⑯ Sequential decision Problem に於けるBayes solutionについて

秋田大学学芸学部
宮澤　光一

§1. 統計的判定函数

$X = \{X_i\}$, $(i = 1, 2, \cdots)$ を確率変数の列にして，X に対する観測値は，実数値の列 $x = \{x_i\}$, $(i = 1, 2, \cdots)$ で與へられる。こゝに x_i は X_i に対する観測値なり。

列 $x = \{x_i\}$ を Sample 或は Sample point といゝ，あらゆる可能な x の set を M とし，これを Sample space という。

各，確率変数 X_i は独立で，同一の分布函数 F をもち，且つその確率密度函数 $P(F \mid x_i)$ が存在するとす。

Ω をあらゆる可能な分布函数 F の Set とす。M に於て，$x_i < a_i$ $(i = 1, 2, \cdots)$ なる点 x の Set を含む最小の Borel 集合体を K とす。こゝに a_i は実数，或は $+\infty$ なり。K の上の Lebesque measure を m とす。

可能な分布函数 F は，K の Set B に対し probability measure $P(B \mid F)$ を與へる。

このとき確率密度函数を一般に $p(F|x)$ で表し，
$P(B|F)=\int_B p(F|x)\,dm$ と與へられる。

Hを Ω の subsetの與へられた Borel 集合体とす。

今後考へる Ω の Subset ω はすべてHに属するものとす。Ω の上の probability measure，即ちFの a priori distribution ξ はすべて(H)可測なものとし，かゝるξ の setを Q とす。

Sample xが得られたとき，X の分布函数 F が，Ωの特定の subset ω に含まれるとの假説 H_ωの何れをとるべきかを判定することが問題である。

即ち，Sample x に，何れの假説 H_ω を採用すべきかとの統計的判定を対応させることが問題である。

x に対応する統計的判定を $d(x)$ で表し，これを x の函数として，統計的判定函数（$s.d.f$）という。可能な統計的判定 d の集合を D^* とす。

F が X の眞の分布函数であるとき，判定 d を下すことによる損失を $W(F,d)$で表し，それは，$W(F,d)\geqq 0$にして，F,d に関し有界な函数とし，その上限を W_0 とす。

n 個の観測値を得るためのコストは，n にのみ depend するものとし，このコスト function を $C(n)$ で表す。

然らば，大きさ n の Sample $x_1,\cdots\cdots,x_n$ をとつた所で x の first n coordinates $x_1,\cdots\cdots,x_n$ にのみ depend する $s.d.f.$ $d_n(x)$ によって判定することによる損失は

$$r(F,d_n(x))=W(F,d_n(x))+C(n)$$

となる。

與へられた $s.d.f.$ $d(x)$に対し，$W(F,d(x))$は(A)可測とし，$p(F|x)$も亦然りとす。こゝにAは，Hの任意の要素及び K の任意の要素の直積なる，$\Omega\times M$ の Subset

から成る最小の Borel 集合体なり。

さて，Sequential decision function（seq. d. f）$\mathcal{D}$ は次の二つから構成される。

（i）互に素なMの Subsetの列；$S_0, S_1, \cdots\cdots, S_j, \cdots\cdots$
こゝに S_j は Sample x の first j coordinate $x_1, \cdots\cdots, x_j$ にのみ depend し，$x \in S_j$ のときは，第 j 番目の観測値を得た所で始めて Sampling を終ることを示すものである．そして任意のFに対し

$$\sum_{j=0}^{\infty} P(S_j | F) = 1$$

なるものとす。

こゝに S_0 は，一つも Sample をとらずに，直ちに或る判定を下すことを示し，その確率は0或は1なるものとす。この列 $S = \{S_j\}$ を Sequential procedure（S. p）という。

（ii）s. d. f. の列；$d_0, d_1(x), d_2(x), \cdots\cdots, d_j(x), \cdots$
こゝに，$d_j(x)$ は，x の first j coordinates $x_1, \cdots\cdots, x_j$ にのみ depend し，Sampling が $x_1, \cdots\cdots, x_j$ で終るとき，即ち $x \in S_j$ なるときとるべき統計的判定を指定する函数なり。

この（s. d. f）$d_j(x)$ の列 $D = \{d_j(x)\}$ をやはり判定函数（d. f）という。seq. d. f. $\mathcal{D}$は，この二つの列 S, D より定る。即ち

$$\mathcal{D} = (S, D)$$

然るとき，Fが真の分布なるとき，seq. d. f. $\mathcal{D}$ による平均損失は，

$$r(F, \mathcal{D}) = \sum_{j=0}^{\infty} \int_{S_j} r(F, d_j(x)) p(F|x) dm$$

であり，F のa priori distributionが ξ なるときは，$\mathcal{D}$ による平均損失は，

$$r(\xi, \mathcal{D}) = \int_{\Omega} r(F, \mathcal{D})\, d\xi$$

で與へられる。

［定義１］

first j coordinates $x_1, \cdots, x_j$ にのみ depend する decision function $d_j(x)$ 全部の set を D_j とす。$(j = 0, 1, 2, \cdots)$
但し，$j = 0$ のときは，d_j は或る decision を表し，従って $D_0 = D^*$ とす。
然るとき，D_j の要素の列 $\{d_{jn}\}$ 及び d_j^* であって

$$W(F, d_{jn}(x)) \to W(F, d_j^*(x))$$

がすべての $F \in \Omega$ 及び $x \in M$ に対して成立するとき

$$d_{jn} \longrightarrow d_j^*$$

と定義す。

［假定１］

D_j は上の Convergence の意味で Compact とす。
$(j = 0, 1, 2, \cdots)$.

［Lemma］１

任意の a priori distribution ξ 及び j に対し，s.d.f. $d_j^\circ(x)$ にして

$$r(\xi, d_j^\circ(x)) = \inf_{d_j} r(\xi, d_j(x)) \qquad \text{for all } x$$

即ち，任意の $d_j(x)$ に対し

$$r(\xi, d_j^\circ(x)) \leqq r(\xi, d_j(x)) \qquad \text{for all } x$$

なるものが存在す。

こゝに $d_j(x)$ は，x の first j coordinates $x_1, \cdots, x_j$ にのみ depend する。s.d.f. にして

$$r(\xi, d_j(x)) = \int_\Omega r(F, d_j(x))\, p(F|x)\, d\xi$$

（證　明）　$r(\xi, d_j) = \int_M r(\xi, d_j(x))\, dm$

$$r_j(\xi) = \inf_{d_j} r(\xi, d_j)$$

とおき，s.d.f. の列 $\{d_{jn}\}$ にして，

$$r(\xi, d_{jn}) \longrightarrow r_j(\xi)$$

なるものをえらむ。

而して，假定1により D_j は Compact なる故 $\{d_{jn}\}$ から convergent subsequence $\{d_{jn'}\}$ がとれ，その limit を $d_j^\circ \in D_j$ とす。即ち，

$$d_{jn'} \longrightarrow d_j^\circ \in D_j$$

然らば，D_j に於ける Convergence の定義から

$$r(F, d_{jn'}(x)) \longrightarrow r(F, d_j^\circ(x))$$

がすべての $F \in \Omega$ 及び $x \in M$ に対して成立す。

こゝで Lebesque の項別積分定理が適用出來て

$$r(F, d_{jn'}) = \int_M r(F, d_{jn'}(x))\, p(F|x)\, dm \rightarrow$$
$$r(F, d_j^\circ) = \int_M r(F, d_j^\circ(x))\, p(F|x)\, dm$$

從つて又

$$r(\xi, d_{jn'}) = \int_\Omega r(F, d_{jn'})\, d\xi \rightarrow r(\xi, d_j^\circ) = \int_\Omega r(F, d_j^\circ)\, d\xi$$

一方，$r(\xi, d_{jn}) \rightarrow r_j(\xi)$ なる故

$$r(\xi, d_{jn'}) \to r_j^{\circ}(\xi)$$

$$\therefore \quad r(\xi, d_j^{\circ}) = r_j(\xi)$$

今，任意の $d_j(x)$ 及び $\delta > 0$ に対し

$$S = \{ x ; r(\xi, d_j(x)) < r(\xi, d_j^{\circ}(x)) - \delta \}$$

とおく。然るとき，$m(S) = 0$ なことを示せば Lema 1 が証されたことになる。

そのため $d_{jn'}^{*}$ を次の如く定義す。

S の上では，　$d_{jn'}^{*} = d_j$

CS の上では，　$d_{jn'}^{*} = d_{jn'}$

然らば

$$r(\xi; d_{jn'}^{*}) = \int_M r(\xi, d_{jn'}^{*}(x))\, dm$$

$$< \int_S r(\xi, d_j^{\circ}(x))dm - \int_S \delta dm + \int_{CS} r(\xi, d_{jn'}(x))\, dm$$

而して Lebesgue により

$$\int_{CS} r(\xi, d_{jn'}(x))dm \to \int_{CS} r(\xi, d_j^{\circ}(x))dm$$

$\therefore \quad n' \to \infty$ のとき

$$右辺 \to \int_{S+CS} r(\xi, d_j^{\circ}(x))dm - \delta m(S) = r_j(\xi) - \delta m(S).$$

よって，$r_j(\xi)$ の定義から，$m(S) = 0$ なるべし．

$j = 0$ のときは，D^{*} が compact なことから

$$r_0(\xi) = \inf_d W(\xi, d) = W(\xi, d_0)$$

なる $d_0 \in D^*$ が存在することが容易に示される。q.e.d.

§ 2. The best truncated procedure.

N observations 以上を要求しない sequential procedure に於ける Bayes solution を求める。

今，x の first j coordinates $x_1, \cdots, x_j$ にのみ depend する函数 $\alpha_{jN}(\xi, x)$ を induction backward により次の如く定義す。

$$\alpha_{NN}(\xi, x) = r_N(\xi, x)$$

こゝに

$$r_j(\xi, x) = \inf_{d_j} r(\xi, d_j(x)) = r(\xi, d_j^{\circ}(x)), \quad j = 0, 1, 2, \cdots$$

$j < N$ に対しては

$$\alpha_{jN}(\xi, x) = \min(r_j(\xi, x), \mathcal{E}_j \alpha_{j+1,N}(\xi, x)).$$

こゝに $\mathcal{E}_j \alpha_{j+1,N}(\xi, x)$ は，$\alpha_{j+1,N}(\xi, x)$ を $x_1, \cdots, x_j$ を固定し、x_{j+1} について平均したものなり、即ち

$$\mathcal{E}_j \alpha_{j+1,N}(\xi, x) = \int_{-\infty}^{\infty} \alpha_{j+1,N}(\xi, x) dm(x_{j+1}).$$

然るとき，x の first j coordinates $x_1, \cdots, x_j$ にのみ depend する M の subset S_j^N を次の如く定義す。

$$S_j^N = \{ x ;\ r_i(\xi, x) > \alpha_{iN}(\xi, x),\ \text{for } i < j.\ \ r_j(\xi, x) = \alpha_{jN}(\xi, x) \}.$$

S_0^N は，$r_0(\xi) = \alpha_{0N}(\xi)$ のとき $P(S_0^N) = 1$.

$r_0(\xi) > \alpha_{0N}(\xi)$ のとき $P(S_0^N) = 0$,

なり。 然るとき，$S_0^N, S_1^N, \cdots, S_N^N$ は互に素で，且つ任意のFに対し

$$\sum_{j=0}^{N} P(S_j^N \mid F) = 1$$

なこと明かなり。 即ち $S_0^N, S_1^N, \cdots, S_N^N$ は N truncated procedure をなす。これを $S_\xi^N = \{S_j^N\}$ と書く。
然るとき，次の定理が成立す。

[定 理 1]

Mの任意の，互に素な subsets $B_0^N, B_1^N, \cdots, B_N^N$ (こゝに B_j^N は x の first j coordinates $x_1, \cdots, x_j$ にのみ depend す)にして，任意の F に対し

$$\sum_{j=0}^{N} P(B_j^N \mid F) = 1$$

なるもの，即ち任意の N truncated sequential procedure $T^N = \{B_j^N\}$ に対し，次が成立す。

$$\sum_{j=0}^{N} \int_{S_j^N} r_j(\xi, x)\,dm \leqq \sum_{i=0}^{N} \int_{B_i^N} r_i(\xi, x)\,dm.$$

これを證するため次の補助定理をあげる(参考文献 1)参照)

[Lemma 2]

i を固定し，A を任意の $(x_1 \cdots x_i)$ にのみ depend する x の set とすれば

(1) $$\sum_{j \geqq i} \int_{AS_j^N} \alpha_{jN}(\xi, x)\,dm = \sum_{j \geqq i} \int_{AS_j^N} \alpha_{iN}(\xi, x)\,dm$$

(證 明) $i = N$ に対しては明かに成立す。

$i < N$ に対しては

$$\sum_{j \geq i} \int_{AS_j^N} \alpha_{iN}(\xi, x)\, dm = \int_{AS_i^N} \alpha_{iN}(\xi, x)\, dm + \int_{A(S_{i+1}^N + \cdots + S_N^N)} \alpha_{iN}(\xi, x)\, dm$$

而して，$S_{i+1}^N + \cdots + S_N^N$ の上では，$r_i(\xi, x) > \alpha_{iN}(\xi, x)$，
即ち $\alpha_{iN}(\xi, x) = \varepsilon_i\, \alpha_{i+1,N}(\xi, x)$
又，$A(S_{i+1}^N + \cdots + S_N^N)$ は，$(x_1, \cdots, x_i)$ にのみ depend
する故

$$\int_{A(S_{i+1}^N + \cdots + S_N^N)} \varepsilon_i\, \alpha_{i+1,N}(\xi, x)\, dm = \int_{A(S_{i+1}^N + \cdots + S_N^N)} \alpha_{i+1,N}(\xi, x)\, dm$$

$$\therefore \sum_{j \geq i} \int_{AS_j^N} \alpha_{iN}(\xi, x)\, dm = \int_{AS_i^N} \alpha_{iN}(\xi, x)\, dm + \int_{A(S_{i+1}^N + \cdots + S_N^N)} \alpha_{i+1,N}(\xi, x)\, dm$$

$$= \int_{AS_i^N} \alpha_{iN}(\xi, x)\, dm + \sum_{j \geq i+1} \int_{AS_j^N} \alpha_{i+1,N}(\xi, x)\, dm$$

よって，もし

$$\sum_{j \geq i+1} \int_{AS_j^N} \alpha_{i+1}(\xi, x)\, dm \doteq \sum_{j \geq i+1} \int_{AS_j^N} \alpha_{jN}(\xi, x)\, dm$$

が成立すれば，上に代入して (1) が成立する。

よって，i に関する induction backwards により，Lemma が成立す。 q.e.d.

〔 Lemma 3 〕

j を固定し，$A_j, \cdots, A_N$ を任意の互に素な set で，A_i は $(x_1, \cdots, x_i)$ にのみ depend し，且つ $\sum_{i=j+1}^{N} A_i$ は，$(x_1, \cdots, x_j)$ にのみ depend するものとすれば

$$(2) \qquad \sum_{i>j} \int_{A_i} \alpha_{jN}(\xi, x)\,dm \leqq \sum_{i>j} \int_{A_i} \alpha_{iN}(\xi, x)\,dm.$$

（證　明）　$j = N-1$ に対して成立することは明かなり。
$j < N-1$ に対しては

$$\sum_{i>j} \int_{A_i} \alpha_{jN}(\xi, x)\,dm = \int_{A_{j+1}+\cdots+A_N} \alpha_{jN}(\xi, x)\,dm$$

而して　$\alpha_{jN}(\xi, x) \leqq \varepsilon_j\, \alpha_{j+1,N}(\xi, x)$　なる故

$$\leqq \int_{A_{j+1}+\cdots+A_N} \varepsilon_j\, \alpha_{j+1,N}(\xi, x)\,dm$$

而して假定から，$A_{j+1} + \cdots + A_N$ は，$x_1, \cdots, x_j$ にのみ depend する故

$$= \int_{A_{j+1}+\cdots+A_N} \alpha_{j+1,N}(\xi, x)\,dm = \int_{A_{j+1}} \alpha_{j+1,N}(\xi, x)\,dm + \sum_{i>j+1} \int_{A_i} \alpha_{j+1,N}(\xi, x)\,dm$$

よってもし

$$\sum_{i>j+1} \int_{A_i} \alpha_{j+1,N}(\xi, x)\,dm \leqq \sum_{i>j+1} \int_{A_i} \alpha_{iN}(\xi, x)\,dm$$

なら（2）が成立す．
よって j に関する induction backwards により Lemma が成立す．q.e.d.

（定理 1 の証明）

Lemma 2．で $A = B_i^N$ ととり，そして i について加えて次を得．

$$(3)\quad \sum_i \left\{ \sum_{j \geq i} \int_{B_i^N S_j^N} \alpha_{jN}(\xi, x)\,dm \right\} = \sum_i \left\{ \sum_{j \geq i} \int_{B_i^N S_j^N} \alpha_{iN}(\xi, x)\,dm \right\}$$

Lemma 3 で $A_i = B_i^N S_j^N$ ととり，そして j について加えて次を得

$$(4)\quad \sum_j \left\{ \sum_{i > j} \int_{B_i^N S_j^N} \alpha_{jN}(\xi, x)\,dm \right\} \leqq \sum_j \left\{ \sum_{i > j} \int_{B_i^N S_j^N} \alpha_{iN}(\xi, x)\,dm \right\}$$

（3）（4）を辺々加へて

$$(5)\quad \sum_{i,j=0}^{N} \int_{B_i^N S_j^N} \alpha_{jN}(\xi, x)\,dm \leqq \sum_{i,j=0}^{N} \int_{B_i^N S_j^N} \alpha_{iN}(\xi, x)\,dm$$

而して S_j^N の上では，$\alpha_{jN}(\xi, x) = r_j(\xi, x)$ なる故

$$左辺 = \sum_{j=0}^{N} \left\{ \sum_{i=0}^{N} \int_{B_i^N S_j^N} \alpha_{jN}(\xi, x)\,dm \right\} = \sum_{j=0}^{n} \int_{S_j^N} \alpha_{jN}(\xi, x)\,dm$$

$$= \sum_{j=0}^{N} \int_{S_j^N} r_j(\xi, x)\,dm$$

$$右辺 = \sum_{i=0}^{N} \left\{ \sum_{j=0}^{N} \int_{B_i^N S_j^N} \alpha_{iN}(\xi, x)\,dm \right\}$$

而して，$i < j$ なら，S_j^N の上では，$r_i(\xi, x) > \alpha_{iN}(\xi, x)$

$$\therefore \leqq \sum_{i=0}^{N} \left\{ \sum_{j=0}^{N} \int_{B_i^N S_j^N} r_i(\xi, x)\,dm \right\} = \sum_{i=0}^{N} \int_{B_i^N} r_i(\xi, x)\,dm$$

$$\therefore \sum_{j=0}^{N} \int_{S_j^N} r_j(\xi, x)\,dm \leqq \sum_{i=0}^{N} \int_{B_i^N} r_i(\xi, x)\,dm \quad q.e.d.$$

さて，任意の ξ に対し Lemma 1 で定る decision function の sequence $\{d_j^{\circ}\}$ $(j=0,1,\cdots,N)$ を D_N°，sequence $\{S_j^N\}$ $(j=0,1,\cdots,N)$ を S_ξ^N と表し，S_ξ^N，D_N° から定る truncated N なる seq. d.f. を $\mathcal{D}_\xi^N=(S_\xi^N, D_N^{\circ})$ と表す。

然るとき，他の任意の N. truncated seq. d.f. $\mathcal{D}^N=(B^N, D_N)$，

こゝに，$B^N=\{B_j^N\}$，$D_N=\{d_j\}$，$(j=0,1,\cdots,N)$ に対し

$$r(\xi, d_j^{\circ}(x))=\int_{\Omega} r(F, d_j^{\circ}(x))\,p(F|x)\,d\xi \leqq r(\xi, d_j(x))=\int_{\Omega} r(F, d_j(x))\,p(F|x)\,d\xi$$

がすべての x に対して成立する故

$$\int_{B_j^N} r(\xi, d_j^{\circ}(x))\,dm \leqq \int_{B_j^N} r(\xi, d_j(x))\,dm.$$

$$\therefore\ r(\xi; B^N, D_N^{\circ})=\sum_{j=0}^{N}\int_{B_j^N} r(\xi, d_j^{\circ}(x))\,dm \leqq r(\xi; B^N, D_N)=\sum_{j=0}^{N}\int_{B_j^N} r(\xi, d_j(x))\,dm$$

然るに定理 1 から

$$r(\xi; S_\xi^N, D_N^{\circ}) \leqq r(\xi; B^N, D_N^{\circ})$$

$$\therefore\ r(\xi, \mathcal{D}_\xi^N) \leqq r(\xi; \mathcal{D}^N)$$

よつて次の定理を得，

〔定理 2〕

N で truncate する sequential procedure に於て，任意の a priari distribution ξ に対し，Bayes solution が存在し，それは $\mathcal{D}_\xi^N = (S_\xi^N, D_N^\circ)$ で與へられる。即ち

$$r(\xi, \mathcal{D}_\xi^N) \leqq r(\xi, \mathcal{D}^N) \quad \text{for all } \mathcal{D}^N.$$

或は，

$$r(\xi, \mathcal{D}_\xi^N) = \inf_{\mathcal{D}^N} r(\xi, \mathcal{D}^N)$$

$(= \rho_N(\xi)$ とおく$)$

§ 3. The best sequential procedure

〔定義 2〕

Ω の任意の二つの要素 F_1，F_2 に対し，その間の距離を

$$\delta(F_1, F_2) = \sup_{B \in K} \left| P(B|F_1) - P(B|F_2) \right|$$

と定義す。

〔假定 2〕

Ω は上の metric に関し compact とす。

$W(F, d_j(x))$ は $\Omega \times M$ で一様連続とし，$p(F|x)$ は F に関し連続とす，$(j = 1, 2, \cdots)$

これを假定すれば，$x_1, \cdots, x_j$ にのみ depend する (K) 可測な任意の set S_j に対し

$$\int_{S_j} r(F, d_j(x)) \, p(F|x) \, dm$$

は，F に関し連続になる。

それは，任意の $\varepsilon > 0$ に対し，假定2から，x の如何にかゝわらず $\delta(F_1, F_2) < \delta$ なら

$$|r(F_1, d_j(x)) - r(F_2, d_j(x))| < \varepsilon$$

なる如き $\delta > 0$ が存在す。よってこのとき

$$\left| \int_{S_j} \{ r(F_1, d_j(x)) p(F_1|x) - r(F_2, d_j(x)) p(F_2|x) \} dm \right|$$

$$= \left| \int_{S_j} \{ r(F_1, d_j(x)) p(F_1|x) - r(F_2, d_j(x)) p(F_1|x) \} dm \right|$$

$$+ \left| \int_{S_j} \{ r(F_2, d_j(x)) p(F_1|x) - r(F_2, d_j(x)) p(F_2|x) \} dm \right|$$

$$\leqq \int_{S_j} \varepsilon . p(F_1|x) dm + \left| \int_{S_j} (W_0 + C(j))(p(F_1|x) - p(F_2|x)) dm \right|$$

$$= \varepsilon . P(S_j|F_1) + (W_0 + c(j)) . |P(S_j|F_1) - P(S_j|F_2)|$$

$$\leqq \varepsilon . 1 + (W_0 + c(j)) . \delta$$

而して，ε，δ は，任意に小さくとっておけるからなり。

［假 定 3］

cost function $c(j)$ は，j の単調増加函数で，$j \to \infty$ のとき $c(j) \to \infty$ になるものとし，任意の sequential procedure $\{S_j\}$ 及び任意の d.f $\{d_j\}$ から成る seq. d.f. $\mathfrak{D} = (\{S_j\}, \{d_j\})$ に対し，

$$r(F, \mathfrak{D}) = \sum_{j=0}^{\infty} \int_{S_j} r(F, d_j(x)) p(F|x) dm$$

の右辺は，F に関し一様に収斂するものとす。

これを假定すれば $\int_{S_j} r(F, d_j(x)) p(F|x) dm$ の連続性とか

ら，$r(F,\mathfrak{D})$が F に関して連続となる．且つ

$$(6)\qquad r(\xi;\{S_j\},\{d_j\})=\int_{\Omega} r(F;\{S_j\},\{d_j\})d\xi$$

$$=\sum_{j=0}^{\infty}\int_{\Omega}\int_{S_j} r(F,d_j(x))p(F|x)dm\,d\xi$$

$$=\sum_{j=0}^{\infty}\int_{S_j}\int_{\Omega} r(F,d_j(x))p(F|x)d\xi\,dm$$

さて，前に定義した函数 $\alpha_{jN}(\xi,x)$ について，j を固定すれば，$\alpha_{jN}(\xi,x)$ は，N と共に単調減小なることが容易に知られ，且つ $\alpha_{jN}(\xi,x)\geqq 0$ なる故 $\lim_{N\to\infty}\alpha_{jN}(\xi,x)$ が存在す。

これを $\alpha_j(\xi,x)$ と書く，即ち

$$\alpha_j(\xi,x)=\lim_{N\to\infty}\alpha_{jN}(\xi,x)$$

然るとき

$$\alpha_j(\xi,x)=\min(r_j(\xi,x),\varepsilon_j\alpha_{j+1}(\xi,x))$$

なり．この $\alpha_j(\xi,x)$ を用いて，M の subset S_j° を次の如く define す．

$$S_j^\circ=\{x\,;\,r_i(\xi,x)>\alpha_i(\xi,x)\ \text{for}\ i<j,$$

且つ $r_j(\xi,x)=\alpha_j(\xi,x)\}$

そして，列 $\{S_j^\circ\}$ から成る s.p. を S_ξ，列 $\{d_j^\circ\}$ からなる d.f. を D° とし，S_ξ，D° から定る seq. d.f を $\mathfrak{D}_\xi$ とす。即ち

$$\mathfrak{D}_\xi=(S_\xi,D^\circ)$$

然るとき次の定理が成立す。

〔定理 3〕

任意の a priori distribution ξ に対する Bayes Solution が存在し，

$$seq.\ d.f.\quad \mathcal{D}=(T, D),\ T=\{B_j\},\ D=\{d_j\}$$

が Bayes solution なるための必要十分の條件は，

i) B_j 上で measure 0 の set を除いて $d_j = d_j^\circ$，$(j=0, 1, 2, \cdots)$，なること，

ii) Measure 0 の set を除いて

$$B_1 \subset S_1,\ B_2 \subset S_1+S_2,\ B_3 \subset S_1+S_2+S_3, \cdots, B_i \subset \sum_{j=1}^{i} S_j, \cdots$$

なること，これを詳しく書けば

$$B_i \frown S_i = D_i,\quad S_i - D_i = S_i',$$

$$S_k' \frown B_\ell = B_\ell^k,\ (\ell = k+1, k+2, \cdots;\ k=1, 2, \cdots)$$

とおけば次の如くなっていることとなり，

$$S_1 = D_1 + S_1' \qquad B_1 = D_1$$

$$S_2 = D_2 + S_2' \qquad B_2 = D_2 + B_2'$$

$$S_3 = D_3 + S_3' \qquad B_3 = D_3 + B_3' + B_3^2$$

$$\vdots \qquad B_4 = D_4 + B_4' + B_4^2 + B_4^3$$

$$\vdots$$

にして，
$$S_1' = B_2' + B_3' + B_4' + \cdots\cdots$$

$$S_2' = B_3^2 + B_4^2 + B_5^2 + \cdots\cdots$$

$$S_3' = B_4^3 + B_5^3 + B_6^3 + \cdots\cdots$$

$$\vdots$$

iii) 或る k に対して，$m(S_k') > 0$ なるものありとせば，measure 0 の set を除いて次が成立すること

S_k' に関する B_{k+1}^k の complement $C B_{k+1}^\ell$ の上では

$$r_{k+1} = \varepsilon_{k+1} r_{k+2}$$

S_k' に関する $(B_{k+1}^k + B_{k+2}^k)$ の Complement $C(B_{k+1}^k + B_{k+2}^k)$ の上では $r_{k+2} = \varepsilon_{k+2} r_{k+3}$

こゝに $\mathcal{E}_l r_{l+1}$ は r_{l+1} で first l coordinates $x_1, \cdots\cdots, x_l$ を固定して，x_{l+1} について平均したものを表す。即ち

$$\mathcal{E}_l r_{l+1} = \int_{-\infty}^{\infty} r_{l+1} \, dx_{l+1}$$

（証　明）

先づ，$D_\xi = (\{S_j\}; \{d_j^\circ\})$ が Bayes solution なことを示さん。

$\mathfrak{D} = (T, D)$，$T = \{B_j\}$，$D = \{d_j\}$ を任意の seq. d. f. とすれば

Lemma 1．から

$$r(\xi, d_j^\circ(x)) \leqq r(\xi, d_j(x)) \quad \text{for all } x$$

なる故

$$\int_{B_j} r(\xi, d_j^\circ(x)) dm \leqq \int_{B_j} r(\xi, d_j(x)) dm$$

$$(j = 0, 1, 2, \cdots\cdots)$$

よって（6）が成立することから

$$r(\xi ; T, D^\circ) \leqq r(\xi ; T, D)$$

故に，$r(\xi ; S_\xi, D^\circ) \leqq r(\xi ; T, D^\circ)$ なことを証せば十分である。さて，

$$\sum_{i=N+1}^{\infty} \int_{B_i} r_i(\xi, x) dm = \sum_{i=N+1}^{\infty} \int_{B_i} \int_{\Omega} r(F, d_i(x)) p(F|x) d\xi dm$$

$$\geqq \sum_{i=N+1}^{\infty} \int_{B_i} \int_{\Omega} c(N) p(F|x) d\xi dm = \int_{\sum_{i>N} B_i} \int_{\Omega} c(N) p(F|x) d\xi dm$$

$$= \int_{\sum_{i>N} B_i} \int_{\Omega} \{ r(F, d_N^o(x)) - W(F, d_N^o(x)) \} p(F|x) d\xi dm$$

$$\geqq \int_{\sum_{i>N} B_i} r_N(\xi, x) dm - W_0 \int_{\Omega} \int_{\sum_{i>N} B_i} p(F|x) dm d\xi$$

$$\therefore \int_{\sum_{i>N} B_i} r_N(\xi, x) dm \leqq \sum_{i=N+1}^{\infty} \int_{B_i} r_i(\xi, x) dm + W_0 \int_{\Omega} \sum_{i>N} P(B_i|F) d\xi$$

この両辺に, $\sum_{i=0}^{N} \int_{B_i} r_i(\xi, x) dm$ を加へると.

$$\sum_{i=0}^{N-1} \int_{B_i} r_i(\xi, x) dm + \int_{B_N} r_N(\xi, x) dm + \int_{\sum_{i>N} B_i} r_N(\xi, x) dm$$

$$\leqq \sum_{i=0}^{\infty} \int_{B_i} r_i(\xi, x) dm + W_0 \int_{\Omega} \sum_{i>N} P(B_i|F) d\xi$$

この左辺は, truncated N procedure $T^N = \{B_0, B_1, \cdots, B_{N-1}, B_N + B_{N+1} \cdots$ による損失なり, 即ち

(7) $\quad r(\xi; T^N, D^o) \leqq r(\xi; T, D^o) + W_0 \int_{\Omega} \sum_{i>N} P(B_i|F) d\xi$

然るに,

$$\int_{\Omega} \sum_{0}^{\infty} P(B_i|F) d\xi = \sum_{i=0}^{\infty} \int_{\Omega} P(B_i|F) d\xi = 1$$

なる故, N を十分大にとれば

$$\int_{\Omega} \sum_{i>N} P(B_i|F) d\xi = \sum_{i>N} \int_{\Omega} P(B_i|F) d\xi$$ を何程でも

0 に近づけることが出来る. 即ち, 任意の $\varepsilon > 0$ に対し,

N_1 を十分大にとれば　$N > N_1$ のとき

(8)　$r(\xi ; T^N, D^\circ) \leqq r(\xi ; T, D^\circ) + \varepsilon$.

而して定理2により

$$r(\xi ; S_\xi^N, D^\circ) = \sum_{j=0}^{N} \int_{S_j^N} r_j(\xi, x)\,dm \leqq r(\xi ; T^N, D^\circ)$$

故に，任意の正整数 k に対し

(9)　$\sum_{j=0}^{k} \int_{S_j^N} r_j(\xi, x)\,dm \leqq r(\xi ; S_\xi^N, D^\circ) \leqq r(\xi ; T^N, D^\circ) \leqq r(\xi ; T, D^\circ) + \varepsilon$

さて，N を十分大ならしめれば，d_{jN} は何程でも d_j に近づき，従つて，c.f.(S_j^N) は何程でも c.f.(S_j) に近づけることが出来る。$(j = 0, 1, \cdots\cdots, k)$

(10)　$\sum_{j=0}^{k} \int_{S_j^N} r_j(\xi, x)\,dm \to \sum_{j=0}^{k} \int_{S_j} r_j(\xi, x)\,dm$

故に任意の k に対し，(9), (10) より

$$\sum_{j=0}^{k} \int_{S_j} r_j(\xi, x)\,dm \leqq r(\xi ; T, D^\circ) + \varepsilon$$

即ち

$$r(\xi ; S_\xi, D^\circ) \leqq r(\xi ; T, D^\circ)$$

よつて，$\mathcal{D}_\xi = (S_\xi, D^\circ)$ は，ξ に関する Bayes solution なり。或は

$$\rho(\xi) = \inf_{\mathcal{D}} r(\xi ; \mathcal{D})$$

とおけば，　$r(\xi ; \mathcal{D}_\xi) = \rho(\xi)$

尚，$S_\rho = \{S_j\}$ が実際に，s.p. なこと，即ち任意の F に対し

$$\sum_{j=0}^{\infty} P(S_j | F) = 1$$

なことを証せん。そのために

$$A_N = C(S_0 + S_1 + \cdots + S_N), \quad \prod_{N=1}^{\infty} A_N = A$$

とおき，$P(A | F) = 0$ なことを示せばよい。

而して，任意の $j \leqq N$ に対し，

$$\alpha_{jN} \geqq c(j) \int_{\Omega} p(F | x) d\xi = c(j) p(\xi | x)$$

なこと明かなり。

そこで Lemma 2 で，$i = 0$，$A =$ Sample space をとれば

$$\text{左辺} = \sum_{j=0}^{N} \int_{S_j^N} \alpha_{0N} p(\xi | x) dm = \alpha_{0N} \int_{\Omega} \sum_{j=0}^{N} \int_{S_j^N} p(F | x) dm d\xi = \alpha_{0N}$$

$$\text{右辺} = \sum_{j=0}^{N} \int_{S_j^N} \alpha_{jN} dm \geqq \sum_{j=k+1}^{N} \int_{S_j^N} \alpha_{jN} dm \geqq \sum_{j=k+1}^{N} \int_{S_j^N} c(k) p(\xi | x) dm$$

$$= \int_{\Omega} \sum_{j=k+1}^{N} \int_{S_j^N} c(k) p(F | x) dm d\xi = c(k) \int_{\Omega} P\{c(S_0^N + \cdots + S_k^N) | F\} d\xi$$

for all $k < N$

$$\therefore \quad \alpha_{0N} \geqq c(k) \int_{\Omega} P\{c(S_0^N + \cdots + S_k^N) | F\} d\xi \quad \text{for all } k < N$$

$\therefore$ $N \to \infty$ ならしめれば

$$\alpha_0 \geqq c(k) \int_{\Omega} P(A | F) d\xi$$

が任意の k に対して成立す。

而して，$k \to \infty$ のとき，$c(k) \to \infty$ なる故

$$\int_{\Omega} \mathrm{P}(A|F)\,d\xi = 0 \qquad \therefore \quad \mathrm{P}(A|F) = 0$$

よって，$S_\xi = \{S_j\}$ は確かに s.p. なり，

即ち，$\mathcal{D}_\xi = (S_\xi, D')$ は，ξ に関する Bayes solution なり。

次に，定理の條件が必要なことを示さん．

今，$\mathcal{D} = (T, D)$，$T = \{B_j\}$，$D = \{d_j\}$ が ξ に関する Bayes solution なりとす。然るとき

① B_j の上で measure 0 の set を除いて

$$d_j(x) = d_j^{\circ}(x) \qquad (j = 0, 1, 2, \cdots\cdots)$$

なことを示さん。そのために次を假定す。

［假定 4］

$$r(\xi, d_j(x)) = \int_{\Omega} r(F, d_j(x))\,p(F|x)\,d\xi$$

が $d_j = d_j^{\circ}$ 及び $d_j = d_j^{+}$ のとき，d_j に関する最小値をとるなら

$$d_j^{\circ}(x) = d_j^{+}(x)$$

然らば，B_j の上で $r(\xi, d_j(x)) = r(\xi, d_j^{\circ}(x))$ が成立することを証せば，假定4により，B_j の上で

$$d_j(x) = d_j^{\circ}(x)$$

となる。その意味で $D = D^{\circ}$ となる。

さて一般に，Lemma 1 より

$$r(\xi, d_j(x)) \geqq r(\xi, d_j^{\circ}(x))$$

が成立するのであるが，

$$R_j = \{ x ; \ x \in B_j, \text{且つ} \ r(\xi, d_j(x)) > r(\xi, d_j^{\circ}(x)) \}$$

とおくとき，　$m(R_j) > 0$　なりとす。然らば

$\delta > 0$，　$R_j' \leqq R_j$，　$m(R_j') > 0$　にして，　$x \in R_j'$　なら

$$r(\xi, d_j(x)) > r(\xi, d_j^{\circ}(x)) + \delta$$

なるものあり，これより

$$r(\xi ; B_j, d_j) = \int_{B_j}\int_{\Omega} r(F, d_j(x)) p(F \mid x) d\xi dm = \int_{B_j} r(\xi, d_j(x)) dm$$

$$\geqq \int_{R_j'} r(\xi, d_j^{\circ}(x)) dm + \delta \int_{R_j'} dm + \int_{CR_j'} r(\xi, d_j^{\circ}(x)) dm$$

$$= \int_{B_j} r(\xi, d_j^{\circ}(x)) dm + \delta m(R_j') > r(\xi ; B_j, d_j^{\circ})$$

又一般に，　$r(\xi ; B_i, d_i) \geqq r(\xi ; B_i, d_i^{\circ})$

$$\therefore \quad r(\xi ; T, D) = \Sigma r(\xi ; B_j, d_j) > \Sigma r(\xi ; B_j, d_j^{\circ})$$

$$= r(\xi ; T, D^{\circ})$$

これ，$seq.\ d.f.$　$\mathcal{D} = (T, D)$　が ξ　に関する Bayes solution なりとの假定に反す。

$\therefore$　B_j の上で measure 0　の set を除いて

$$r(\xi, d_j(x)) = r(\xi, d_j^{\circ}(x))$$

よって假定4により

$$d_j(x) = d_j^{\circ}(x) \qquad (j = 0, 1, 2, \cdots\cdots)$$

即ち，　i) が必要なり。

(ii) 次に ii) が必要なことを示さん，そのため，

$$(B_i - D_i) \frown C [S_1 + \cdots + S_i] = B_i'$$

$$(B_i - D_i) \frown (S_1 + \cdots + S_i) = B_i''$$

とおけば，　$B_i = D_i + B_i' + B_i''$

にして，　$m (B_i') = 0$ ，$(i = 1, 2, \cdots)$　でなければならぬことを云えばよい。

今，$m (B_\ell') > 0$ なる B_ℓ があるとし，

$$B_\ell' \frown S_i = S_i^\ell \qquad (i = \ell+1, \ell+2, \cdots)$$

とおく．

$x \in B_\ell'$ に対しては

$$r_0 > \alpha_0 , \ r_1 > \alpha_1 , \cdots , \ r_\ell > \alpha_\ell , \quad \therefore \ \alpha_\ell = \varepsilon_\ell \alpha_{\ell+1}$$

$x \in S_{\ell+1}^\ell$ なら $r_0 > \alpha_0 , \cdots , r_\ell > \alpha_\ell , \ r_{\ell+1} = \alpha_{\ell+1} , \ \therefore \alpha_\ell = \varepsilon_\ell \alpha_{\ell+1}$

$x \in S_{\ell+2}^\ell$ なら $r_0 > \alpha_0 , \cdots , r_{\ell+1} > \alpha_{\ell+1} , \ \therefore \alpha_{\ell+1} = \varepsilon_{\ell+1} \alpha_{\ell+2} , \ r_{\ell+2} = \alpha_{\ell+2}$

$x \in S_{\ell+3}^\ell$ なら $r_0 > \alpha_0 , \cdots , r_{\ell+2} > \alpha_{\ell+2} , \ \therefore \alpha_{\ell+2} = \varepsilon_{\ell+2} \alpha_{\ell+3} , \ r_{\ell+3} = \alpha_{\ell+3}$

$\vdots$

今，S_i^ℓ と，$x_1 = \mathrm{Const.} , \cdots , x_\ell = \mathrm{const.}$ から定る部分空間との交りを $S_i^\ell (1, 2, \cdots , \ell)$ と表し，$S_i^\ell (1, 2, \cdots , \ell)$ の $x_1 = \mathrm{const.} , \cdots , x_\ell = \mathrm{const.}$ なる部分空間に対する補集合を $CS_i^\ell (1, 2, \cdots , \ell)$ と表す，等々とす，然らば

$x \in B_\ell'$ なら

$$r_\ell > \alpha_\ell = \varepsilon_\ell \alpha_{\ell+1} = \int_{-\infty}^{\infty} \alpha_{\ell+1} dx_{\ell+1} = \int_{S_{\ell+1}^\ell (12 \cdots \ell)} \alpha_{\ell+1} dx_{\ell+1} + \int_{CS_{\ell+1}^\ell (12 \cdots \ell)} \alpha_{\ell+1} dx_{\ell+1}$$

$$= \int_{S_{\ell+1}^\ell (12 \cdots \ell)} r_{\ell+1} dx_{\ell+1} + \int_{CS_{\ell+1}^\ell (12 \cdots \ell)} \alpha_{\ell+1} dx_{\ell+1}$$

而して、 $CS^{\ell}_{\ell+1}(12\cdots\ell)$ の上では、 $r_{\ell+1} > \alpha_{\ell+1} = \varepsilon_{\ell+1}\alpha_{\ell+2}$ なる故

$$\int_{CS^{\ell}_{\ell+1}(12\cdots\ell)} \alpha_{\ell+1}\,dx_{\ell+1} = \int_{CS^{\ell}_{\ell+1}(12\cdots\ell)} \int_{-\infty}^{\infty} \alpha_{\ell+2}\,dx_{\ell+2}\,dx_{\ell+1}$$

$$= \int_{S^{\ell}_{\ell+2}(12\cdots\ell)} \int_{-\infty}^{\infty} \alpha_{\ell+2}\,dx_{\ell+2}\,dx_{\ell+1} + \int_{C[S^{\ell}_{\ell+1}(12\cdots\ell)+S^{\ell}_{\ell+2}(12\cdots\ell)]} \int_{-\infty}^{\infty} \alpha_{\ell+2}\,dx_{\ell+2}\,dx_{\ell+1}$$

$$= \int_{S^{\ell}_{\ell+2}(12,\cdots,\ell)} \int_{S^{\ell}_{\ell+2}(12\cdots\ell,\ell+1)} \alpha_{\ell+2}\,dx_{\ell+2}\,dx_{\ell+1} + \int_{S^{\ell}_{\ell+2}(12\cdots\ell)} \int_{CS^{\ell}_{\ell+2}(12\cdots\ell,\ell+1)} \alpha_{\ell+2}\,dx_{\ell+2}\,dx_{\ell+1}$$

$$+ \int_{C[S^{\ell}_{\ell+1}(12\cdots\ell)+S^{\ell}_{\ell+2}(12\cdots\ell)]} \int_{-\infty}^{\infty} \alpha_{\ell+2}\,dx_{\ell+2}\,dx_{\ell+1}$$

$$= \int_{S^{\ell}_{\ell+2}(12\cdots\ell)} \int_{S^{\ell}_{\ell+2}(12\cdots\ell+1)} r_{\ell+2}\,dx_{\ell+2}\,dx_{\ell+1} + \int_{C[S^{\ell}_{\ell+1}(12\cdots\ell)+S^{\ell}_{\ell+2}(12\cdots\ell)]} \alpha_{\ell+2}\,dx_{\ell+2}\,dx_{\ell+1}$$

$$= \int_{S^{\ell}_{\ell+2}(12\cdots\ell)} r_{\ell+2}\,dx_{\ell+2}\,dx_{\ell+1} + \int_{C[S^{\ell}_{\ell+1}(12\cdots\ell)+S^{\ell}_{\ell+2}(12\cdots\ell)]} \alpha_{\ell+2}\,dx_{\ell+2}\,dx_{\ell+1}$$

上と同様にして進めば

$$\int_{C[S^{\ell}_{\ell+1}(12\cdots\ell)+S^{\ell}_{\ell+2}(12\cdots\ell)]} \alpha_{\ell+2}\,dx_{\ell+2}\,dx_{\ell+1} = \int_{S^{\ell}_{\ell+3}(12\cdots\ell)} r_{\ell+3}\,dx_{\ell+3}\,dx_{\ell+2}\,dx_{\ell+1}$$

$$+ \int_{C[S^{\ell}_{\ell+1}(12\cdots\ell)+S^{\ell}_{\ell+2}(12\cdots\ell)+S^{\ell}_{\ell+3}(12\cdots\ell)]} \alpha_{\ell+3}\,dx_{\ell+3}\,dx_{\ell+2}\,dx_{\ell+1}$$

かくして進めば $x \in B'_{\ell}$ なるとき

$$r_\ell > \alpha_\ell = \int_{S_{\ell+1}^{\ell}(12\cdots\ell)} r_{\ell+1}\,dx_{\ell+1} + \int_{S_{\ell+2}^{\ell}(12\cdots\ell)} r_{\ell+2}\,dx_{\ell+2}\,dx_{\ell+1}$$

$$+ \int_{S_{\ell+3}^{\ell}(12\cdots\ell)} r_{\ell+3}\,dx_{\ell+3}\,dx_{\ell+2}\,dx_{\ell+1} + \cdots\cdots$$

よって，$m(B_\ell') > 0$ なら

$$\int_{B_\ell'} r_\ell\,dm > \int_{B_\ell'} \alpha_\ell\,dm = \int_{S_{\ell+1}^{\ell}} r_{\ell+1}\,dm + \int_{S_{\ell+2}^{\ell}} r_{\ell+2}\,dm + \int_{S_{\ell+3}^{\ell}} r_{\ell+3}\,dm + \cdots\cdots$$

$$\therefore\quad C_\ell = D_\ell + B_\ell'',$$

$$C_{\ell+1} = B_{\ell+1} + S_{\ell+1}^{\ell},\quad C_{\ell+2} = B_{\ell+2} + S_{\ell+2}^{\ell},\quad C_{\ell+3} = B_{\ell+3} + S_{\ell+3}^{\ell}, \cdots$$

とおけば，$C_{\ell+i}$，$C_{\ell+k}$ $(i \neq k)$ は互に素で且つ

$$B_0 + B_0 + \cdots\cdots + B_{\ell-1} + C_\ell + C_{\ell+1} + C_{\ell+2} + C_{\ell+3} + \cdots\cdots$$

$$= B_0 + B_1 + \cdots\cdots + B_{\ell-1} + (C_\ell + S_{\ell+1}^{\ell} + S_{\ell+2}^{\ell} + \cdots) + B_{\ell+1} + B_{\ell+2} + \cdots$$

$$= B_0 + B_1 + \cdots\cdots + B_{\ell-1} + B_\ell + B_{\ell+1} + B_{\ell+2} + \cdots\cdots$$

$$\therefore\quad P\{B_0 + B_1 + \cdots + B_{\ell-1} + C_\ell + C_{\ell+1} + C_{\ell+2} + \cdots \mid F\} = P\{B_0 + B_1 + \cdots + B_\ell + \cdots \mid F\} = 1$$

$$\therefore\qquad T^{*} = \{B_0, B_1, \cdots, B_{\ell-1}, C_\ell, C_{\ell+1}, C_{\ell+2}, \cdots\}$$

は一つの s.p. なり，且つ，

$$r(\xi; T^{*}, D^{0}) = r_0 P(B_0) + \int_{B_1} r_1\,dm + \cdots + \int_{B_{\ell-1}} r_{\ell-1}\,dm + \int_{C_\ell} r_\ell\,dm$$

$$+ \left(\int_{B_{\ell+1}} r_{\ell+1}\,dm + \int_{S_{\ell+1}^{\ell}} r_{\ell+1}\,dm\right) + \left(\int_{B_{\ell+2}} r_{\ell+2}\,dm + \int_{S_{\ell+2}^{\ell}} r_{\ell+2}\,dm\right) + \cdots$$

$$< r_0 P(B_0) + \int_{B_1} r_1\,dm + \cdots + \int_{B_{\ell-1}} r_{\ell-1}\,dm + \left(\int_{C_\ell} r_\ell\,dm + \int_{B_\ell'} r_\ell\,dm\right) + \int_{B_{\ell+1}} r_{\ell+1}\,dm + \cdots$$

$= r(\xi; T, D^{\circ})$

即ち　　$r(\xi; T^{*}, D^{\circ}) < r(\xi; T, D^{\circ})$

これ (T, D°) が ξ に関する Bayes solutionなりとの仮定に反す。

$$\therefore \quad m(B_{\ell}') = 0 \qquad , (\ell = 1, 2, \cdots)$$

(iii) 次に iii) が必要なことを証せん。

例えば $k = 1$ に対して $m(S_1') > 0$ であったとす。一般に，$n \geqq N$ のとき，$r_N \geqq \varepsilon_N r_n$ なことが容易に知られるから，

$$r_1 \geqq \varepsilon_1 r_2$$

然るに，S_1'上では，$r_1 = \alpha_1$，$\therefore r_1 \leqq \varepsilon_1 \alpha_2 \leqq \varepsilon_1 r_2$

よって，S_1'上では　$r_1 = \varepsilon_1 r_2$

$$\therefore \int_{S_1'} r_1 dx_1 = \int_{S_1'} \int_{-\infty}^{\infty} r_2 \, dx_2 \, dx_1$$

さて，B_{ℓ}' と $x_1 = \text{const.}$ なる部分空間との交りを $B_{\ell}'(1)$ と表し，又，この部分空間に対する $B_{\ell}'(1)$ の complementを $CB_{\ell}'(1)$ で表す等々とすれば

$$\int_{-\infty}^{\infty} r_2 \, dx_2 = \int_{B_2'(1)} r_2 dx_2 + \int_{CB_2'(1)} r_2 dx_2$$

$$\therefore \int_{S_1'} r_1 dx_1 = \int_{B_2'} r_2 \, dx_2 \, dx_1 + \int_{CB_2'} r_2 \, dx_2 \, dx_1 \qquad ①$$

一般に上述の如く $r_2 \geqq \varepsilon_2 r_3$ であるが

CB_2' の positive measure な subset で $r_2 > \varepsilon_2 r_3$ なりとせば，

$$\int_{CB_2'} r_2 \, dx_2 \, dx_1 > \int_{CB_2'} \int_{-\infty}^{\infty} r_3 \, dx_3 \, dx_2 \, dx_1 \qquad ②$$

然るに ⑪ の証明に於けると同様にして

$$\int_{CB_2'(1)}\int_{-\infty}^{\infty} r_3\,dx_3\,dx_2=\int_{B_3'(1)}\int_{-\infty}^{\infty} r_3\,dx_3\,dx_2+\int_{C(B_2'(1)+B_3'(1))}\int_{-\infty}^{\infty} r_3\,dx_3\,dx_2$$

$$=\int_{B_3'(1)}\int_{B_3'(1,2)} r_3\,dx_3\,dx_2+\int_{C(B_2'(1)+B_3'(1))} r_3\,dx_3\,dx_2$$

$$=\int_{B_3'(1)} r_3\,dx_3\,dx_2+\int_{C(B_2'(1)+B_3'(1))} r_3\,dx_3\,dx_2$$

こゝで，$r_3 \geqq \varepsilon_3 r_4$ なことを用いて以下同様にして進めば次となる。

$$\geqq \int_{B_3'(1)} r_3\,dx_3\,dx_2+\int_{B_4'(1)} r_4\,dx_4\,dx_3\,dx_2+\cdots\cdots$$

即ち

$$\int_{CB_2'}\int_{-\infty}^{\infty} r_3\,dx_3\,dx_2\,dx_1 \geqq \int_{B_3'} r_3\,dx_3\,dx_2\,dx_1+\int_{B_4'} r_4\,dx_4\,dx_3\,dx_2\,dx_1+\cdots \qquad ⑤$$

よつて，①，②，③，より

$$\int_{S_1'} r_1\,dm > \int_{B_2'} r_2\,dm+\int_{B_3'} r_3\,dm+\int_{B_4'} r_4\,dm+\cdots\cdots$$

となる，又一般に

$$\int_{S_k'} r_k\,dm \geqq \int_{B_{k+1}^{k}} r_{k+1}\,dm+\int_{B_{k+2}^{k}} r_{k+2}\,dm+\cdots\cdots$$

なことも上と同様に証される。よつて，

$$r(\xi;S_\xi,D^\circ)=r_0P(S_0)+\left(\int_{D_1} r_1\,dm+\int_{S_1'} r_1\,dm\right)+\left(\int_{D_2} r_2\,dm+\int_{S_2'} r_2\,dm\right)+\cdots$$

$$>r_0P(S_0)+\int_{D_1} r_1\,dm+\left(\int_{D_2} r_2\,dm+\int_{B_2'} r_2\,dm\right)+\left(\int_{D_3} r_3\,dm+\int_{B_3'} r_3\,dm+\int_{B_3^2} r_3\,dm\right)+\cdots$$

$$=r_0P(S_0)+\int_{B_1} r_1\,dm+\int_{B_2} r_2\,dm+\int_{B_3} r_3\,dm+\cdots$$

$= r(\xi; T, D^0)$

即ち、 $r(\xi; S_\xi, D^0) > r(\xi; T, D^0)$

となり、$r(\xi; S_\xi, D^0)$ が Bayes solution であった事実と矛盾す。

$\therefore$ $m(S_1') > 0$ なら CB_2' 上で measure 0 の set を除いて $r_2 = \varepsilon_2 r_3$ なるべし。

以下の條件が必要なことも上と同様に

即ち、iii) が必要なり。

最後に、$r(\xi; S_\xi, D^0)$ が Bayes solution であったこと、及び以上の証明から、i), ii), iii) が十分條件なことは殆ど明かなり。 q.e.d.

参　考　文　献

1) K.J. Arrow, D. Blackwell; M.A. Girshick
Bayes and minimax solution on sequential decision Problems. Econometrica. 1949.

2) A. Wald. Statistical decision Function
Ann. Math. Stat. 1949.

3) A. Wald, J. Wolfowiz
Bayes solutions of Sequential decision Problems. Ann. Math. Stat. 1950.