The Test for Goodness of Fit and χ^2-test

C. Hayashi

χ^2-test has been ordinarily used to test the goodness of fit and the independence of factors. This is not satisfactory and not used correctly in some cases. In this paper the metric of deviation of sample distibution from the population distribution is considered,

that is to say, $S^2(\alpha) = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}\frac{(x_i - p_i)^2}{p_i^{2\alpha}}$ where k is the class number of the labels of population, p_i ($i = 1 \cdots\cdots k$) is the population distribution of them, x_i is the corresponding sample distribution of sample size.

The mean and the variance of $S^2(\alpha)$ are calculated to test the above mentioned.

Expecially in $\alpha = \frac{1}{2}$, $S^2(\alpha)$ is χ^2-metric. We had better choose α considering the real meaning in every case.

(3) 適合度の検定と χ^2 検定

林　知己夫

適合度の検定を行ふ場合通常 χ^2 検定が用ひられてゐる。
χ^2 検定は適合度の検定の変種のいろいろの検定（例へばよくつかはれる独立性の検定，要因が利くと言ふことの検定）に用ひられて効用のあるものであるが，此が用ひられるためにはサムプルの数が相当大でなくてはかなはぬのである。

通常１クラス中に含まれるサムプル数が１０以上なくてはならぬと言ふことが言はれてゐる。　それ以下の時は如何にするか。無相関検定が用ひられるであらふが此でも計算が面倒でどうにもならぬ場合がある。　我々は拱手傍観はしては居られぬのである。

さらに又，χ^2 検定は如何なる意味で適合度，独立性の検定で適当なるものであると言はれるのであらうか。

此等の問題について以下少しく考へてみることにしよう。

今母集団は調査対象に等しい抽出確率をあたへて構成されるものとしよう。

大さは N であり十分大であり $\dfrac{N-n}{N-1} \fallingdotseq 1$ と考へられるほどであると考へる．　但し n はサムプル数である．

此の標識は k 個あり　$A_1, A_2, \text{------}, A_k$　とする．
此をしめる母集団の比率は $p_1, p_2 \text{--------} p_k$ であるとする。
n 個のサンプルを抽出するとき A_i の標識にぞくするものを n_i 個得たとする。　$n = \sum_{i=1}^{k} n_i$　　$X_i = \dfrac{n_i}{n}$　としよう。

標　識　　　$A_1,\ A_2,\ \text{----------}\ A_k$

母集団比率　　　$p_1,\ p_2,\ \cdots\cdots\ p_k$

サムプル比率　　$X_1,\ X_2,\ \cdots\cdots\ X_k$

この時次の様な関係式が成立することはよく知られてゐる所である。

$$E(X_i) = p_i$$

$$E(X_i - p_i)^2 = \frac{p_i(1-p_i)}{n}$$

$$E(X_i - p_i)(X_j - p_j) = -\frac{p_i p_j}{n}$$

今　$X_i - p_i = Y_i$　とおく。

さらに　$\dfrac{Y_i}{p_i^{2\alpha}} = Z_i$　とおく。

Z_i は，サムプル比率の母集団比率からの相対差とも言ふべきものである。

$$S^2(\alpha) = \frac{1}{k}\Sigma Z_i^2$$

をつくるならば，此の $S^2(\alpha)$ は　サンプル比率の母集団比率からの隔りの一つの measure をあたへてゐるものである。　つまり母集団比率への適合度の一つの measure をあたへてゐるものであると言へるのである。

$S^2(\alpha)$ は，大さ n のランダム　サムプルによつて，しゆじゆの値をとりうるのであり $S^2(\alpha)$ の平均と，分散とは容易に計算できるのである。

此等を用ふるならば検査の方法は自づときまつてくるのである

此には前々の論文にくりかへしのべられてある高能率化されたシエブイシエフの定理が用ひられればよいのである。

即ち

| 母集団平均 ― サムプル平均 | < k・(母集団標準偏差) の確率は，一般に n がさう小でない時 $k = 3$ で十分 95% を

こへると考へてよいと言ふ定理である。

$S^2(\alpha)$ のモーメントを計算してみよう。

$$E\left(S^2_{(\alpha)}\right) = \frac{1}{k}\Sigma \frac{p_i(1-p_i)}{n p_i^{2\alpha}} = \tau^2$$

$$B = \sigma^2_{S^2_{(\alpha)}} = E\left(S^2 - \tau^2\right)^2$$

$$= \frac{1}{k^2}\left[\Sigma_i E\left(Z_i^2 - \frac{p_i(1-p_i)}{n p_i^{2\alpha}}\right)^2 + \sum_{i \neq j}\sum E\left(Z_i^2 - \frac{p_i(1-p_i)}{n p_i^{2\alpha}}\right)\left(Z_j^2 - \frac{p_j(1-p_j)}{n p_j^{2\alpha}}\right)\right]$$

第一項は

$$\frac{1}{p_i^{4\alpha}}\left(\frac{2p_i^2(1-p_i)^2}{n^2} + \frac{p_i(1-p_i)(1-6p_i(1-p_i))}{n^3}\right)$$

となる。

次に，第二項を考へるのであるが

$$E\left(X_i^2 X_j^2\right) = \frac{1}{n^4}\left(n(n-1)(n-2)(n-3)p_i^2 p_j^2\right.$$

$$+ n(n-1)(n-2)p_i^2 p_j$$

$$+ n(n-1)(n-2)p_i p_j^2$$

$$\left. + n(n-1)p_i p_j\right)$$

等々の

交錯の項を計算すれば求められる。

此から

$$B = \Sigma_i^k \frac{1}{p_i^{4\alpha}}\left(\frac{p_i(1-p_i)}{n^3} + \frac{2(n-3)}{n^3}p_i^2(1-p_i)^2\right)$$

$$+ \sum_{i \neq j}^{k}\sum \frac{1}{p_i^{2\alpha}p_j^{2\alpha}}\left(-\frac{p_i p_j}{n^3} + 2\frac{p_i^2 p_j}{n^3} + 2\frac{p_i p_j^2}{n^3} + \frac{2(n-3)}{n^3}p_i^2 p_j^2\right)$$

を得る。

此が分散となるのである。

αについて特殊化してゆかう。

$\alpha = 0$ ととる場合

此の場合は

$$Z_i = X_i - p_i = Y_i \quad \text{であるから}$$

$$S^2(0) = \frac{1}{k} \Sigma (X_i - p_i)^2 \quad \text{となる。}$$

つまり $S^2(0)$ 比率の母集団との単なる差の大さの程度をあらはしてゐるものになる。 この方法でゆくと母集団比率の大きさが大である所が大にものを言ふことになり，母集団比率の小さいところの事は論義から消し飛ばされて了ふおそれがある。

適合度と言ふことはこれでよいであらうか。 此は我々が如何なる立場によつて適合と言ふこと考へてゐるか、適合と言ふことをどう考へれば我々に有用な行動の規準をあたへられるかと言ふ問題にかゝつてゐるのであつて，抽象的にはまめられぬのである。

さてこの時の $S^2(0)$ の平均、分散をもとめてみると

$$E(S^2(0)) = \frac{1}{k} \Sigma \frac{p_i(1-p_i)}{n}$$

$$\sigma^2_{S^2(0)} = \frac{1}{k^2}\left[\frac{4(n-2)}{n^3}\sum_i p_i^2(1-p_i) - \frac{2(n-3)}{n^3}\left(\Sigma p_i^2 (\Sigma p_i(1-p_i))\right)\right]$$

となる。 n が大であるならば

$$\sigma^2_{S^2(0)} \doteqdot \frac{1}{(kn)^2}\left[\Sigma p_i^2 \left\{2(1-p_i) - \Sigma p_i(1-p_i)\right\}\right]$$

となる。

$\alpha = 1$ ととる場合

前の場合は単なる差であつたが今度は相対差の程度を問題にしてみることになる。

$$Z_i = \frac{X_i - p_i}{p_i} = Y_i$$

$$S^2_{(1)} = \frac{1}{k} \Sigma \left(\frac{X_i - p_i}{p_i} \right)^2 = \frac{1}{k} \Sigma Y_i^2$$

此の場合の隔りの measure は $S^2_{(1)}$ である。

今度の適合度は $\alpha = 0$ の場合と全く逆であつて母集団の比率の小さいところの差の程度が大たものを云ふことになるのである。

つまり，規準化された上での差丈を問題にして居ることになり，絶対的な大さが問題でなくなると言ふことになるのである，

つまり，母集団比率の小さい所が大たものを言ひ大きい所のことが消し飛んでしまふおそれがあるのである。 此の様な measure のつかはれるのも場合によるのである。

$$E\left(S^2_{(1)}\right) = \frac{1}{k} \Sigma \frac{p_i(1-p_i)}{n\, p_i^2}$$

$$\sigma^2_{S^2_{(1)}} = \frac{1}{k^2}\left[\frac{1}{n^3}\left\{\Sigma \frac{(1-p_i)}{p_i^3} - \sum_{i \neq j} \frac{1}{p_i p_j} + 4(k-1)\Sigma \frac{1}{p_i}\right\} + \frac{2(n-3)}{n^3}\left(k(k-1) + \sum_i \left(1 - \frac{1}{p_i}\right)^2\right)\right]$$

n が十分大の時

$$\sigma^2_{S^2_{(1)}} \doteqdot \frac{2}{(kn)^2}\left(k(k-1) + \Sigma\left(1 - \frac{1}{p_i}\right)^2\right)$$

となる。

$\alpha = \frac{1}{2}$ の場合

この場合は

$$Z_i = \frac{x_i - p_i}{\sqrt{p_i}}$$

$$S^2_{(\frac{1}{2})} = \Sigma \frac{(x_i - p_i)^2}{p_i} \qquad となる。$$

此の measure の意味は前項二つの場合の中間を行くものであつて折衷的意味をもつてゐるものである。

しかも此の場合が通常言ふところの χ^2 と関係のある量となつて居るのであり

$$S^2(\tfrac{1}{2}) \cdot kn = \chi^2$$

の関係式が成立するのである。 χ^2 ― 検定を適合度の measure として用ふると言ふことは上にのべた様な折衷的意味を実際的にもつてゐるものであることに注意しなければならない。

さてこの時

$$E\left(S^2_{(\frac{1}{2})}\right) = \frac{1}{k} \Sigma \frac{p_i(1-p_i)}{np_i} = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k} \frac{1-p_i}{n}$$

$$= \frac{k-1}{kn} \qquad となる。$$

$$\sigma^2_{S^2(\frac{1}{2})} = \frac{1}{k^2}\left(\frac{2(k-1)}{n^2} - \frac{1}{n^3}(k^2+2k-2) + \frac{1}{n^3}\Sigma\frac{1}{p_i}\right)$$

となるのである。 n が大となれば

$$\sigma^2_{S^2(\frac{1}{2})} \fallingdotseq \frac{1}{k^2}\frac{2(k-1)}{n^2}$$

となり χ^2 分布の分散となつてくるのである。 此の様な分散が用ひられるのは $\sigma^2_{S^2(\frac{1}{2})}$ の第二項以下の大さにかゝつてゐるのであつて

具体的問題に於ては k 及び p_i 及び n の値を入れて十分検討しなければならない所であらう。

翻つて考へてみるに適合度の検定に χ^2 分布 χ^2- measure のみを用ひる理由はどこにあるであらうか。 上にすでに述べた様に，χ^2 measure は絶対差と相対差の程度をあらはすものの中間をゆくものにすぎないのである。

$0<\alpha<1$ の α についてはすべて同様のことが言へるであらう。 χ^2 は適合度の measure と言ふ点から丈では全く任意的なものにすぎないのである。 唯この様な measure をとるとき恐ろしく分散の計算が簡単になると言ふ事は面白い所である。 この様な利点のために $\alpha=\frac{1}{2}$ ，n が大であれば χ^2- 検定が用ひられるのであらう。 しかし我々としては此の様な点からでなく適合度の内的意味（実さいに如何に結果を利用して意味ある行動が出きるかと言ふ事）を考へて其に相応しい measure をとるべきものであらうと思ふ。 こゝでは単にいろいろな相対差についての measure 丈を考へ此のランダム的な分布のうごきを規定する分散丈を計算しておいた。

又，こゝでのべた平均，分散をつかつてする検定にはクラスに属する n に制限のない事が便利であると言へるであらう。