}\sum_{i'}b_{i'}x_{i'\alpha}+A(u_1\cdots\cdots u_r)$$

$$= \sum_{\alpha} Y_{\alpha}^{2} - A(u_1 \cdots\cdots u_r)$$

II) もしも u_i が v_j $(i=1,\cdots\cdots,r\ ;\ j=1,\cdots\cdots s)$ に直交するならば，即ち

$$\sum_{\alpha} u_{i\alpha} v_{j\alpha} = 0$$

ならば

$$Y(u_{1\alpha},\cdots u_{r\alpha}, v_{1\alpha},\cdots\cdots, v_{s\alpha}) = Y(u_{1\alpha},\cdots u_{r\alpha}) + Y(v_{1\alpha},\cdots\cdots ; v_{s\alpha})$$

III) もし u_i と v_j $(i=1,\cdots\cdots,r\ ;\ j=1,\cdots\cdots,s)$ が直交するならば，

$$A(u_1,\cdots\cdots, u_r, v_1,\cdots\cdots, v_s) = A(u_1,\cdots\cdots, u_r) + A(v_1,\cdots\cdots, v_s)$$

IV) もしも $u'_{1\alpha}\cdots\cdots u'_{r\alpha}$ が $u_{1\alpha},\cdots\cdots, u_{r\alpha}$ の正則な一次結ならら（α について一様）なら

$$Y(u_{1\alpha},\cdots\cdots u_{r\alpha}) = Y(u'_{1\alpha},\cdots\cdots u'_{r\alpha})$$

$$A(u_1,\cdots\cdots, u_r) = A(u'_1,\cdots\cdots u'_r)$$

(V)　もしも u が $u_1, \cdots\cdots u_r$ の一次結合ならば

$$Y(u_{1\alpha}, \cdots\cdots, u_{r\alpha}, u) = Y(u_{1\alpha}, \cdots\cdots u_{r\alpha})$$

$$A(u_1, \cdots\cdots, u_r, u) = A(u_1 \cdots\cdots u_r)$$

定理Ⅰから次の事が直ちに出る。

$$Q_a = \Sigma Y_\alpha^2 - A(x_1 \cdots\cdots, x_p)$$

$$Q_r = \Sigma Y_\alpha^2 - A(x_{s+1}, \cdots\cdots x_p)$$

我々は，乱塊法に於いて観測値をもとにして作高の平均値に及ぼす変種の効果を検定する問題に，これらの結果を用いて見よう。

y_{ij} $(i=1, \cdots\cdots m ; j=1, \cdots\cdots r)$ を j ーブロックの i ー変種による観測された作高とする。

しからば，假定により

(114)　$E(y_{ij}) = \gamma_i + \delta_j$　$(i=1, \cdots, m ; j=1, \cdots r)$

である。ただし γ_i と δ_j は，未知の常数とする。

検定すべき假説は次の様に書かれる。

(115)　$\gamma_1 = \cdots\cdots\cdots = \gamma_m \equiv \gamma$

かくて Q_a は，γ_i と δ_j に関する $\sum_j \sum_i (y_{ij} - \gamma_i - \delta_j)^2$ の最小に等しくなる。

$\gamma + \delta_j$ の代りに δ_j^* とかけば Q_r は δ_j^* についての，$\sum_j \sum_i (y_{ij} - \delta_j^*)^2$ の最小値である。

我々は観測値 y_{ij} を或る任意のしかし，きまった順序にきめこの順序に於ける y の α 番目のものを y_α とする。

さて，次の様にして定義された独立な変数 $t_1, \cdots\cdots, t_m, v_1, \cdots\cdots v_r$ を導入しよう。

$t_{i\alpha} = 1$　　y_α が i 変種による作高なるとき

$= 0$ しからざる時

$v_{j\alpha} = 1$ y_α が jー ブロックにある時

$= 0$ しからざる時

しからば

$$Q_a = \min \sum_{\alpha=1}^{mr} (y_\alpha - \gamma_1 t_{1\alpha} - \cdots - \gamma_m t_{m\alpha} - \delta_1 v_{1\alpha} - \cdots - \delta_r v_{r\alpha})^2$$

$$= \Sigma y_\alpha^2 - A (t_1, \cdots, t_m, v_1, \cdots, v_r)$$

そして

$$Q_r = \min \sum_{\alpha=1}^{mr} (y_\alpha - \delta_1^* v_{1\alpha} - \cdots - \delta_r^* v_{r\alpha})^2$$

$$= \Sigma y_\alpha^2 - A (v_1 \cdots, v_r)$$

假定（114）によつて $E(y_\alpha)$ に課せられた一次独立な條件の数は（$m-1$）（$r-1$）に等しい。 假説（115）によつて加えられた一次独立な條件の数は $m-1$ に等しい。

かくて，統計量 F は

$$(116) \qquad F = \frac{(r-1)(m-1)}{m-1} \; \frac{A (t_1 \cdots t_m, v_1 \cdots v_r) - A(v_1 \cdots v_r)}{\Sigma \Sigma y_{ij}^2 - A (t_1 \cdots t_m, v_1 \cdots v_r)}$$

によつて與へられる。

$i \neq j$ に対して $\sum_\alpha v_{i\alpha} v_{j\alpha} = 0$ であるから定理（111）により

$$A (v_1 \cdots v_r) = A (v_1) + \cdots + A (v_r)$$

となる． $A(v_j)$ を計算するため我々は任意の独立変数 u に対して

$$(117)\quad Y(u_\alpha) = \left(\frac{\Sigma\, y_\alpha u_\alpha}{\Sigma\, u_\alpha^2}\right) u_\alpha$$

である事を注意すべきである。かくて

$$(118)\quad A(u) = \left(\frac{\sum_\alpha y_\alpha u_\alpha}{\sum_\alpha u_\alpha^2}\right)^2 = \frac{(\sum_\alpha y_\alpha u_\alpha)^2}{\sum_\alpha u_\alpha^2}$$

よつて

$$A(v_j) = \frac{(\Sigma\, y_\alpha v_{j\alpha})^2}{\Sigma\, y_\alpha^2} = m(y_{\cdot j})^2$$

故に

$$(119)\quad A(v_1, \cdots\cdots, v_r) = m \sum_{j=1}^{r} (y_{\cdot j})^2$$

同様に

$$(120)\quad A(t_1, \cdots\cdots, t_r) = r \sum_{i=1}^{m} (y_{i\cdot})^2$$

$A(t_1, \cdots\cdots, t_m, v_1, \cdots\cdots, v_r)$ を求めるために我々は独立変数 $w \equiv 1$, 即ち $w_\alpha = 1$ $(\alpha = 1, \cdots\cdots, N)$ 導入する。
$w = t_1 + \cdots\cdots + t_m$ であるから定理Vにより

$$A(w, t_1, \cdots\cdots, t_m, v_1, \cdots\cdots, v_r) = A(t_1, \cdots, t_m, v_1 \cdots\cdots v_r)$$

が成立つ。

$\bar{t}_i$, $\bar{v}_j$ を夫々 $t_{i\alpha}$, $v_{j\alpha}$ の算術平均とする。
しからば $t_i - \bar{t}_i$, $v_j - \bar{v}_j$ は夫々 $t_1 \cdots t_m$; $v_1 \cdots\cdots v_r$ の一次結合である。それ故

$$A(w, t_1, \cdots\cdots, t_m, v_1, \cdots\cdots, v_r)$$

$$= A(w, t_1 - \bar{t}_1, \cdots t_m - \bar{t}_m, v_1 - \bar{v}_1, \cdots\cdots, v_r - \bar{v}_r)$$

である。又

$$\sum_{\alpha} w_{\alpha}(t_{i\alpha}-\bar{t}_i)=\sum_{\alpha} w_{\alpha}(v_{j\alpha}-v_j)=\sum_{\alpha}(t_{i\alpha}-\bar{t}_i)(v_{j\alpha}-\bar{v}_j)=0$$

$$A(w,t_1-\bar{t}_1,\cdots,t_m-\bar{t}_m,v_1-\bar{v}_1,\cdots v_r-\bar{v}_r)$$
$$=A(w)+A(t_1-\bar{t}_1,\cdots t_m-\bar{t}_m)$$
$$+A(v_1-\bar{v}_1,\cdots,v_r-\bar{v}_r)$$

なる事を知る。 又

$$A(w)+A(t_1-\bar{t}_1,\cdots,t_m-\bar{t}_m)=A(t_1,\cdots,t_m)$$

で

$$A(w)+A(v_1-\bar{v}_1,\cdots v_r-\bar{v}_r)=A(v_1\cdots v_r)$$

なる事が容易に分る。 かくて

$$(121)\qquad A(t_1\cdots t_m,v_1\cdots v_r)$$
$$=A(t_1\cdots t_m)+A(v_1\cdots v_r)-A(w)$$

よつて

$$A(w)=\frac{(\sum y_{\alpha}w_{\alpha})^2}{\sum w_{\alpha}^2}=mry^2\qquad\left[y=(\sum\sum y_{ij})/mr\right]$$

であるから結局

$$A(t_1\cdots t_m,v_1\cdots v_r)=\sum_{i=1}^{m}r(y_{i\cdot})^2+\sum_{j=1}^{r}m(y_{\cdot j})-mry^2$$

$$A(t_1\cdots t_m,v_1\cdots v_r)-A(v_1\cdots v_r)$$
$$=A(t_1\cdots t_m)-A(w)=\sum_{i=1}^{m}r(y_{i\cdot})^2-mry^2$$

が得られる。 かくて

$$F=\frac{(m-1)(r-1)}{m-1}\;\frac{A(t_1\cdots t_m,v_1\cdots v_r)-A(v_1\cdots v_r)}{\sum\sum y_{ij}-A(t_1\cdots t_m,v_1\cdots v_r)}$$

$$= \frac{(m-1)(r-1)}{m-1} \quad \frac{\sum_i r(y_{i.})^2 - mry^2}{\sum\sum y_{ij}^2 - \sum r(y_{i.})^2 - \sum m(y_{.j})^2 + mry^2}$$

$$\doteq \frac{(m-1)(r-1)}{m-1} \quad \frac{\sum r(y_{i.} - y)^2}{\sum\sum(y_{ij} - y_{i.} - y_{.j} + y)^2}$$

31. ラテン方格

ラテン方格とは m ヶの記号，例へば $v_1 \cdots\cdots v_m$ を行についても列についても各記号が一度しかも正確に必らず一度づつあらはれる様に方格にならべたもののことである。例へば次のならべ方はラテン方格である。

V_1	V_2	V_3
V_2	V_3	V_1
V_3	V_1	V_2

さて $v_1, v_2, \cdots\cdots, v_m$ を異なつた m ヶの変種とし，生産高の平均値が，このことなつた変種に対して同じであるとゆう仮説を検定する事にする。m ヶの変種が無作為にならべられてある m ヶのプロットからなるブロックを用ひる事によつて，この仮説を検定する事が出来る。もしブロック中に於ける土壌の肥沃度の変動が無視出来ないなら，次の様な理由でこの方法は適当でない。たとえ乱化法が土壌肥沃度によつて起る偏倚を消去する事が出来たとしても，作高の分散は土壌肥沃度のために増大し，その為，検定の有効性を減ぜしめるであらう。

この様に土壌肥沃度の分散が大きいときは，ラテン方格計画による方が良いであらう。

我々は m 行 m 列の方格に於て m ヶの変数を各行各列に正確に一度づつあらはれる様にならべる。y_{ijk} を i 行 j 列に k 変種を施した生産高とする。ラテン方格にあるならび方に於て添数 k は添数 i と j の一価函数である。我々は y_{ijk} が独立に正規に同じ分散をもつて分布してゐると仮定する。土壌の肥沃度の変動があるから y_{ijk} の期望値は変動 k のみでなく土壌の肥沃度にも影響されるであらう。

かくして，我々は

(122) $\quad E(y_{ijk}) = \alpha_i + \beta_j + \gamma_k$

こゝで α_i と β_j は土壌の肥沃度により γ_k は k-要種による効果とする。もつと一般的な假定は $E(y_{ijk}) = \alpha_{ij} + \gamma_k$ とおく事であらう。しかしながら假定(122)は次に述べる様な理由で合理的であらう。実験的な桝でオホワレタ面積は比較的小さく，それ故桝の中に於て，土壌肥沃度は点の座標の一次函数で近似できるであらう。

即ち，土壌肥沃度は函数 $\alpha_i + \beta_j$ によつてあらはされ得る。かくて，假定(122)は正当化され得るであらう。

我々は次の假説を検定する問題を取扱ほう。

<u>假説 I.</u>　要種は効果を及ぼさない。即ち

$$\gamma_1 = \gamma_2 = \cdots\cdots = \gamma_m$$

<u>假説 II</u>　行は効果を及ぼさない。即ち

$$\beta_1 = \beta_2 = \cdots\cdots = \beta_m$$

<u>假説 III</u>　列は効果を及ぼさない。即ち

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots\cdots = \alpha_m$$

これらの三つの假説は皆線型假説である。

そして，我々は線型假説に関する一般的手続をこれに適用しよう。

m^2 ヶの観測値を y_{ijk} を或る任意のしかしさだまつた順序にならべさせる。そして y_α をこの順序に於ける α-番目の観測値とする。

我々は，次の様に定義される独立な確率変数

$$w, t, \cdots t_m, v_1, \cdots v_m, z_1, \cdots z_m$$

を導入する。

$w_\alpha = 1 \quad (\alpha = 1, \cdots\cdots m^2)$

$t_{i\alpha} = 1$　もし y_α が i 行にある時

$\quad = 0$　しからざる時

$v_{j\alpha} = 1$　y_α が j 列にある時

$\quad = 0$　しからざる時

$z_{k\alpha} = 1$　y_α が k 要種による作物である時

$\quad = 0$　しからざるとき

<u>Q_a の計算</u>　あきらかに Q_a は $\alpha_1, \cdots, \alpha_m ; \beta_1, \cdots\cdots, \beta_m,$

$\gamma_1, \cdots, \gamma_m$ について

$$Q_a = \text{minimam} \sum_{\alpha=1}^{m^2} (y_\alpha - \alpha_1 t_{1\alpha} \cdots\cdots \alpha_m t_{m\alpha}$$

$$- \beta_1 v_{1\alpha} - \cdots\cdots - \beta_m v_{m\alpha} - \gamma_1 z_{1\alpha} - \cdots\cdots - \gamma_m z_{m\alpha})^2$$

である。 よつて

$$(123) \quad Q_a = \sum_{\alpha=1}^{m^2} y_\alpha^2 - A(t_1 \cdots t_m, v_1, \cdots, v_m, z_1, \cdots, z_m)$$

定理 IV によつて，

$$(124) \quad A(t_1 \cdots t_m, v_1 \cdots v_m, z_1 \cdots, z_m)$$

$$= A(w, t_1 - \bar{t}_1, \cdots\cdots t_m - \bar{t}_m, v_1 - \bar{v}_1, \cdots v_m - \bar{v}_m, z_1 - \bar{z}_1, \cdots z_m - \bar{z}_m)$$

さて w は $t_i - \bar{t}_i$，$v_j - \bar{v}_j$，$z_k - \bar{z}_k$ に対して直交する事は明らかである。 今我々は $t_i - \bar{t}_i$ は $v_j - \bar{v}_j$，$z_k - \bar{z}_k$ に対して直交する事を示さう。

実際に

$$\sum_\alpha (t_{i\alpha} - \bar{t}_i)(v_{j\alpha} - \bar{v}_j) = \sum_\alpha t_{i\alpha} v_{j\alpha} - m^2 \bar{t}_i \bar{v}_j$$

$$= 1 - m^2 \frac{1}{m} \frac{1}{m} = 0$$

$$\sum_\alpha (t_{i\alpha} - \bar{t}_i)(z_{k\alpha} - \bar{z}_k) = \sum t_{i\alpha} z_{k\alpha} - m^2 \bar{t}_i \bar{z}_k$$

$$= 1 - m^2 \frac{1}{m} \frac{1}{m} = 0.$$

同様に $v_j - \bar{v}_j$ は $z_k - \bar{z}_k$ に直交してゐる事を示す事が出来る。
結局

$$(125) \quad A(w, t_1 - \bar{t}_1, \cdots t_m - \bar{t}_m, v_1 - \bar{v}_1 \cdots\cdots v_m - \bar{v}_m, z_1 - \bar{z}_1, \cdots z_m - \bar{z}_m)$$

$$= A(w) + A(t_1 - \bar{t}_1, \cdots t_m - \bar{t}_m) + A(v_1 - \bar{v}_1 \cdots v_m - \bar{v}_m) + A(z_1 - \bar{z}_1, \cdots z_m - \bar{z}_m)$$

となる。 さて

$$(126) \quad A(w) = m^2 y^2$$

$$(127) \quad A(w) + A(t_1 - \bar{t}_1, \cdots t_m - \bar{t}_m) = A(t_1 \cdots t_m)$$

$$= m \sum_{i=1}^{m} (y_{i\cdot\cdot})^2$$

(128) $A(w)+A(v_1-\bar{v}_1, \cdots v_m-\bar{v}_m)=A(v_1 \cdots v_m)$

$$= m\sum_{j=1}^{m}(y_{\cdot j \cdot})^2$$

(129) $A(w)+A(z_1-\bar{z}_1, \cdots z_m-\bar{z}_m)$

$$= A(z_1 \cdots z_m) = m\sum_{k=1}^{m}(y_{\cdot k})^2$$

(124) —— (129) から

$$A(t_1, \cdots, t_m, v_1 \cdots v_m, z_1, \cdots z_m)$$

$$(130) = m\Sigma(y_{i\cdot\cdot})^2+m\Sigma(y_{\cdot j\cdot})+m\Sigma(y_{\cdot\cdot k})^2- \ m^2y^2$$

$$= m\Sigma(y_{i\cdot\cdot}-y)^2+m\Sigma(y_{\cdot j\cdot}-y)^2+m\Sigma(y_{\cdot\cdot k}-y)^2$$

假說 I に対応する Q_r

假說 I に対応して $\gamma_1 = \cdots\cdots = \gamma_m = \gamma$ とおけば

$$E(y_\alpha) = \alpha_i^* + \beta_j^* = \alpha_1^* t_{1\alpha} + \cdots\cdots + \alpha_m^* t_{m\alpha}$$
$$+ \beta_1^* v_{1\alpha} + \cdots + \beta_m^* v_{m\alpha}$$

$$Q_r = \min \sum_\alpha (y_\alpha - \alpha_1^* t_{1\alpha} - \cdots - \alpha_m^* t_{m\alpha} - \beta_1^* v_{1\alpha} - \cdots - \beta_m^* v_{m\alpha})^2$$
$$= \sum_\alpha y_\alpha^2 - A(t_1, \cdots, t_m, v_1, \cdots, v_m)$$
$$= \sum_\alpha y_\alpha^2 - [m\Sigma(y_{i\cdot\cdot})^2 + m\Sigma(y_{\cdot j\cdot})^2 - m^2y^2]$$

假說 II に対応する Q_r

同樣に

$$Q_r = \Sigma y_\alpha^2 - A(t_1, \cdots t_m, z_1, \cdots, z_m)$$
$$= \Sigma y_\alpha^2 - [m\Sigma(y_{i\cdot\cdot})^2 + m\Sigma(y_{\cdot\cdot k})^2 - m^2y^2]$$

假說 III に対応する Q_r

$$Q_r' = \Sigma y_\alpha^2 - A(v_1 \cdots v_m,\ z_1 \cdots z_m)$$

$$= \Sigma y_\alpha^2 - \left[m\Sigma(y_{\cdot j \cdot})^2 + m\Sigma(y_{\cdot\cdot k})^2 - m^2 y^2 \right]$$

假定（122）によつて E（y_α）に課せられた一次関係式の数は

$$m^2 - (3m-2) = m^2 - 3m + 2$$

にしとしい。

かくて，假說 Ⅰ，Ⅱ，Ⅲ，の検定に対して我々は夫々次の統計量Fが得られる。

$$F_1 = \frac{m^2-3m+2}{m-1}\ \frac{A(t_1\cdots t_m, v_1\cdots v_m, z_1\cdots z_m) - A(t_1\cdots t_m, v_1\cdots v_m)}{\Sigma y_\alpha^2 - A(t_1\cdots t_m, v_1\cdots v_m, z_1\cdots z_m)}$$

$$= \frac{m^2-3m+2}{m-1}\ \frac{m\Sigma(y_{\cdot\cdot k})^2 - m^2 y^2}{\Sigma y_\alpha^2 - A(t_1\cdots t_m, v_1\cdots v_m, z_1\cdots z_m)}$$

$$= \frac{m^2-3m+2}{m-1}\ \frac{m\sum_k (y_{\cdot\cdot k} - y)^2}{\Sigma y_\alpha^2 - A(t_1\cdots t_m, v_1\cdots v_m, z_1\cdots z_m)}$$

$$F_2 = \frac{m^2-3m+2}{m-1}\ \frac{m\Sigma(y_{\cdot j \cdot} - y)^2}{\Sigma y_\alpha^2 - A(t_1\cdots t_m, v_1\cdots v_m, z_1\cdots z_m)}$$

$$F_3 = \frac{m^2-3m+2}{m-1}\ \frac{m\Sigma(y_{i\cdot\cdot} - y)^2}{\Sigma y_\alpha^2 - A(t_1\cdots, t_m, v_1\cdots v_m, z_1, \cdots, z_m)}$$

（130）から

$$(131)\quad Q_a = \Sigma y_\alpha^2 - A(t_1, \cdots, t_m, v_1 \cdots, v_m, z_1, \cdots, z_m)$$

$$= \Sigma\Sigma(y_{ijk} - y)^2 - m\Sigma(y_{i\cdot\cdot} - y)^2 - m(y_{\cdot j\cdot} - y)^2$$

$$- m\Sigma(y_{\cdot\cdot k} - y)^2$$

これらの結果を下の表の様にまとめてみると便利である。

	偏差平方和	自由度	平方平均
変種	$m\Sigma(y_{..k}-y)^2$	$m-1$	$\dfrac{m\Sigma(y_{i.k}-y)^2}{m-1}$
行	$m\Sigma(y_{.j.}-y)^2$	$m-1$	$\dfrac{m\Sigma(y_{i..}-y)^2}{m-1}$
列	$m\Sigma(y_{.j.}-y)^2$	$m-1$	$\dfrac{m\Sigma(y_{.j.}-y)^2}{m-1}$
残余	Q_a ((131)に與へられた)	m^2-3m+2	$\dfrac{Q_a}{m^2-3m+2}$
全体	$\sum_i\sum_j(y_{ijk}-y)^2$	m^2-1	

我々は明らかに

F_1 = 変種に対する平均平方和を残差項で割つたもの

F_2 = 行 〃 〃

F_3 = 列 〃 〃

である。

32. 欠測値の問題

実験がラテン方格に並べられてあるとする。もし，この中の或る桝の観測値が得られてないとき，これを欠測値の問題とゆう。

この場合，知識の一部分は失はれてゐるのであるが，尚ほ資料の統計的分析を行ふことが出来る。

実際に，この問題は一般的線型假説の特別な場合であり，そして正確に解く事が可能である。

この場合起る新しい複雑さは $A(t_1\cdots t_m, u_1\cdots u_m, v_1\cdots v_m)$ の計算だけである。もしもすこしの観測値が欠けてゐるならば問題は比較的簡単に解決されるであらう。

我々はこのために次の最小自乗法に関する，二つの補助定理を必要とするであらう。

補助定理 A： y を従属変数 $x_1 \cdots\cdots x_r$ を独立変数。$y_\alpha, x_{i\alpha}$ をこれの N ヶの観測値とする（$i=1, \cdots\cdots, r,\ \alpha=1, \cdots\cdots, N$）又 $b_1x_{1\alpha}+b_2x_{2\alpha}+\cdots\cdots+b_rx_{r\alpha}$ を $Y(x_{1\alpha}, \cdots\cdots x_{r\alpha})$ と置き，（b_i' は前と同じ意味を持つ記号である）。

又 b_i は一意的であるとする。（即ち行列 $\|x_{i\alpha}\|$ の階数は r である）。さて新しい s 組の観測値 y_γ；$x_{i\gamma}$（$\gamma=N+1, \cdots\cdots, N+s$）が

$$y_\gamma = b_1x_{1\gamma}+b_2x_{2\gamma}+\cdots\cdots+b_rx_{r\gamma}$$

を満足するとする。

即ち新しい観測値は，最初の N ヶの観測から得られた回帰線の上にのつてあるとする。

しからば，$N+s$ ヶの観測値から計算された標本回帰係数を $b_1^*, \cdots\cdots, b_r^*$ とすれば　$b_i^*=b_i$　$(i=1, 2, \cdots\cdots, r)$ が成り立つ。

<u>証　明</u>

すくなくとも一つの i に対して，$b_i^* \neq b_i$ であるとする。
しからば b_i は一意的であるから

$$\sum_{\alpha=1}^{N}(y_\alpha - b_1^*x_{1\alpha}-\cdots\cdots-b_r^*x_{r\alpha})^2 > \sum_{\alpha=1}^{N}(y_\alpha - b_1x_{1\alpha}-\cdots\cdots-b_rx_{r\alpha})^2$$

さて，$\alpha=N+1, \cdots\cdots, N+s$ に対して

$$y_\alpha - b_1x_{1\alpha}-\cdots\cdots-b_rx_{r\alpha}=0$$

であると假定してあるから，

$$\sum_{\alpha=1}^{N+s}\left(y_\alpha-\sum_{i=1}^{r}b_i^*x_{i\alpha}\right)^2 > \sum_{\alpha=1}^{N}\left(y_\alpha-\sum_{i=1}^{r}b_ix_{i\alpha}\right)^2$$
$$=\sum_{\alpha=1}^{N+s}\left(y_\alpha-\sum_{i=1}^{r}b_ix_{i\alpha}\right)^2$$

これは，b^* が

$$\sum_{\alpha=1}^{N+P}\left(y_\alpha-\sum_{i=1}^{N}\beta_i x_{i\alpha}\right)^2$$

を最小にすると云ふ假定に反する。

補助定理 B

Y_{ij} を $(t_1,\cdots\cdots,t_m,u_1,\cdots\cdots,u_m,v_1,\cdots\cdots v_m)$ についての y_{ijk} の標本回帰直線とする。しからば，前章に於て $A's$ を $Y's$ におきかえて $A(t_1\cdots t_m,u_1\cdots u_m,v_1\cdots v_m)$ を計算した方法を遂行するならば

$$Y_{ij}=y_{i..}+y_{.j.}+y_{..k}-2y$$

である事は容易である。我々は新たに Q_a を計算しなければならない。

n ヶの観測値 $y_{i_1j_1k_1},\cdots\cdots y_{i_nj_nk_n}$ が欠測してあるとする。

我々は，欠測値以外の所はもとのまゝと一致し，それ以外は回帰推定値でおきかえた所の新しい観測値の集合を考える。

しからば $A(t_1\cdots t_n,u_1\cdots,u_n,v_1,\cdots\cdots v_n)$ の計算はすこぶる簡単になる。$A^*(t,u,v)$ を y^*_{ijk} から計算された A に対応するものとする。

しからば (130) によつて

$$A^*(t,u,v)=m\sum_{i=1}^{m}(Y^*_{i..})^2+m\sum_{j=1}^{m}(y_{.j.})^2+m\sum_{k}^{0}(y^*_{..k})^2-2m^2(y^*)^2$$

しかして，$A(t,u,v)=\Sigma\Sigma y_{ij}^2$ は欠測してゐない部分に対して加えられた和であるから，これは

$$A(t,u,v)=\Sigma\Sigma y_{ij}^2-Y_{i_1j_1}^2-\cdots\cdots-y_{i_nj_n}^2$$

$$=A^*(t,u,v)-y_{i_1j_1}^2-\cdots\cdots-y_{i_nj_n}^2$$

と書き直せる。同様にして假説 I に対応する Q_r を得るために

$$A(t,u) = A^*(t,u) - Y_{i_1j_1}^2 - \cdots\cdots - Y_{i_nj_n}^2$$

$$= m\sum_{i=1}^{m}(y_{i..}^*)^2 + m\sum_{j=1}^{m}(y_{.j.}^*)^2 - m^2y^{*2}$$

$$- y_{i_1j_1}^2 - \cdots\cdots - y_{i_nj_n}^2$$

を必要とする。 こゝで $y_{i_1j_1}$ 等は、假説が成り立つと云ふ條件のもとに於ける回帰推定値である。

Q_a の自由度は假定によつて與へられた独立な條件（必数だ）である。

$$E.(y_{ijk}) = \alpha_i + \beta_j + \gamma_k$$

$3m$ ケの常数をもつ m^2-n の方程式がある。

（それらの之は固定されてある）

それ故 Q_a の自由度は $m^2-3m-2-n$ である。

$Q_r - Q_a$ の自由度は変らない。

こゝで $y_{i,j,}$ を計算する残された困難な問題がある。 先づ最初に欠測値が唯一つでそれを $y_{i_1j_1k_1}$ であるとする。

$$y_{i_1j_1} = y_{i_1j_1}^* = y_{i_1..}^* + y_{.j_1.}^* + y_{..k_1}^* - 2y^*$$

さて $$y_{i_1..}^* = \frac{1}{m}\sum_{\alpha=1}^{m} y_{i_1\alpha} = \frac{R + y_{i_1j_1}}{m}$$

こゝで $R = (m-1)y_{i_1..}$ である。

同様に

$$y_{.j_1}^* = \frac{C + y_{i_1j_1}}{m} \qquad \text{こゝで } C = (m-1)y_{.j_1}$$

$$y_{..k_1}^* = \frac{V + y_{i_1j_1}}{m} \qquad \text{こゝで } V = (m-1)y_{..k_1}$$

$$y^{*} = \frac{S + y_{i_1 j_1}}{m} \qquad こゝで \quad S = (m^2 - 1)\, y$$

さて我々は

$$y_{i_1 j_1} = \frac{R + y_{i_1 j_1}}{m} + \frac{C + y_{i_1 j_1}}{m} + \frac{V + y_{i_1 j_1}}{m} - 2\left[\frac{S + y_{i_1 j_1}}{m^2}\right]$$

これを $y_{i_1 j_1}$ に対して解けば

$$y_{i_1 j_1} = \frac{m(R + C + V) - 2S}{m^2 - 3m + 2}$$

かくて我々は資料から容易に計算される所の擬観測値 $y_{i_1 j_1}$ の値を持つ。

同様に Q_r に対し，例へば H_1 を検定するならば

$$y_{ij} = \overset{*}{y}_{ij} = \overset{*}{y}_{i.} + \overset{*}{y}_{.j} - y^{*} \qquad (i, j = 1, \cdots, m)$$

$$y_{ij} = \frac{R + y_{i_1 j_1}}{m} + \frac{C + y_{i_1 j_1}}{m} - \frac{S + y_{i_1 j_1}}{m^2}$$

$$y_{i_1 j_1} = \frac{m(R + C) - S}{m^2 - 2m + 1}$$

次に桝 $(i_1 j_1)$ と $(i_2 j_2)$ とが欠測してゐるとする。　こゝで二つの場合が生じる。

場合 1）　$i_1 \neq i_2$，$j_1 \neq j_2$，$k_1 \neq k_2$ のとき．

場合 2）　上の不等式の内唯一だけが成立つ場合．

我々は単に場合 1）だけを論じよう。　場合 2）は同様な方法で扱ふ事が出来る。　欠測桝についての回帰を見出す前に

$$y_{i_1 j_1} = \overset{*}{y}_{i_1 j_1} = \overset{*}{y}_{i_1 ..} + \overset{*}{y}_{.j_1 .} + \overset{*}{y}_{..k_1} - 2y^{*}$$

こゝで

$$y^*_{i_1 \cdot \cdot} = \frac{R + y_{i_1 j_1}}{m}$$

$$y^*_{\cdot j_1 \cdot} = \frac{C + y_{i_1 j_1}}{m}$$

$$y^*_{\cdot \cdot k_1} = \frac{V + y_{i_1 j_1}}{m}$$

$$y^* = \frac{S + y_{i_1 j_1} + y_{i_2 j_2}}{m^2}$$

である。

$$y_{i_1 j_1}(m^2 - 3m + 2) + 2y_{i_2 j_2} = m(R + C + V) - 2S$$

である。。同様に桝 $i_2 j_2$ に対して

$$2y_{i_1 j_1} + y_{i_2 j_2}(m^2 - 3m + 2) = m(R' + C' + V') - 2S$$

こゝで R', C', V' は i-行，j-列，k-変種に夫々対する最初の観測値の和である。

Q_r の計算に於て，例へば H_1 を検定するなら桝 $(i_1 j_1)$ に対して

$$y_{i_1 j_1} = \frac{R + V_{i_1 j_1}}{m} + \frac{C + y_{i_1 j_1}}{m} - \frac{S + y_{i_1 j_1} + y_{i_2 j_2}}{m^2}$$

で対 $(i_2 j_2)$ に対しても同様方式が得られる。

斯くして，我々は再び $y_{i_1 j_1}$ と $y_{i_2 j_2}$ の同次等式の対が得られた。

$$y_{i_1 j_1}(m^2 - 2m + 1) + y_{i_2 j_2} = m(R + C) - S$$

$$y_{i_1 j_1} + y_{i_2 j_2}(m^2 - 2m + 1) = m(R' + C') - S$$

33. グレコ方格とグレコ方格

二組の m ケの記号を（$A_1, \cdots\cdots, A_m$）と（$B_1, \cdots\cdots, B_m$）としたとき 2 m ケの記号を，m 行 m 列の正方に於てA記号とB記号がこの桝に唯一つづあらはれ，且つ次の條件を満足するときの並べ方を m 次のグレコ－ラテンと云ふ。

1）A記号もB記号も共に各行に正確に一つあらはれる。

〃　　各列　　〃

2）A記号とB記号の任意の組合せは一つのしかも唯一つの桝にあらはれる。　次に挙げるのは，グレコ－ラテンの例である。

A_1B_1	A_2B_2	A_2B_3
A_2B_3	A_3B_1	A_1B_2
A_3B_2	A_1B_3	A_2B_1

我々は m 変種 $A_1\cdots\cdots A_m$ と m ケの取扱ひ $B_1, \cdots\cdots, B_m$ が生産物に及ぼす効果について検定する事を考へる。

その時有効な検定方法は変種と取扱ひをグレコ－ラテンに並べる事によつて得られる。

34 グレコラテン方格に於ける標本論

y_{ijkl} を i 行 j 列に於ける変種 A_k と取扱ひ B_l による生産高とする。　グレコラテン方格に於て，添数 k，l は i と j の一價函数である。　さて変数 y_{ijkl} は正規独立に分布し，その分散は皆等しいと假定する．　更に

$$(132) \qquad E(y_{ijkl}) = \alpha_i + \beta_j + \gamma_k + \delta_l$$

であると假定する。　こゝで α_i と β_j は，i 行 j 列に於ける土壌の肥沃度による項であり又，γ_k は k 変種の効果，δ_l は l 番目の取扱ひによる効果である。　我々は次の4つの假説を考へよう。

H_1　行は生産高の平均値にいかなる効果も及ぼさない。即ち

$$\alpha_1 = \cdots\cdots = \alpha_m$$

H_2　列は　〃

$$\beta_1 = \cdots\cdots = \beta_m$$

H_3　変種は　〃

$$\gamma_1 = \cdots\cdots = \gamma_m$$

H_4　取扱は　〃

$$\delta_1 = \cdots\cdots = \delta_m$$

我々は假説 H_1, H_2, H_3, H_4 を夫々検定するために必要な適当な統計量 F_1, F_2, F_3, F_4 を導かう。このために観測値 y_{ijkl} を或る順序に並べこの順序に於ける α 番の観測値を y_α とおく。

我々は次の様に定義した、独立な確率変数 $t_1, \cdots t_m, u_1 \cdots u_m, v_1 \cdots v_m, z_1 \cdots z_m$ を導入しよう。

$t_{i\alpha} = 1$　y_α が i 行にあるとき

　　0　しからざるとき

$u_{j\alpha} = 1$　y_α が j 列 〃 〃

　　$= 0$　しからざるとき

$v_{k\alpha} = 1$　y_α が k 変種の産物であるとき

　　$= 0$　しからざるとき

$z_{l\alpha} = 1$　y_α が l 番目の取扱ひが施されてゐるとき

　　$= 0$　しからざるとき.

しからば次の事が容易に験證出来る.

$$(133)\quad Q_a = \Sigma y_\alpha^2 - A(t_1 \cdots t_m, u_1 \cdots u_m, v_1 \cdots v_m, z_1 \cdots z_m)$$

ラテン方格に於ける場合と同様に $W_\alpha = 1$ $(\alpha = 1, \cdots m^2)$ によつて定義される独立変数 w を導入すると

$$(134)\quad A(t_1 \cdots t_m, u_1 \cdots u_m, v_1 \cdots v_m, z_1 \cdots z_m)$$

$$= A(w,\ t_1-\bar{t}_1,\ u_1-\bar{u}_1\ \cdots,\ v_1-\bar{v}_1\ \cdots\ z_1-\bar{z}_1,\ \cdots)$$

$$= A(w) + A(t_1-\bar{t}_1,\cdots) + A(u_1-\bar{u}_1,\cdots) +$$

$$+ A(v_1-\bar{v}_1,\cdots) + A(z_1-\bar{z}_1,\cdots)$$

$$= A(t_1,\cdots) + A(u_1,\cdots) + A(v_1,\cdots)$$

$$+ A(z_1,\cdots) - 3A(w)$$

$$= m\Sigma(y_{i\cdots})^2 + m\Sigma(y_{\cdot j\cdot\cdot})^2 + \Sigma(y_{\cdot\cdot k\cdot})^2 + \Sigma(y_{\cdots l})^2 - 3m^2y^2$$

$$= m\Sigma(y_{i\cdots}-y)^2 + m\Sigma(y_{\cdot j\cdot\cdot}-y)^2 + m\Sigma(y_{\cdot\cdot k\cdot}-y)^2 + m\Sigma(y_{\cdots l}-y)^2$$

$$+ m^2 y$$

（133）と（134）から

$$(135)\qquad Q_a = \sum_j\sum_i(y_{ijkl}-y)^2 - m\Sigma(y_{i\cdots}-y)^2 - m\Sigma(y_{\cdot j\cdot\cdot}-y)^2$$

$$- m\Sigma(y_{\cdot\cdot k\cdot}-y)^2 - m\Sigma(y_{\cdots l}-y)^2$$

が得られる。 假説 H_1 に対する Q_r が

$$Q_r = \Sigma y_\alpha^2 - A(u_1\cdots u_m,\ v_1\cdots v_m,\ z_1\cdots z_m)$$

で與へられる事が容易に分る。 かくて

$$(136)\qquad Q_r - Q_a = A(t_1\cdots t_m,\ u_1\cdots u_m,\ v_1\cdots v_m,\ z_1\cdots z_m)$$

$$- A(u_1,\cdots,u_m,\ v_1\cdots,v_m,\ z_1,\cdots z_m)$$

又（130）と（134）から（136）式の右辺が $m\Sigma(y_{i\cdots}-y)^2$ に等しい事が分る。 假定（132）によって生ずる一次関係式の数は明らかに $m^2-(4m-3)$ に等しい。 かくて

$$F_1 = \frac{m^2-4m+3}{m-1}\ \frac{m\Sigma(y_{i\cdots}-y)^2}{Q_a}$$

同様に

$$F_2 = \frac{m^2-4m+3}{m-1} \frac{m\Sigma(y_{\cdot j \cdot\cdot}-y)^2}{Q_a}$$

$$F_3 = \frac{m^2-4m+3}{m-1} \frac{m\Sigma(y_{\cdot\cdot k \cdot}-y)^2}{Q_a}$$

$$F_4 = \frac{m^2-4m+3}{m-1} \frac{m\Sigma(y_{\cdot\cdot\cdot l}-y)^2}{Q_a}$$

が得られる。 こゝに Q_a は（135）で與へられたものである。
これ等を表にまとめあげてみると，

	偏差平方和	自由度	平方平均
行	$m\Sigma(y_{i\cdot\cdot\cdot}-y)^2$	$m-1$	$\frac{m\Sigma(y_{i\cdot\cdot\cdot}-y)^2}{m-1}$
列	$m\Sigma(y_{\cdot j\cdot\cdot}-y)^2$	$m-1$	$\frac{\Sigma(y_{\cdot j\cdot\cdot}-y)^2}{m-1}$
変種	$m\Sigma(y_{\cdot\cdot k\cdot}-y)^2$	$m-1$	$\frac{m\Sigma(y_{\cdot\cdot k\cdot}-y)^2}{m-1}$
取扱ひ	$m\Sigma(y_{\cdot\cdot\cdot l}-y)^2$	$m-1$	$\frac{m\Sigma(y_{\cdot\cdot\cdot l}-y)^2}{m-1}$
残差	Q_a （(135)で與へられてある）	m^2-4m+3	$\frac{Q_a}{m^2-4m-3}$
合計	$\sum_j\sum_i(y_{ijkl}-y)^2$	m^2-1	

F_1： 行についての平均平方和と残差項との比

F_2： 列 〃 〃

F_3： 変種 〃 〃

F_4： 取扱ひ 〃 〃

35　超方格法一般論

今迄述べた如くラテン方格，及び，グレコラテン方格は方格を m^2 に分割する，幾何学的図型として定義された。

しかし，それらの議論の抽象的内容は幾何学的図型にこだはる必要はない。　これを明確にするために，前に定義したラテン方格，及びグレコラテンを特別な場合として含む一般的抽象な定義をしよう。

r ヶの分類，即ち r ヶの分類基準を考へてみる。

例へば分類の基準として，婚姻の状態，職業，国籍等によつて人を分類する。　又各分類の基準を m ヶの級に分ける。

例へば，婚姻の状態については，既婚者，離婚者，未亡人，独身者に，又職業については，法律家，兵隊，医者，牧師に，‥‥‥等と級に分ける。

我々は m^2 の元素の群が，もしも次の條件を満足するならば，一般的ラテン方格を形づくると云う。

即ち任意の4つの正の整数 i，j，m'，m''　（但し $i \neq j$；$i \leqq r$，$j \leqq r$；$m' \leqq m$，$m'' \leqq m$）に対して i m' 級と j 分類 m'' 級の両方に属し，しかもそれのみに属する元素が一つしかも必らず一つ群 G の中に存在する。

もし $r = 3$. とすれば一般的ラテン方格は，前に定義した普通のラテン方格に一致する。

ラテン方格に対して，分類の三ヶの基準は，行，列，変種である。

$r = 4$　のとき，一般的ラテン方格は，グレコ－ラテン方格である。　$r > 4$ に対しては，超グレコラテン方格が得られる。

次の問題（R.A.Fisher.　Design of experiment P. 94）は一般的ラテン方格の概念を更に分りや易くするために有効なものとなるであらう。

定期航路にある16人の旅客が，自分達は非常に代表的な特色を持つてある事を発見した。

即ち4人は英国人，4人はスコットランド人，4人はアイルランド人，4人はウワルス人で彼等は又35才，45才，55才，65才のものが夫々4人づゝで，しかも同じ国で同じ年令の人は一人もいない。

又職についても法律家，兵隊，医者，牧師が夫々4人づついて且つ同じ

職業で同じ年令の人も又は同じ国の人も居ない。

又，独身者，既婚者，未亡人，離婚者が各人づつであつて且つ同じ婚姻状態で同じ職業，又は同じ年令，又は同じ国である人は居ない。

最後に保守主義者，自由主義者，社会主義者，ファシストが4人づつで且つ同じ主義者で，同じ婚姻の状態，或は同じ職業，或は同じ年令，或は同じ国の人がいない。

三人のファシストが，未婚，英国人，法律家，年令65才，，既婚，スコットランド人，兵隊，年令55才：未亡人イングランド人医者，年令45才である事が分れば，残りの人が何であるかを知る事は容易である。

更にイングランドの法律家が35才で，45才の保守主義者がスコットランド人。 55才の英国人が牧師であると云ふ事が与へられた時，ウワルスの法律家について何を知る事が出来るであらうか。

上に挙げた問題は $r=5$，$m=4$，の一般的グレコラテン方格である。

一般的ラテン方格に関聯して起る假説と検定は，我々がラテン方格や，グレコラテン方格に関聯して議論したそれの全くの拡張になつてゐる。

36. 直交ラテン方格系の構成

前に定義した如く，ラテン方格は，各行各列が同じ記号を重複しないやうに m ケの記号を方格に並べたものである。

二つのラテン方格が直交するとは，之の二つのラテン方格をそのまゝ組合せたとき，元素の対が全部異なるとき云ふ。

例へば

A	B	C		α	β	γ
B	C	A		γ	α	β
C	A	B		β	γ	α

は直交してゐる。 つまりその儘組合せると

Aα	Bβ	Cγ
Bγ	Cα	Aβ
Cβ	Aγ	Bα

なる並べ方となる。　直交しているラテン方格の対は勿論グレコラテン方格である。　あらゆる場合をつくした直交ラテン方格系を構成する方法はまだわかつてゐない。

しかし，これから述べる方法はすべての場合を盡す事は出來ないけれどもある特別な場合のラテン方格系を構成するために有用である。

そしてそれは計画に大きな価値を生ぜしめる。　それらの方法を理解するために，我々は整数論の基本的概念を用ひよう。

しばらくの間整数のみを取扱ひ，記号は整数を表はす事をいちいち断はらない事にする。

a，b，mを整数とし，$a-b$がmで割り切れるときaは法mに関してbと合同であると云ひ記号

$$a \equiv b \quad (m)$$

で表はす。　このやうな合同式は普通の等式の様にあつかふ事が出來る。

例へば

$$a \equiv b \quad (m)$$

なら

$$a \pm c \equiv b \pm c \quad (m)$$

$$ac \equiv bc \quad (m)$$

なる事は明らかであらう。　又

$$a \equiv b \quad (m)$$

$$c \equiv d \quad (m)$$

なら

$$ac \equiv bd \quad (m)$$

$$a \pm c \equiv b \pm d \quad (m)$$

となる。

証　明　　定義から

$$a-b=\lambda_1 m \qquad c-d=\lambda_2 m$$

$$a=b+\lambda_1 m \qquad c=d+\lambda_2 m$$

$$ac=bd+m(\lambda_2 b+\lambda_1 d+\lambda_1\lambda_2 m)$$

$$a\pm c=b\pm d+m(\lambda_1-\lambda_2)$$

故に $ac-bd$，及び $(a\pm c)-(b\pm d)$ は m で割り切れる。

更に a が m と互に素で

$$ab\equiv ac\ (m)$$

なら　$b\equiv c\ (m)$　が成立つ。

証　明・　假定により

$$a(b-c)=\lambda_1 m$$

よつてこの等式の左辺は m で割り切れる。

しかるに a と m は互ひに素であるから $b-c$ は m で割り切れねければならない。

これは普通の等式の場合の $a\neq 0$ が $a\not\equiv 0\ (m)$ に相当する事に注意すべきである。

すべての整数は法 m に関して $0,1,2,\cdots\cdots,m-1$ の何れかと合同である。何となれば a を任意の整数とするとき

$$0\leqq a-bm=j<m$$

を満足させる b,j が必らず一意的に存在するからである。

我々は法 m についての加法と減法と乗法を述べよう。

これは普通の加法，減法，乗法と同じである。ただ任意の整数を加て割った剰余で置きかえて良いことがすこし異なる。

例へば

$$2+4\equiv 1\quad(5)$$

$$2\times 4\equiv 3\quad(5)$$

今 p を素数とするとき、次の様に並べてみる。

$$\left.\begin{array}{llll}
0, & 1, & \cdots\cdots\cdots & p-1 \\
j & 1+j & \cdots\cdots\cdots & p-1+j \\
2j & 1+2j & \cdots\cdots\cdots & \\
\vdots & \vdots & & \\
(p-1)j & 1+(p-1)j & \cdots\cdots\cdots & p-1+(p-1)j
\end{array}\right\} = L_j \quad (0 < j \leqq p-1$$

こゝで，こゝにあらはれてくるすべての整数は，法 p に関して合同にとられたものとする。

即ち，この方格に於けるすべての整数は，p で割った，最小の正の剰余をあらはす事にする。

我々は L_j がラテン方格である事を示さう。

こゝで，行と列は夫々 $0, \cdots\cdots, p-1$ とかぞえる事でする。

今 k 行（$0 < k \leqq p-1$）がある整数を二つ含んでゐるとする。

しからば

$$a + kj \equiv b + kj \ (m) \quad で \quad a \not\equiv b \ (p)$$

これは矛盾である。

次に a − 列が同じ整数を二つ含んでゐるとする。

しからば

$$a + kj \equiv a + k'j \ (p) \quad で且つ \quad k \not\equiv k' \ (p)$$

これから

$$kj \equiv k'j \ (p)$$

しかるに j は勿論 p と互ひに素であるから

$$k \equiv k' \ (p)$$

これは矛盾である。

この様なラテン方格は j がとりうる値の数，即ち $p-1$ ヶ存在する。次に我々は $j \neq i$ ならば L_i と L_j は直交してゐる事を証明しよう。

もしもこれが眞でないと假定するならば，この L_i と L_j を合せた方格に於ける或る二つの異った桝の目に同じ整数の対があらはれたとする。

この二つの桝の目を夫々 α 行 β 列，γ 行 δ 列とし，整数の対を (m, n) とする。 m は α 行 β 列にも γ 行 δ 列にもあらはれるから

$$(\mathrm{i}).\quad \beta+\alpha j \equiv n \equiv \delta+\gamma j \quad (p)$$

同様に

$$(\mathrm{i}')\quad \beta+\alpha_i \equiv m \equiv \delta+\gamma_i \quad (p)$$

(i) から (i') を引けば

$$\alpha(j-i) \equiv \gamma(j-i) \qquad (p)$$

しかるに $j<p$, $i<p$ で $i \neq j$ であるから
$j-i \not\equiv 0 \quad (p)$ 故に

$$\alpha \equiv \gamma \ (p)$$

之を (i) に代入すれば

$$\beta \equiv \delta \ (p)$$

よつて二つの桝の目は同じでなければならない。
故に我々は次の定理を得る。

定理 1. p を素数とし，

$$L_j = \begin{array}{cccc} 0 & 1 & \cdots\cdots\cdots & p-1 \\ j & 1+j & \cdots\cdots\cdots & p-1+j \\ \vdots & \vdots & & \\ (p-1)j & 1+(p-1)j & \cdots\cdots\cdots & p-1+(p-1)j \end{array}$$

とおけば $L_1, L_2, \cdots\cdots L_{p-1}$ は $p-1$ ヶの直交ラテン方格系をなす。

例へば，次数5の直交ラテン方格系4つを書いてみる。

$$L_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 0 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad L_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad L_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 4 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$L_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

此処で素巾根なる概念を導入して議論をもつと簡単に扱ほう。

法 p の素巾根 a とは，p の或る剰余であつて，他の剰余がすべての p を法としてこれの巾乗であらはせるものをゆう。

例へば3は法7の素巾根である。

$$3^0 = 1\ (7) \qquad 3^1 \equiv 3\ (7) \qquad 3^2 \equiv 2\ (7)$$

$$3^3 \equiv 6\ (7) \qquad 3^4 \equiv 4\ (7) \qquad 3^5 \equiv 5\ (7)$$

次に任意の整数 $a\ (\not\equiv 0\ (p))$ に対して $a^{p-1} \equiv 1\ (p)$ が成立つ。

我々は之を a が素巾根である場合についてのみ之を証明しても一般性を失はない。

a を素巾根とし

$$a^{p-1} \equiv b \equiv a^q\ (p) \qquad q < p-1$$

とすれば

$$a^{p-1-q} \equiv a^{p'} \equiv 1\ (p) \qquad p' < p-1$$

よつて我々は多くとも $p-2$ だけしか剰余 $a^0, a^1, \cdots\cdots, a^{p-1}$ を得る事しか出来ないから a は素巾根ではない。

我々は

$$\overline{L}_i = \begin{array}{ccc} 0 & 1 & p-1 \\ a^{0+i} & 1+a^{0+i} & p-1+a^{0+i} \\ a^{1+i} & 1+a^{1+i} & p-1+a^{1+i} \\ \vdots & & \\ a^{p-2+i} & 1+a^{p-2+i} & p-1+a^{p-2+i} \end{array}$$

とおけば，定理1の場合と同様に $i \neq j$ なら $\overline{L}_i$ と $\overline{L}_j$ は直交する事を証明する事が出来る。

$k < p-1$ に対して，$\overline{L}_i$ の k 行は $\overline{L}_{i+1}$ の $(k-1)$-行に等しいそして $a^{p-1} \equiv 1\ (p)$ であるから $\overline{L}_{i+1}$ の最後の行は $\overline{L}_i$ の第2行に等しいよって $\overline{L}_{i+1}$ は $\overline{L}_i$ の二番以下の $p-2$ 行の循環置換によって得られる。 よって，一つだけラテン方格をきめれば後は適当な循環置換すれば得られる。

我々は之を次数 7 の場合の 6 つの直交ラテン方格系について示さう。

L_1

0	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	0
3	4	5	6	0	1	2
2	3	4	5	6	0	1
6	0	1	2	3	4	5
4	5	6	0	1	2	3
5	6	0	1	2	3	4

L_2

0	1	2	3	4	5	6
3	4	5	6	0	1	2
2	3	4	5	6	0	1
6	0	1	2	3	4	5
4	5	6	0	1	2	3
5	6	0	1	2	3	4
1	2	3	4	5	6	0

L_3

0	1	2	3	4	5	6
2	3	4	5	6	0	1
6	0	1	2	3	4	5
4	5	6	0	1	2	3
5	6	0	1	2	3	4
1	2	3	4	5	6	0
3	4	5	6	0	1	2

L_4	L_5	L_6
0 1 2 3 4 5 6	0 1 2 3 4 5 6	0 1 2 3 4 5 6
6 0 1 2 3 4 5	4 5 6 0 1 2 3	5 6 0 1 2 3 4
4 5 6 0 1 2 3	5 6 0 1 2 3 4	1 2 3 4 5 6 0
5 6 0 1 2 3 4	1 2 3 4 5 6 0	3 4 5 6 0 1 2
1 2 3 4 5 6 0	3 4 5 6 0 1 2	2 3 4 5 6 0 1
3 4 5 6 0 1 2	2 3 4 5 6 0 1	6 0 1 2 3 4 5
2 3 4 5 6 0 1	6 0 1 2 3 4 5	4 5 6 0 1 2 3

整数論によれば，任意の素数に対して素巾根が存在することが証明出来る。

もし p があまり大きな素数でないならば，試行によつて素巾根を求める事が出来る。　次に30迄の素数の素巾元の表を示して見る。

素数	素巾元
3	2
5	2
7	3
11	2
13	2
17	3
19	2
23	5
29	2

素巾根の任意の巾乗を計算するのに正直に之を実施する必要はない。即ち，掛算をしても合同は保存されるとゆう知識を用いて簡単に計算する事が出来る。

11次元ラテン方格を例にとれば

$$2^0 \equiv 1 \ (11) \qquad 2^1 \equiv 2 \ (11) \qquad 2^2 \equiv 4 \ (11) \qquad 2^3 \equiv 8 \ (11)$$

$$2^4 \equiv 5 \ (11) \qquad 2^5 \equiv 2 \cdot 5 \equiv 10 \ (11)$$

又　$11 \equiv -1 \ (11)$ であるから