# (17) 確率論に於ける線型的方法

（random function について）

II

高島　己千雄

# V

## 定常 random function

### A.　一般的性質

§ 5.1.　T を実直線とし，$\tau$ をその上で定義された Lebesque 測度とする．

T の上で定義された random function $x(t)$ が定常であるとは，如何なる $h$ に対しても

$$E\{x(s+h)\overline{x(t+h)}\}=E\{x(s)\overline{x(t)}\}$$

が成立する，即ち相関函数 $r(s,t)=r(s-t)$ である時を云ふ．

容易に分る如く，如何なる $s$ に対しても

$$r(t)=\overline{r(-t)}=E\{x(s+t)\overline{x(s)}\},$$

$$\|x(s)\|^2=r(0)=\sigma^2\geqq 0.$$

定理 3.2. により，$x(t)$ は $r(t)$ が可測函数である時且つその時にのみ可測である．

また定理 2.2. により，$x(t)$ は

$$\lim_{t\to 0} r(t) = r(0) = \sigma^2$$

が成立する時且つその時にのみ連続である。 上の條件が満足されてゐるならば，$r(t)$ は凡ての $t$ 一値に対して連続である。 依つて，定常 random function はどの点でも連続であるか或ひはどの点でも不連続であるかの何れかである.

## § 5. 2.

$z \in L(x)$ とし

$$z = \sum_{k=1}^{n} c_k x(t_k)$$

とする． 然る時は

$$T_h z = \sum_{k=1}^{n} c_k x(t_k + h)$$

によつて同じく $L(x)$ の元が定義される． 容易に分る如く，$T_h$ は一意的に決定される（§4.5.参照）.

$y,\ z \in L(x)$ とすれば，明かに

$$T_h(ay + bz) = a \cdot T_h y + b \cdot T_h z,$$

$$E\{T_h y \cdot \overline{T_h z}\} = E\{y\overline{z}\},$$

$$\| T_h z \| = \| z \|,$$

$$T_{h+k} z = T_h(T_k z) = T_k(T_h z).$$

即ち $L(x)$ の変換（translation!）は線型且つ等距離的で one-parameter Abelian group を作る． 上記より，如何なる $z \in L_2(x)$ に対しても，$T_h$ を

$$T_h z = \underset{n\to\infty}{\mathrm{l.i.m.}}\, T_h z_n,\quad z_n \in L(x),\quad z = \underset{n\to\infty}{\mathrm{l.i.m.}}\, z_n$$

によつて定義出來る． 補題1により上記の四つの性質はそのまゝ成立する。 依つてかくの如く拡張された変換 $T_h$ は unitary である.

さて

$$x(t) = T_h\, x(0)$$

であるから，random function $x(t)$ の代りにそれに対応する unitary 変換 $T_t$ の作る群の構造を調べてもよい。但し直接取扱ふ方がより簡明でまたより直観的のやうに思はれる．もつとも補助手段として上記の変換群をも使用するが，

## § 5.3.

定理 5.1.　可測な定常 random function $x(t)$ は二つの互に直交する定常成分 $x_s(t)$，$x_0(t)$ の和に一意的た分解出來る：

$$x(t) = x_s(t) + x_0(t).$$

但しこゝで $x_s(t)$ は連続で $x_0(t)$ は nullartig である．

証　明．(i) 一意性．二通りに

$$x(t) = x_s^{(1)}(t) + x_0^{(1)}(t) = x_s^{(2)}(t) + x_0^{(2)}(t)$$

となつたとすれば，nullartig な $x_0^{(2)}(t) - x_0^{(1)}(t) = x_s^{(1)}(t) - x_s^{(2)}(t)$ が連続であることになる。これは定理3.7.によりこれは不可能である．

(ii) 分解可能性　random function

$$X(u, v) = \int_u^v x(t)dt$$

を考へる．( $d\tau(t)$ の代りに $dt$ と書く)．明かに $L_2(X)$ は $L_2(x)$ の部分空間である．

$$x_s(t) = P_{L_2(X)}\, x(t)$$

$$x_0(t) = x(t) - x_s(t) = P_{L_2(x) \ominus L_2(X)}\, x(t)$$

とする。　$x_s(t) \perp x_0(t)$.

1°.　$x_s(t)$，$x_0(t)$ の定常性．$T_h$ を§5.2. の変換とすれば，

$$T_h x_s(t) = T_h P_{L_2(X)}\, x(t) = P_{L_2(T_h X)} T_h x(t) = P_{L_2(T_h X)}\, x(t+h).$$

一方，$T_h X(u,v) = X(u+h, v+h)$ は明かであるから，
$L_2(T_h X) = L_2(X)$．依つて

$$T_h x_s(t) = {}_{\circ}P_{L_2(X)}\, x(t+h) = x_s(t+h).$$

即ち

$$E\{x_s(s+h)\overline{x_s(t+h)}\} = E\{T_h x_s(s)\overline{T_h x_s(t)}\} = E\{x_s(s)\overline{x_s(t)}\}.$$

更に $x_s(s) \perp x_0(t)$ より

$$E\{x_0(s+h)\overline{x_0(t+h)}\} = E\{x(s+h)\overline{x(t+h)}\} - E\{x_s(s+h)\overline{x_s(t+h)}\}$$

$$= E\{x_0(s)\overline{x_0(t)}\}.$$

**2°** $x_s(t)$ の連続であること．$|t-s| \leqq |v-u|$ なる凡ての $u, v$ に対して

$$|E\{[x(s)-x(t)]\overline{X(u,v)}\}| = |E\{x(s)\overline{X(u,v)}\} - E\{x(t)\overline{X(u,v)}\}|$$

$$= \left|\int_u^v r(s-w)dw - \int_u^v r(t-w)dw\right| = \left|\int_{s-v}^{s-u} r(w)dw - \int_{t-v}^{t-u} r(w)dw\right|$$

$$= \left|\int_{s-v}^{t-u} r(w)dw\right| + \left|\int_{s-v}^{t-v} r(w)dw\right| \leqq 2\sigma^2 |t-s|.$$

依つて $E\{x(t)\overline{X(u,v)}\}$ は $t$ の連続函数である。これより如何なる $Z \in L(X)$ に対しても $E\{x(t)\overline{Z}\}$ は $t$ の連続函数である。

そこで $Z \in L_2(X)$ とする．$Z = \underset{n\to\infty}{l.i.m.}\, Z_n$，$Z_n \in L(X)$ とすれば，連続函数列 $\{x(t)\overline{Z}_n\}$ は，

$$|E\{x(t)\overline{Z}\} - E\{x(t)\overline{Z}_n\}| \leqq \sigma \cdot \|Z - Z_n\|$$

により一様に $E\{x(t)\overline{Z}\}$ に収斂する。従つて $E\{x(t)\overline{Z}\}$ も連続である。さて $x_s(t)$ の相関函数 $r_s(t)$ については，
$x_s(t) \perp x_0(t)$ により

$$r_s(t) = E\{x_s(t)\overline{x_s(0)}\} = E\{x(t)\overline{x_s(0)}\}.$$

$x_s(0) \in L_2(X)$ であるから，$r_s(t)$ 従つて $x_s(t)$ は連続である。

3° $x_0(t)$ の nullartig であること．任意の $a$, $b$ に対して，積分

$$\int_a^b x_0(t)\,dt$$

は $x_0(t)$ と共に $L_2(x)\ominus L_2(X)$ に属する。

$$\int_a^b x_0(t)dt=\int_a^b x(t)dt-\int_a^b x_s(t)dt=X(a,b)-\int_a^b x_s(t)dt$$

により，$\int_a^b x_0(t)dt\in L_2(X)$，従って $\int_a^b x_0(t)dt\equiv 0$．　（終）

**定　理　5．2．**　可測な定常 random function が可分であるためには，それが連続であることが必要且つ充分である。

**証　明．**　$x(t)$が可分ならば，上述の $x_0(t)$ も可分である。よって定理3.6．により $x_0(t)$ は殆んど到る処零となる。

$\|x_0(t)\|$ は常数であるから，これは $x_0(t)\equiv 0$ の時にのみ可能である。　（終）

## § 5．4．Khintchine [1] の定理．

連続な定常 random function $x(t)$ に対しては平均エルゴード定理が成立する，即ち

$$\underset{|v-u|\to\infty}{l.i.m.}\ \frac{1}{v-u}\int_u^v x(t)dt$$

が存在する。　定理5.1.によりこのエルゴード定理は連続性の代りに $x(t)$ の可測性だけを仮定しそして積分を III の意味としても成立する．

**証　明．**　$x(t)$ を可測とする．然る時は如何なる $h$ に対しても

$$y(t,h)=x(t+h)-x(t)$$

も $t$ に関する可能な定常 random function である．
$|v-u|\geqq|h|$ なる限り

$$\int_u^v y(t,h)dt=\int_v^{v+h}x(t)dt-\int_u^{u+h}x(t)dt,$$

従って

$$\left\| \frac{1}{v-u} \int_u^v y(t,h)\,dt \right\| \leqq \frac{1}{|v-u|} \left\{ \left\| \int_v^{v+h} x(t)\,dt \right\| + \left\| \int_u^{u+h} x(t)\,dt \right\| \right\} \leqq \frac{2h\sigma}{|v-u|}.$$

即ち如何なる $h$ に対しても

$$\underset{|v-u|\to\infty}{l.i.m.} \frac{1}{v-u} \int_u^v y(t,h)\,dt = 0.$$

また $T_t y(s,h) = y(s+t,h)$ であるから，$s$ と $h$ との凡ての値に対して

$$\underset{|v-u|\to\infty}{l.i.m.} \frac{1}{v-u} \int_u^v T_t y(s,h)\,dt = 0.$$

更に如何なる $y = \sum_{k=1}^{n} c_k y(s_k, h_k) \in L(y)$ に対しても

$$\underset{|v-u|\to\infty}{l.i.m.} \frac{1}{v-u} \int_u^v T_t y\,dt = 0$$

次に $y \in L_2(y)$ とすれば，$\| y - y_\varepsilon \| < \varepsilon$ なる如き $y_\varepsilon \in L(y)$ が常に存在する。しかも $\| T_t y - T_t y_\varepsilon \| = \| y - y_\varepsilon \| < \varepsilon$，
従つて

$$\left\| \frac{1}{v-u} \int_u^v T_t y\,dt - \frac{1}{v-u} \int_u^v T_t y_\varepsilon\,dt \right\| < \varepsilon$$

となるから，この場合にも

$$\underset{|v-u|\to\infty}{l.i.m.} \frac{1}{v-u} \int_u^v T_t y\,dt = 0.$$

さて

$$x_1(t) = P_{L_2(y)}\, x(t)$$

とすれば，$L_2(T_t y) = L_2(y)$，　従つて

$$T_t x_1(s) = P_{L_2(y)}\, x(s+t) = x_1(s+t).$$

即ち　$E\{ x_1(s+h) \overline{x_1(t+h)} \} = E\{ x_1(s) \overline{x_1(t)} \}$　より $x_1(t)$ は定常である。　更に

$$x_1(t) = T_t x_1(0).$$

$x_1(0) \in L_2(y)$ なるにより

$$\underset{|v-u|\to\infty}{l.i.m.} \frac{1}{v-u} \int_u^v x_1(t)\,dt = 0.$$

そこで

$$x_2(t) = x(t) - x_1(t) = P_{L_2(x)\ominus L_2(y)}\, x(t)$$

とすると， $x_2(t) \perp L_2(y)$ により

$$0 = E\{y(t,h)\overline{x_2(t)}\} = E\{x(t+h)\overline{x_2(t)}\} - \|x_2(t)\|^2.$$

$x_2(t)$は明かに定常であるから，$E\{x(t+h)\overline{x_2(t)}\} = \|x_2(t)\|^2$ ＝常数，従って凡ての $s$, $t$ に対して

$$E\{x(s)\overline{x_2(t)}\} = E\{x(s)\overline{x_2(0)}\}.$$

補題2により $x_2(t) = x_2(0)$． そこで $x_2(0) = z_0$ とおけば

$$x(t) = x_1(t) + z_0, \qquad z_0 \perp x_1(t).$$

依って

$$z_0 = \underset{|v-u|\to\infty}{l.i.m.} \frac{1}{v-u}\int_u^v x(t)\,dt.$$

依って Khintchine の定理が証明された． （終）

## § 5.5.

$x(t)$ が定常ならば，$e^{-i\lambda t}x(t)$，$\lambda$は実数，も定常である：

$$E\{e^{-i(s+h)\lambda}x(s+h)\cdot\overline{e^{-i(t+h)\lambda}x(t+h)}\} = E\{e^{-i\lambda s}x(s)\cdot\overline{e^{-i\lambda t}x(t)}\}.$$

依って Khintchine の定理により

$$z_\lambda = \underset{|v-u|\to\infty}{l.i.m.} \frac{1}{v-u}\int_u^v e^{-i\lambda t}x(t)\,dt$$

が存在する． 再び前§によって $e^{-i\lambda t}x(t) - z_\lambda$， 従って $x(t) - z_\lambda e^{i\lambda t}$ は定常である， 従って

$$z_\lambda \perp x(t) - z_\lambda e^{i\lambda t}.$$

さて $\lim_{|v-u|\to\infty} \frac{1}{v-u}\int_u^v e^{-i\lambda t}dt = 0$，（$\lambda \neq 0$）であるから， $\lambda \neq 0$ として，

$$\underset{|v-u|\to\infty}{l.i.m.}\frac{1}{v-u}\int_u^v e^{-i\lambda t}x_1(t)\,dt = z_\lambda.$$

よって $z_\lambda \perp z_0$.　$x(t)e^{-i\lambda t}$ の代りに $x(t)$ を考へれば，更に

$$z_\lambda \perp z_{\lambda'}, \quad \lambda \neq \lambda'.$$

以上より，$x(t)-\sum_{k=1}^{n} z_{\lambda_k} e^{i\lambda_k t}$ は定常である，そして

$$z_{\lambda_m} \perp x(t)-\sum_{k=1}^{n} z_{\lambda_k} e^{i\lambda_k t}, \quad (m=1,2,\cdots,n).$$

依って

$$\| x(t)-\sum_{k=1}^{n} z_{\lambda_k} e^{i\lambda_k t} \| = \sigma^2-\sum_{k=1}^{n}\| z_{\lambda_k}\|^2 \geqq 0.$$

即ち $z_\lambda$ は $\lambda$ の高々可附番個の値を除いて零となる．零でない値を $z_{\lambda_1}, z_{\lambda_2}, \cdots, z_{\lambda_n}, \cdots$ とする．然る時は，級数 $\sum_{k=1}^{\infty} z_{\lambda_k} e^{i\lambda_k t}$ は平均収斂する。そして

$$x(t)-\sum_{k=1}^{\infty} z_{\lambda_k} e^{i\lambda_k t}$$

は定常である．

明かに，

$$T_h\left(\frac{1}{v-u}\int_u^v e^{-i\lambda t}x(t)\,dt\right)=\frac{1}{v-u}\int_u^v e^{-i\lambda t}x(t+h)\,dt=e^{i\lambda h}\frac{1}{v-u}\int_{u+h}^{v+h} e^{-i\lambda t}x(t)\,dt.$$

従って

$$T_h z_\lambda = e^{i\lambda h} z_\lambda.$$

この等式によって $z_\lambda \in L_2(x)$ は常数因数を除いて一意的に決定される．何となれば，上式により

$$E\{T_h z_\lambda \cdot \overline{x(t)}\} = e^{i\lambda h} E\{z_\lambda \overline{x(t)}\},$$

他方

$$E\{T_h z_\lambda \cdot \overline{x(t)}\} = E\{z_\lambda \cdot \overline{T_{-h}x(t)}\} = E\{z_\lambda \overline{x(t-h)}\}.$$

即ち如何なる $h$ に対しても

$$E\{z_\lambda \overline{x(h)}\} = e^{-i\lambda h} E\{z_\lambda \overline{x(0)}\}.$$

従つて

$$E\left\{\frac{Z_\lambda}{E\{Z_\lambda\overline{x(0)}\}}\cdot\overline{x(h)}\right\}=e^{-i\lambda h}$$

補題2により $\dfrac{Z_\lambda}{E\{Z_\lambda\overline{x(0)}\}}$ はこの等式によつて一意的に決定される。

これより，特に（常数因数を除いて）$Z_0$は $T_h$ に関して invariant な $L_2(x)$ の中の唯一の元である。

$Z_\lambda \neq 0$ なる数 $\lambda$ を $x(t)$の固有振動数と云ふ。
この個数は高々可附番個である。

## B. Cramér の表示.

§ 5.6. 連続な定常 random function $x(t)$ を考へる。従つてその相関函数 $r(t)$ は連続である。任意の実数 $a, b$ 及び $(a, b)$ で連続な任意の函数 $\varphi(t)$に対して，§ 3.2.により

$$\int_a^b\int_a^b r(s-t)\varphi(s)\overline{\varphi(t)}\,ds\,dt \geqq 0.$$

よつて Bochner [1] の定理により，$r(t)$は

$$r(t)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\lambda t}\,dF(\lambda)$$

なる形に表現出来る。但し $F(\lambda)$ は有界変動の非減少函数である。
$r(0)=\sigma^2$ により

$$F(+\infty)-F(-\infty)=\sigma^2.$$

逆に，上の形の如何なる函数に対しても

$$\sum_{i,j=1}^{n} r(t_i-t_j)a_i\overline{a_j}=\int_{-\infty}^{\infty}\left|\sum_{k=1}^{n}a_k e^{i\lambda t_k}\right|^2 dF(\lambda)\geqq 0,$$

従つて § 2.2.により，かゝる函数は何れも連続な定常 random function の相関函数として取扱ふことが出来る。
そこで

$$\sigma(S)=\int_S dF(\lambda)$$

とおけば，

$$r(s-t)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\lambda s}\cdot\overline{e^{i\lambda t}}\,d\sigma(\lambda)$$

と書ける。　依って定理4.2.により

$$x(t)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\lambda t}\,dZ(\lambda) \qquad (5.1)$$

なる如き測度 $\sigma(S)$ に対応する random spectralfunction $Z(S)$ が存在する。

$$Z(\lambda)=\frac{1}{2}\left\{\int_{-0}^{\lambda-0}dZ(\lambda)+\int_{+0}^{\lambda+0}dZ(\lambda)\right\}$$

と書けば，　$\|Z(\lambda)\|^2=\sigma(\lambda)$ なるにより，

$$\|Z(b)-Z(a)\|^2=F(b)-F(a),\quad b\geqq a.$$

但しこゝで $F(\lambda)$ の不連続点に於ては

$$F(\lambda)=\frac{1}{2}\{F(\lambda-0)+F(\lambda+0)\}$$

と置く。

$\varphi(\lambda)$ を $F(\lambda)$ に関して平方可積分な任意の函数で且つ $t$ につき恒等的に

$$\int_{-\infty}^{+\infty}e^{i\lambda t}\varphi(\lambda)\,dF(\lambda)=0$$

なる性質を有するとする．　然る時は如何なる三角多項式 $P(\lambda)$ に対しても

$$\int_{-\infty}^{\infty}P(\lambda)\varphi(\lambda)\,dF(\lambda)=0.$$

$(a,b)$ を任意の区間とする。　$\varphi(\lambda)$ の平方可積分性により

$$\int_{-\infty}^{-m}|\varphi(\lambda)|^2dF(\lambda)+\int_{m}^{\infty}|\varphi(\lambda)|^2dF(\lambda)<\varepsilon^2,$$

且つ $-m<a<b<m$ なる如くに数 $m$ を選ぶことが出来る，
$a<\lambda<b$ に対しては $1$ に收斂し，$-m<\lambda<a$ 及び $b<\lambda<m$ に対しては $0$ に收斂する所の三角多項式の一様有界な $\{P_n(\lambda)\}$ が

存在することは明か．然らば，$F(+\infty)-F(-\infty)=\sigma^2$ なるにより，如何なる $P_n(\lambda)$ も $F(\lambda)$ に関して平方可積分であるから。

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-m}^{m}P_n(\lambda)\varphi(\lambda)dF(\lambda)=\int_a^b\varphi(\lambda)dF(\lambda).$$

$P_n(\lambda)$ を如何なる $n$ 及び凡ての $\lambda$ ─ 値に対しても例へば $|P_n(\lambda)|<2$ が成立する如くに選ぶことが出来る。 そこで Schwarz の不等式により

$$\left|\int_{-\infty}^{-m}P_n(\lambda)\varphi(\lambda)dF(\lambda)\right|^2<\int_{-\infty}^{-m}4\,dF(\lambda)\int_{-\infty}^{-m}|\varphi(\lambda)|^2dF(\lambda)<4\sigma^2\varepsilon^2,$$

即ち

$$\left|\int_{-\infty}^{-m}P_n(\lambda)\varphi(\lambda)dF(\lambda)\right|<2\sigma\varepsilon,$$

同様にして

$$\left|\int_{m}^{\infty}P_n(\lambda)\varphi(\lambda)dF(\lambda)\right|<2\sigma\varepsilon.$$

依って

$$\left|\int_{-m}^{m}P_n(\lambda)\varphi(\lambda)dF(\lambda)\right|<4\sigma\varepsilon,$$

従って

$$\left|\int_a^b\varphi(\lambda)dF(\lambda)\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\int_{-m}^{m}P_n(\lambda)\varphi(\lambda)dF(\lambda)\right|\leqq 4\sigma\varepsilon.$$

$\varepsilon$ は任意に小であるから，凡ての $a$, $b$ に対して

$$\int_a^b\varphi(\lambda)dF(\lambda)=0,$$

従って $F(\lambda)$ に関して殆んど到る処 $\varphi(\lambda)=0$． 即ち假定の性質を持つ如何なる $\varphi(\lambda)$ に対しても

$$\int_{-\infty}^{\infty}|\varphi(\lambda)|^2dF(\lambda)=0.$$

依つて定理４．２．により

$$L_2(Z)=L_2(x).$$

## §・5．7．　（5．1．）に対して逆公式

$$Z(\lambda) = \underset{t\to\infty}{l.i.m.} \frac{1}{2\pi}\int_{-t}^{t} \frac{1-e^{-i\lambda t}}{it} x(t)\,dt$$

が成立する。

証　明．　定理4．3．により

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-t}^{t} \frac{1-e^{-i\lambda t}}{it} x(t)\,dt = \int_{-\infty}^{\infty}\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-t}^{t}\frac{1-e^{-i\lambda t}}{it} e^{i\mu t}dt\right\} dZ(\mu)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \psi(\lambda,\mu,t)\,dZ(\mu),$$

但しこゝで

$$\psi(\lambda,\mu,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-t}^{t}\frac{1-e^{-i\lambda t}}{it} e^{i\mu t}dt$$

で，これは凡ての $\lambda, t$ に対して有界である。　従って $F(\mu)$ に関して平方可積分である．

$$\lim_{t\to\infty}\psi(\lambda,\mu,t) = \lim_{t\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-t}^{t}\frac{e^{i\mu t}-e^{i(\mu-\lambda)t}}{it}\,dt$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin\mu t - \sin(\mu-\lambda)t}{t}\,dt$$

$$= \begin{cases} 1, & (0<\mu<\lambda) \\ \frac{1}{2}, & (\mu=\lambda>0 \text{ 或いは } 0=\mu<\lambda \\ 0, & (\mu>0, \mu>\lambda \text{ 或いは } \mu=\lambda=0 \text{ 或いは } \mu<0, \mu<\lambda) \\ -\frac{1}{2}, & (\mu=\lambda<0 \text{ 或いは } 0=\mu>\lambda) \\ -1, & (0>\mu>\lambda) \end{cases}$$

これを $\psi(\lambda,\mu)$ と書けば，

$$\lim_{t\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}|\psi(\lambda,\mu)-\psi(\lambda,\mu,t)|^2 dF(\mu) = \int_{-\infty}^{\infty}\lim_{t\to\infty}|\psi(\lambda,\mu)-\psi(\lambda,\mu,t)|^2 dF(\mu) = 0.$$

そこで定理4．1．により

$$\underset{t\to\infty}{l.i.m.}\int_{-\infty}^{\infty}\psi(\lambda,\mu,t)\,dZ(\mu) = \int_{-\infty}^{\infty}\psi(\lambda,\mu)\,dZ(\mu).$$

$$= \frac{1}{2}\{Z(\lambda+0)+Z(\lambda-0)\} - \frac{1}{2}\{Z(+0)+Z(-0)\} = Z(\lambda).$$

依つて逆公式が成立する。　　　　　　　　　　　　　　　　　（終）

§ 5. 8.　　そこで § 5. 5. に戻る。逆公式及び定理4. 3. により

$$\frac{1}{v-u}\int_u^v e^{-i\lambda t}x(t)dt=\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\frac{1}{v-u}\int_u^v e^{i(\mu-\lambda)t}dt\right\}dZ(\mu)$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\chi(\mu-\lambda,u,v)dZ(\mu),$$

但しこゝで

$$\chi(\lambda,u,v)=\frac{1}{v-u}\int_u^v e^{i\lambda t}dt=\begin{cases}\dfrac{e^{i\lambda v}-e^{i\lambda u}}{i\lambda(v-u)}, & (\lambda\neq 0)\\ 1, & (\lambda=0)\end{cases}$$

は如何なる $\lambda$, $u$ 及び $v$ の値に対しても有界である，従って $F(\lambda)$ に関して平方可積分である。

$$\chi(\lambda)=\lim_{|v-u|\to\infty}\chi(\lambda,u,v)=\begin{cases}0, & (\lambda\neq 0)\\ 1, & (\lambda=0).\end{cases}$$

$\chi(\lambda)$ もまた $F(\lambda)$ に関して平方可積分で，前 § の如く

$$\lim_{|v-u|\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\chi(\mu-\lambda,u,v)dZ(\mu)=\int_{-\infty}^{\infty}\chi(\mu-\lambda)dZ(\mu)$$

$$=Z(\lambda+0)-Z(\lambda-0).$$

従って

$$z_\lambda=Z(\lambda+0)-Z(\lambda-0)$$

依って

$$\|z_\lambda\|^2=F(\lambda+0)-F(\lambda-0).$$

即ち $x(t)$ の固有振動数 $\lambda$ は $F(\lambda)$ の不連続点である。

逆公式及び $z_\lambda=Z(\lambda+0)-Z(\lambda-0)$ の両式に夫々 scalar 的に $x(0)=Z(+\infty)-Z(-\infty)$ を乗ずると，§ 5.5. の式に注意し且つ補題1を用ひて

$$\begin{cases} F(\lambda)-F(0)=\lim\limits_{t\to\infty}\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-t}^{t}\dfrac{1-e^{i\lambda t}}{it}r(t)\,dt, \\ F(\lambda+0)-F(\lambda-0)=\lim\limits_{|v-u|\to\infty}\dfrac{1}{v-u}\displaystyle\int_{u}^{v}e^{-i\lambda t}r(t)\,dt. \end{cases}$$

こゝで上式では不連続点に於ては $F(\lambda)=\frac{1}{2}\{F(\lambda+0)+F(\lambda-0)\}$ とおく。

§ 5. 9.　$r(t)$ が実数ならば、

$$r(t)=\int_0^\infty \cos\lambda t\, dG(\lambda)$$

と書ける。　但しこゝに

$$G(\lambda)=F(\lambda)-F(-\lambda).$$

これより

$$r(s-t)=\int_0^\infty(\cos\lambda s\cos\lambda t+\sin\lambda s\sin\lambda t)\,dG'(\lambda).$$

依つて定理4.2.により、

$$Z_1(\lambda)\perp Z_2(\lambda),\quad \|Z_1(\lambda)\|^2=\|Z_2(\lambda)\|^2=G(\lambda)$$

且つ $x(t)$ に対して表示

$$x(t)=\int_0^\infty\cos\lambda t\,dZ_1(\lambda)+\int_0^\infty\sin\lambda t\,dZ_2(\lambda)$$

が成立する如き二つの random spectralfunction $Z_1(\lambda)$ 及び $Z_2(\lambda)$ が存在する。　また容易に分る如く

$$L_2(x)=L_2(Z_1)\oplus L_2(Z_2).$$

$r(t)$ のみならず $x(t)$ も実数ならば、逆公式により

$$Z(-\lambda)=-\overline{Z(\lambda)}.$$

容易に分る如く

$$Z_1(\lambda)=Z(\lambda)-Z(-\lambda)=2\Re Z(\lambda),$$
$$Z_2(\lambda)=i\{Z(\lambda)+Z(-\lambda)\}=-2\Im Z(\lambda).$$

依つて

$$\int Z_1(\lambda)=\underset{t\to\infty}{l.i.m.}\frac{1}{\pi}\int_{-t}^{t}\frac{\sin\lambda t}{t}x(t)\,dt,$$

$$Z_2(\lambda) = \underset{t\to\infty}{l.i.m.} \frac{1}{\pi}\int_{-t}^{t} \frac{1-\cos\lambda t}{t} x(t)\, dt.$$

また § 5. 5. 及び前 § により

$$Z'_\lambda = Z_1(\lambda+0) - Z_1(\lambda-0) = \underset{|v-u|\to\infty}{l.i.m.} \frac{1}{v-u}\int_u^v x(t)\cos\lambda t\, dt,$$

$$Z''_\lambda = Z_2(\lambda+0) - Z_2(\lambda-0) = \underset{|v-u|\to\infty}{l.i.m.} \frac{1}{v-u}\int_u^v x(t)\sin\lambda t\, dt.$$

§ 5. 10.　以上の結果により，定理 5. 1. に注意して直ちに次の定理を得る：

定　理　5. 3.　可測な定常 random function $x(t)$ は

$$\begin{cases} x(t) = Z_0 + \sum_{k=1}^{\infty} Z_k e^{i\lambda_k t} + x_1(t) + x_0(t), & (x(t)：複素数値函数) \\ x(t) = Z_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (Z_k^{(1)}\cos\lambda_k t + Z_k^{(2)}\sin\lambda_k t) + x_1(t) + x_0(t), & (x(t)：実数値函数) \end{cases}$$

なる形に表現することが出来る．　成分 $Z_0$，$Z_k e^{i\lambda_k t}$（或ひは $Z_k^{(1)}\cos\lambda_k t$ 及び $Z_k^{(2)}\sin\lambda_k t$），$x_1(t)$ 及び $x_0(t)$ は凡て定常で且つ互に直交する．　$x_1(t)$ は連続で且つ固有振動数を有しない。$x_0(t)$ は nullartig である．　固有振動数 $\lambda_k$ は

$$F(\lambda) - F(0) = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{2\pi}\int_{-t}^{t} \frac{1-e^{i\lambda t}}{it} r(t)\, dt$$

によって定義された分布函数 $F(\lambda)$ の不連続点である。

$Z_k$（或ひは $Z_k^{(1)}$ 及び $Z_k^{(2)}$）は

$$Z_k = \underset{|v-u|\to\infty}{l.i.m.} \frac{1}{v-u}\int_u^v e^{-i\lambda t} x(t)\, dt$$

（或ひは前 § 最後の式）によって決定される．

定　理　5. 4.　連続な定常 random function $x(t)$ が平均の意味で（Bohr の）概週期函数であるためには，

$$F(\lambda) - F(0) = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{2\pi}\int_{-t}^{t} \frac{1-e^{i\lambda t}}{it} r(t)\, dt ,$$

によって定義された分布函数 $F(\lambda)$ が純粋の階段函数であることが必

要且つ充分である。

証　明．　充分．　$r(t)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t}\,dF(\lambda)$ より $F(\lambda)$が純粋の階段函数ならば，明かに $r(t)$ は Bohr の概週期函数である。

定理5.3．及び §5.8．によりこの時

$$\|x(t)-\sum_{k=0}^{\infty} z_k e^{i\lambda_k t}\| = \|x(t)\|^2-\sum_{k=0}^{\infty}\|z_k\|^2$$

$$=F(+\infty)-F(-\infty)-\sum_{k=0}^{\infty}\{F(\lambda_k+0)-F(\lambda_k-0)\}=0,$$

従つて成分 $x_1(t)=0$，$x_0(t)=0$ で

$$x(t)=\sum_{k=0}^{\infty} z_k e^{i\lambda_k t}.$$

$r(t)$ は概週期函数だから，如何なる $\varepsilon>0$ に対しても，凡ての整数 $n$ につき

$$|r(0)-r(t)|<\frac{1}{2}\varepsilon^2$$

なる如き $t\in(nl(\varepsilon),\ (n+1)l(\varepsilon))$ が存在する所の，轉移数 $l(\varepsilon)>0$ が存在する。然らば

$$\|x(s+t)-x(s)\|^2=2r(0)-2\Re r(t)\leqq 2|r(0)-r(t)|$$

であるから，如何なる $s$ に対しても

$$\|x(s+t)-x(s)\|<\varepsilon,$$

従つて $x(t)$ は平均の意味での（Bohr の）概週期函数である（尚，$x(t)$ が殆んど確実に $B_2$－概週期函数（Besicovitch の意味での第2級概週期函数）であることを証明することが出来る —— Slutsky [2] 参照）．

必要．　明か．　　　　　　　　　　　　（終）

## C. 絶対な連続なスペクトルを持つ定常 random function.

§ 5. 11.　分布函数が絶対連続なスペクトルを持つ連続な定常 random function は重要な一つの類を形成する。

ここで上述の類を少し詳細に調べて見る。

従って

$$F(\lambda) = \int_0^\lambda F'(\lambda)\, d\lambda$$

が成立すると假定する。但しここで $F'(\lambda)$ は $F(\lambda)$ の導函類と殆んど到る処一致する。然る時は

$$\rho(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t} F'(\lambda)\, d\lambda.$$

そこで Lebesque - Riemann の定理を用ひて

$$\lim_{t\to\infty} \rho(t) = 0.$$

逆に，例へば $\rho(t)$ が単調に 0 に收斂する時或ひは $\rho(t)$ が $(-\infty,\infty)$ の上で可積分で且つ如何なる有限區間に於ても有界変動である時は，上の $\rho(t)$ に対する表現が成立することを知ってゐる。

$F(\lambda)$ は非減少であるから，$F'(\lambda)$ は決して負でないと假定してよい。然らば

$$f(\lambda) = +\sqrt{F'(\lambda)}$$

は実数で且つ $L_2(-\infty,\infty)$ に属する。依って Plancherel の定理により，$f(\lambda)$ の Fourier 変換

$$g(a) = \underset{\lambda\to\infty}{\mathrm{l.i.m.}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\lambda}^{\lambda} e^{i\lambda a} f(\lambda)\, d\lambda$$

が存在する。$g(a) \in L_2(-\infty,\infty)$ である。$f_t(\lambda) = e^{it\lambda} f(\lambda)$ の Fourier 変換は明かに $g_t(a) = g(a+t)$ である。

そこで Parseval の等式

$$\int_{-\infty}^{\infty} g_t(a)\, \overline{g(a)}\, da = \int_{-\infty}^{\infty} f_t(\lambda)\, \overline{f(\lambda)}\, d\lambda$$

により，

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(a+t)\overline{g(a)}\,da = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t}|f(\lambda)|^2 d\lambda = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t} F'(\lambda)\,d\lambda.$$

依つて，$r(t)$ に対して；

$$r(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(a+t)\overline{g(a)}\,da.$$

逆に，連続な定常 random function $x(t)$ の相関函数が上の形に表はし得るとすれば，

$$\int_{-\infty}^{\infty} |g(a)|^2 da = r(0)$$

より $g(a) \in L_2(-\infty, \infty)$．$f(\lambda)$ を $g(a)$ の Fourier 変換とし且つ $F'(\lambda) = |f(\lambda)|^2$ とすれば，容易に分る如く

$$r(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda} F'(\lambda)\,d\lambda$$

を得る．従つて $x(t)$ は絶対連続なスペクトルを有する。

さて，かゝる $r(t)$ に対しては

$$r(s-t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(a+s-t)\overline{g(a)}\,da = \int_{-\infty}^{\infty} g(a+s)\overline{g(a+t)}\,da$$

従つて定理4.2. により，$x(t)$ に対して表示

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(a+t)\,d\xi(a)$$

が成立する．但しこゝで $\xi(a)$ は直交 random function である（§ 4. 8. 3°）．

$\varphi(a) \in L_2(-\infty, \infty)$ とし $\psi(\lambda)$ を $\varphi(a)$ の Fourier 変換とすれば，Parseval の等式により

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(a+t)\overline{\varphi(a)}\,da = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t} f(\lambda)\overline{\psi(\lambda)}\,d\lambda.$$

$f(\lambda)$，$\psi(\lambda) \in L_2(-\infty, \infty)$ であるから，$f(\lambda)\overline{\psi(\lambda)} \in L_1(-\infty, \infty)$，従つてそれの Fourier 変換たる上式によつて一意的に決定される．

依って，殆んど到る処

$$f(\lambda)\overline{\psi(\lambda)} = 0$$

なる時且つその時にのみ上式は凡ての $t$ に対して $0$. となる。

殆んど到る処 $|f(\lambda)|^2 = F'(\lambda) > 0$ ならば，$\psi(\lambda)$ 従つて $\varphi(a)$ が殆んど到る処 $0$ になる時にのみこれは可能である。

他方，$F'(\lambda) = 0$，$\lambda \in M$，$mes.(M) > 0$ ならば，

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(a)|^2 da = \int_{-\infty}^{\infty} |\psi(\lambda)|^2 d\lambda = 1$$

なる如き，

$$\psi(\lambda) = \begin{cases} \neq 0 & (\lambda \in M) \\ = 0 & (\lambda \notin M) \end{cases}$$

なる $\psi(\lambda)$ を選ぶことが出来る。 以上より，定理4.2. を用ひて，殆んど到る処 $F'(\lambda) > 0$ なる時且つその時にのみ $L_2(\xi) = L_2(x)$ が成立する。

## § 5. 12. 連続な定常 random function $x(t)$ のスペクトルが完備であるとは，

$$\int_M dF(\lambda) = 0$$

なる如き正の Lebesque 測度を持つ集合 $M$ が存在しない時を云ふ。

$\varphi(t)$ を $\in L_1(-\infty, \infty)$ 且つ殆んど到る処 $\neq 0$ なる函数とし，積分

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t) x(t) dt$$

を考察する． § 3.2. 及び Fubini の定理により

$$\begin{aligned} \left\| \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t) x(t) dt \right\|^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} r(u-v) \varphi(u) \overline{\varphi(v)} du dv \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda(u-v)} dF(\lambda) \right\} \varphi(u) \overline{\varphi(v)} du dv \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda u} \varphi(u) du \right\} \left\{ \overline{\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda v} \varphi(v) dv} \right\} dF(\lambda) \\ &= 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} |\psi(\lambda)|^2 dF(\lambda). \end{aligned}$$

$x(t)$ のスペクトルが絶対連続ならば，常に右辺 $>0$ である。
他方，然らざれば $\int_M dF(\lambda)=0$ なる如き正の測度を持つ集合 $M$ が存在する。 すると，殆んど到る処 $\varphi(t)=0$ と云ふ制限なしで，右辺 $=0$ なる如き

$$\psi(\lambda)=\begin{cases}\neq 0 & (\lambda\in M)\\ =0 & (\lambda\notin M)\end{cases}$$

なる $\psi(\lambda)$ を選ぶことが出来る。 依って，$x(t)$ のスペクトルは

$$\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(t)\,x(t)\,dt=0$$

なる如き $L_1(-\infty,\infty)$ に属し且つ殆んど到る処 $\neq 0$ なる函数 $\varphi(a)$ が存在しない時且つその時にのみ完備である。 更に凡ての $s$ に対して

$$\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(t)\,x(s+t)\,dt=0$$

なることはすぐに分る。

以上 § 5.11. 及び § 5.12. をまとめて

**定 理 5.5.** 連続な定常 random function $x(t)$ が

$$x(t)=\int_{-\infty}^{\infty}g(a+t)\,d\xi(a)$$

なる形に表はし得るためには， そのスペクトルが絶対連続であることが必要且つ充分である． $L_2(\xi)=L_2(x)$ が成立するためには，スペクトルが完備であることが必要且つ充分である．

尚この條件は

$$\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(t)\,x(t)\,dt=0$$

なる性質を有する殆んど到る処零とならない $L_1(-\infty,\infty)$ に属する函数 $\varphi(a)$ が存在しないと云ふ條件と等意である。

§ 5. 13.　上述の $X(t)$ の表示は moving average の一般化と見なす事が出来る（Wold [1]．本§を通じて尚 Doob [4] を参照）．ここで $x(t)$ が $\xi(a)$ なる過程の「以前の値」にのみ依存すると云ふ特別の場合が特に重要である．「以前の値」と云ふ言葉をはっきりさせるため次の如くする：

$$\xi_1(a) = \xi(-a)$$

とおけば

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(a)\, d_a\, \xi_1(t-a)$$

と書ける．そこで $x(t)$ と $\xi_1(t)$ とを「同時」と見なす．そして $\xi_1(t-a)$，$a>0$ を $x(t)$ より「以前」であると云ふ．

そこで，$\xi_1(t-a)$ と $g(a)$ とを上式に於て $a$ の正の値のみが現れる如くに即ち $a<0$ に対して $g(a)=0$ となる如くに選び得るには如何なる條件が必要であり且つ充分であらうか？

$f(\lambda)$ を $g(a)$ の Fourier 変換とする．$f(\lambda)$ は

$$|f(\lambda)|^2 = F'(\lambda)$$

を満足せねばならない。即ち，その Fourier 変換が負の parameter の値に対して零となる $f(\lambda)$ を何時選び得るかを知らねばならない。然るに次の定理が成立する（Paley-Wiener [1]，定理 XII）：

$\varphi(\lambda) \geqq 0$，$\in L_2(-\infty,\infty)$ 且つ殆んど到る処 $\neq 0$ とする．$t \leqq t_0$ に対して $=0$ なる函数 $g(t)$ でその Fourier 変換 $f(\lambda)$ が條件 $|f(\lambda)| = \varphi(\lambda)$ を満足する如き $g(t)$ が存在するためには，

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\log \varphi(\lambda)|}{1+\lambda^2}\, d\lambda < \infty$$

なることが必要且つ充分である．

そこで $\varphi(\lambda) = +\sqrt{F'(\lambda)}$ とおけば，$g(a)$ を $g(a)=0$，$a<0$ なる如くに選び得るためには，

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{|\log\sqrt{F'(\lambda)}|}{1+\lambda^2}d\lambda=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{|\log F'(\lambda)|}{1+\lambda^2}d\lambda<\infty$$

なることが必要且つ充分である。 依って

**定 理 5.6.** 連続な定常 random function $x(t)$ が

$$x(t)=\int_0^{\infty}g(a)\,d_a\xi_1(t-a),$$

但し $\xi_1(t)$ は直交 random function ，なる形に表はし得るためには，$x(t)$ のスペクトルが絶対連続で且つ積分

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{|\log F'(\lambda)|}{1+\lambda^2}d\lambda$$

が収斂することが必要且つ充分である。

尚，定理の條件が満足されれば，$x(t)$ のスペクトルがまた完備であることがすぐに分る。

## § 5.14. 例

1° Gauss 型. $F'(\lambda)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{\lambda^2}{2}}$ とすれば，$r(t)=e^{-\frac{t^2}{2}}$

そこで $f(\lambda)=\sqrt{F'(\lambda)}=(2\pi)^{-\frac{1}{4}}e^{-\frac{\lambda^2}{4}}$ とおけば，

$$g(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\lambda t}f(\lambda)\,d\lambda=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,e^{-t^2}$$

依って定理5.5.により，$r(t)=e^{-\frac{t^2}{2}}$ を相関函数として持つ定常 random function を

$$x(t)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-(a+t)^2}d\xi(a)$$

なる形に表はし得る。 到る所 $F'(\lambda)>0$， 従って $L_2(x)=L_2(\xi)$.
他方

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{|\log F'(\lambda)|}{1+\lambda^2}d\lambda=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\log 2\pi+\lambda^2}{1+\lambda^2}d\lambda$$

は発散するから，定理5.6.の形に表はすことは出来ない。

$2^\circ$ Cauchy 型. $F'(\lambda) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+\lambda^2}$ とすれば,

$r(t) = e^{-|t|}$. そこで $f(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{1+i\lambda}$ とおけば, 明かに $|f(\lambda)|^2 = F'(\lambda)$.

$$g(t) = \lim_{\lambda\to\infty} \frac{1}{\pi\sqrt{2}} \int_{-\lambda}^{\lambda} \frac{e^{i\lambda t}}{1+i\lambda} d\lambda = \begin{cases} \sqrt{2}\, e^{-t} & (t>0) \\ 0 & (t<0). \end{cases}$$

依つて $r(t) = e^{-|t|}$ を相関函数として持つ定常 random function $x(t)$ は

$$x(t) = \sqrt{2} \int_0^\infty e^{-a} d_a \xi_1(t-a)$$

なる形に表はし得る。 上の $F'(\lambda)$ の形から定理5.6. の條件を満足することも直ちに分る。

$3^\circ$ 矩形型.

$$F'(\lambda) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi}, & (|\lambda| \leqq \pi) \\ 0, & (|\lambda| > \pi) \end{cases}$$ とすれば, $r(t) = \frac{\sin\pi t}{\pi t}$

そこで $f(\lambda) = \sqrt{F'(\lambda)}$ とおけば

$$g(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda t} d\lambda = \frac{\sin\pi t}{\pi t}.$$

依つて $r(t) = \frac{\sin\pi t}{\pi t}$ を相関函数として持つ定常 random function は

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin\pi(a+t)}{\pi(a+t)} d\xi(a)$$

なる形に表はし得る. この場合 $x(t)$ の スペクトルは完備でない.

即ち $L_2(x) \subsetneqq L_2(\xi)$, 従つてこの $x(t)$ に対しては一意的な逆公式は存在しない。 また $x(t)$ を定理 5.6. の形に表はし得ない。

# VI.

## 定常 random function の構造

§ 6.1. $x(t)$, $y(u)$ を random function とする. $y(u)$ が $x(t)$ に (linear) untergeordnet であるとは, $L_2(y) \leqq L_2(x)$ である時を云ふ。 特に $L_2(y)=L_2(x)$ ならば, $x(t)$ と $y(u)$ とは (linear) zusammengeordnet であると云ふ。

特に $x(t)$ が定常で, 同じく実直線上で定義された $y(t)$ が $x(t)$ に untergeordnet (又は zusammengeordnet) で且つ $x(t)$, $y(t)$ が stationary correlated である。 即ち

$$r_{xy}(s-t)=E\{x(s)\overline{y(t)}\}$$

であるならば, $y(t)$ は $x(t)$ に stationary untergeordnet (又は $x(t)$ と zusammengeodnet) であると云ふ.

$\{x(s);s\leqq t\}$ の閉線状集合体を $L_2(x;t)$ と書く. $y(t)$ が $x(t)$ に stationary untergeodnet (又は $x(t)$ と zusammengeordnet) で且つ凡ての $t$ に対して $L_2(y;t)\leqq L_2(x;t)$ (又は $L_2(y;t)=L_2(x;t)$) であるならば, その Unterordnung (又は Zusammenordnung) は gleichförmig であると云ふ。

定理 6.1. $x(t)$ を連続な定常 random function, $y(t)$ を $x(t)$ に stationary untergeornet であるとすれば,

$$y(t)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t}\gamma_{yx}(\lambda)\,dZ_x(\lambda)$$

なる如き $F_x$ に関して平方可積分で且つ $F_x$ に関して殆んど到る処一意的に定まった複素数値函数 $\gamma_{yx}(\lambda)$ が存在する. 但し $F_x$ は $x(t)$ のスペクトルである。 即ち特に $y(t)$ は定常且つ連続で

$$Z_y(S)=\int_S \gamma_{yx}(\lambda)\,dZ_x(\lambda),$$

$$F_y(\lambda)=\int_{-\infty}^{\lambda}|\gamma_{yx}(\lambda)|\,dF_x(\lambda),$$

$$r_{yx}(t)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{it\lambda}\gamma_{yx}(\lambda)\,dF_x(\lambda)$$

が成立する。

証明. 仮定により $x(t)$ は

$$x(t)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{it\lambda}\,dZ_x(\lambda)$$

なる形に表現出来る。 但し $Z_x$ は $x(t)$ と zusammengeordnet な random spectralfunction である。 また $x(t)$ の相関函数 $r_{xx}(t)=E\{x(s+t)\overline{x(s)}\}$ について

$$r_{xx}(t)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{it\lambda}\,dF_x(\lambda),$$

但し $F_x$ は有界且つ非減少で $\Delta F_x=\|\Delta Z_x\|^2$ を満足する。
如何なる $z\in L_2(Z_x)=L_2(x)$ も

$$z=\int_{-\infty}^{\infty}f_z(\lambda)\,dZ_x(\lambda)$$

なる形に表現出来る。 但し $f_z$ は $F_x$ に関して平方可積分である。
特に $y(t)$ を考へると

$$y(t)=\int_{-\infty}^{\infty}f(\lambda;t)\,dZ_x(\lambda)$$

なる如き $f(\lambda;t)$ が各 $t$ について存在する。依つて任意の $s,t$ に対して

$$r_{xy}(s-t)=E\{x(s)\overline{y(t)}\}=\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\lambda s}\overline{f(\lambda;t)}\,dF_x(\lambda)$$

$$=E\{x(s-t)\overline{y(0)}\}=\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\lambda(s-t)}\overline{f(\lambda;0)}\,dF_x(\lambda).$$

従つて

$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\lambda s}\overline{\{e^{i\lambda t}f(\lambda;0)-f(\lambda;t)\}}\,dF_x(\lambda)\equiv 0$$

しかるにこの式は各 $t$ につき $F_x$ に関して殆んど到る処

$$f(\lambda;t)=e^{i\lambda t}f(\lambda;0)$$

が成立する時にのみ可能である， そこで $f(\lambda;0)=\gamma_{yx}(\lambda)$ と書

けばよい。　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　（終）

この定理より直ちに

$F_x$ に関して殆んど到る処 $\gamma_{y_x}(\lambda) \neq 0$,

$\rightleftarrows$ $L_2(Z_x) = L_2(Z_y)$, 即ち $L_2(x) = L_2(y)$.

$\rightleftarrows$ $x(t)$ と $y(t)$ とが stationary zusammengeordnet.

§ 6. 2. $y(t)$ を連続且つ定常で $x(t)$ と stationary correlated であるが必ずしも $x(t)$ に untergeordnet ではないとする。然る時は射影

$$P_{L_2(x)}\, y(t) = y_x(t)$$

は明かに $x(t)$ に stationary untergeordnet である。$y(t)$, $y_x(t)$ は何れも定常で且つ $y_x(s) \perp y(t) - y_x(t)$ であるから、$y(t) - y_x(t)$ は定常で且つ

$$y_x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda} \gamma_{y_x}(\lambda)\, dZ_x(\lambda),$$

$$y(t) - y_x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda}\, dZ_{y-y_x}(\lambda),$$

但し $L_2(Z_{y-y_x}) \perp L_2(Z_x)$. よって定理6.1.により

$$r_{xy}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda}\, dF_{xy}(\lambda),$$

$$r_{yy}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda}\, dF_y(\lambda),$$

但しこゝで

$$F_{xy}(\lambda) = \int_{-\infty}^{\lambda} \overline{\gamma_{y_x}(\lambda)}\, dF_x(\lambda),$$

$$F_y(\lambda) = \int_{-\infty}^{\lambda} |\gamma_{y_x}(\lambda)|^2 dF_x(\lambda) + F_{y-y_x}(\lambda).$$

さて $\Delta F_{y-y_x}(\lambda) \geqq 0$ だから Schwarz の不等式により

$$|\Delta F_{xy}|^2 = \left| \int_\Delta \overline{\gamma_{y_x}(\lambda)}\, dF_x(\lambda) \right|^2 \leqq \int_\Delta |\gamma_{y_x}(\lambda)|^2 dF_x(\lambda) \cdot \int_\Delta dF_x(\lambda) \leqq \Delta F_x \cdot \Delta F_y,$$

即ち $F_{xy}$ は有界変動で，不等式

$$|\Delta F_{xy}|^2 \leqq \Delta F_x \cdot \Delta F_y$$

を満足する。

逆に，この不等式を満足する任意の有界非減少函数 $F_x$，$F_y$ 及び $F_{xy}$ に対して

$$r_{xx}(t)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda} dF_x(\lambda),\quad r_{xy}(t)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda} dF_{xy}(\lambda),\quad r_{yy}(t)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda} dF_y(\lambda)$$

が成立する如くに，二つの連続，定常且つ stationary correlated な random function $x(t)$，$y(t)$ を構成することが出来る。
但しこゝで

$$\gamma_{yx} = \frac{\overline{dF_{xy}}}{dF_x},\quad F_{y-y_x} = F_y - \int_{-\infty}^{\lambda} |\gamma_{yx}(\lambda)|^2 dF_x(\lambda)$$

と定義することが必要である。

この場合の不等式から，$F_{y-y_x}$ が非減少であることが分る。従つて二つの直交する random spectral function $Z_x$，$Z_{y-y_x}$ を $\|\Delta Z_x\|^2 = \Delta F_x$，$\|\Delta Z_{y-y_x}\|^2 = \Delta F_{y-y_x}$ となる如くに與へることが出来る。

この結果は任意個数の random function に対しても容易に拡張出来る（他の方法については Cramér [1]．尚，定常系列については Kolmogoroff [2]，§3にあるとのこと—筆者未見

$y(t)$ が $x(t)$ の定常成分であるとは，$y(t)$ が $x(t)$ に stationary untergeordnet で且つ凡ての $s, t$ に対して，
$y(s) \perp x(t)-y(t)$ である時を云ふ。

**定 理 6．2．** $y(t)$ が $x(t)$ の定常成分であるためには，$F_x$ に関して殆んど到る所

$$\gamma_{yx}(\lambda) = C_s(\lambda)$$

であることが必要且つ充分である。

**証 明．** 定理6．1．及び $x(t)-y(t) \perp L_2(y)$ により凡ての $t$ に対して

$$0 = r_{x-y,y}(t) = E\{[x(t)-y(t)]\cdot\overline{y(0)}\} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda}[1-\gamma_{yx}(\lambda)]\cdot\overline{\gamma_{yx}(\lambda)}\,dF_x(\lambda).$$

従つて $F_x$ に関して殆んど到る処

$$(1-\gamma_{yx}(\lambda))\overline{\gamma_{yx}(\lambda)} = 0,$$

即ち $\gamma_{yx}(\lambda) = 0$ 又は 1. $\gamma_{yx}(\lambda)$ は可測だから，$\gamma_{yx}(\lambda) = 1$ なる如き集合 $S$ は可測である。（終）

換言すれば，連続な定常 random function の定常成分への分解にはそのスペクトルの互に complement な部分スペクトルへの分解が対応する。

§ 6.3. $x(t)$ を連続な定常 random function とする. 明かに $s \leqq t$ ならば $L_2(x;s) \subseteqq L_2(x;t)$. 従つて $t \to -\infty$ の時 $L_2(x;t)$ は $L_2(x)$ の部分空間 $L_2(x;-\infty)$ に收斂する.

1° $L_2(x;-\infty) = L_2(x)$ なる場合. 即ち各 $t$ に対して $L_2(x;t) = L_2(x)$, 従つてどの $x(t)$ も $L_2(x;s)$ の元で，$s$ は任意に選び得る。これは $x(t)$ が $t \leqq s$ に対するそれの値によつて凡ての parameter に対するそれの値を既に一意的に決定することを表はしてゐる。この場合 $x(t)$ は deterministic であると云ふ。

2° $L_2(x;-\infty) = \{0\}$ なる場合. この場合は，$t \leqq s$ に対する $x(t)$ の値が $u-s$ が充分に大である時には $t \geqq u$ に対するそれの値について手掛りを與へないことを表はしてゐる. この場合 $x(t)$ は purely indeterministic であると云ふ。

3° 一般の場合は勿論，$\{0\} \subset L_2(x;-\infty) \subset L_2(x)$. この場合には，$x(t)$ を deterministic 成分と purely indeterministic 成分との二つの定常成分の和に分解することが出來る。

証 明. $L_2(x;-\infty) \subseteqq L_2(x)$ により $x(t)$ に untergeordnet である $x_d(t) = P_{L_2(x;-\infty)}x(t)$ は $x(t)$ の定常成分である. 然る時は（§ 5.2. 参照）

$$E\{x_d(s)\overline{x(t)}\} = E\{P_{L_2(x;-\infty)}x(s)\overline{x(t)}\} = E\{T_h P_{L_2(x;-\infty)}x(s)\cdot\overline{T_h x(t)}\}$$

$$= E\{P_{T_h L_2(x;-\infty)} x(s+h) \cdot \overline{x(t+h)}\}$$

$$= E\{x_d(s+h) \cdot \overline{x(t+h)}\}.$$

従って $x_d(s)$ と $x(t)$ とは stationary correlated である．
また $L_2(x;-\infty) = P_{L_2(x;-\infty)} L_2(x) = L_2(x_d)$ 且つ $L_2(x_d;-\infty) = P_{L_2(x;-\infty)} L_2(x_d) = L_2(x_d)$ であるから，$x_d(t)$ は deterministic である． 他方 $L_2(x;-\infty) \ominus L_2(x_d) = \{0\}$ であるから，$x(t) - x_d(t)$ は purely indeterministic である． （終）

1°，2° の概念は Wold [1] による，但し彼は夫々"singular"，"regular"と云つておる． こゝでの語は Doob [4] による． 尚，Kolmogoloff [3] 参照．

## § 6.4. $h$ を任意の正数として

$$x(t;h) = x(t) - P_{L_2(x;t-h)} x(t)$$

と書く． 明かに $x(t;h)$ は $x(t)$ に stationary untergeordnet である．（併し $x(t)$ の定常成分ではない ― $L_2(x;t-h)$ は $t$ に依存し従つて $x(t)$ と $x(s) - x(s;h)$ は必ずしも直交するとは限らぬ）． $x(t)$ が deterministic であるならば，$x(t;h) = 0$． 逆に $x(t;h) = 0$ ならば凡ての $h$ に対して $x(t) = P_{L_2(x;t-h)} x(t)$， 即ち $x(t)$ は deterministic である。

さて定理 6.1. により

$$x(t;h) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t} \gamma(\lambda;h)\, dZ_x(\lambda)$$

なる如き $F_x$ に関して平方可積分な $\gamma(\lambda;h)$ が存在する．
$s-t > h$ ならば，$E\{x(s;h)\overline{x(t;h)}\} = 0$ である。何となれば $x(t;h) \in L_2(x;t)$ で且つ $s-t > h$ より更に，$x(t;h) \in L_2(x;s-h)$， 他方 $x(s;h)$ の定義より，$x(s;h) \perp L_2(x;s-h)$ である．

依つて定理 6.1. より

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t} |\gamma(\lambda; h)|^2 dF_x(\lambda) = 0 \qquad (|t| > h)$$

これより，

$$\int_{-\infty}^{\lambda} |\gamma(\lambda; h)|^2 dF_x(\lambda)$$

が絶対連続であることが分る。 従つて単調函数 $F_x$ の導函数 $F_x'$ は殆んど到る処存在するから，

$$\int_{-\infty}^{\lambda} |\gamma(\lambda; h)|^2 dF_x(\lambda) = \int_{-\infty}^{\lambda} |\gamma(\lambda; h)|^2 F_x'(\lambda) d\lambda.$$

そこで $F_x$ を Lebesque 分解する：

$$F_x(\lambda) = F_x^{(1)}(\lambda) + F_x^{(2)}(\lambda) + F_x^{(3)}(\lambda).$$

但しこれらは何れも非減少で， $F_x^{(1)}$ は絶対連続で殆んど到る処 $F_x' = F_x^{(1)'}$ が成立し， $F_x^{(2)}$, $F_x^{(3)}$ は夫々 jump 及び singular function で何れも零集合 M の外ではそれらの導函数は零となる。 $M_2$ を $F_x$ の不連続点の集合（可附番）とし， $M_3 = M - M_2$, $M_1 = R - M$， 但し R は実軸，とすれば，明かに各可測集合 S に対して

$$\int_S dF_x^{(\nu)}(\lambda) = \int_{S \cap M_\nu} dF_x(\lambda), \qquad (\nu = 1, 2, 3)$$

そこで三つの random spectralfunction を， $\|\Delta Z_x^{(\nu)}\|^2 = \Delta F_x^{(\nu)}$ 且つ

$$Z_x(S) = Z_x^{(1)}(S) + Z_x^{(2)}(S) + Z_x^{(3)}S$$

となる如くに，

$$Z_x^{(\nu)}(S) = \int_{S \cap M_\nu} dF_x(\lambda) \qquad (\nu = 1, 2, 3)$$

によつて定義出来る。 こゝで $L_2(Z_x^{(\nu)})$, $\nu = 1, 2, 3$ は互に直交する。 そこで

$$x_\nu(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda} dZ_x^{(\nu)}(\lambda)$$

と書けば，定理 6.2，により，

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t) + x_3(t)$$

は $x(t)$ の三つの定常成分への分解である。$x_1(t)$，$x_2(t)$，$x_3(t)$ は夫々絶対連続スペクトル，点スペクトル，特異スペクトルを有すると云ふ。

$x_1(t)$，$x_2(t)$，$x_3(t)$ は互に直交するから，

$$x(t;h) = x_1(t;h) + x_2(t;h) + x_3(t;h).$$

こゝで，$F'_x(\lambda)$ が殆んど到る処零となるならば，$x(t;h)$ は恒等的に零となる。即ちこの場合には $x(t)$ は deterministic である。特にこれから，成分 $x_2(t)$，$x_3(t)$ が deterministic であることが分る。従って

$$x(t;h) = x_1(t;h) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda} \gamma(\lambda;h)\, dZ_x^{(1)}(\lambda).$$

即ち，以下に於ては $x(t)$ が絶対連続スペクトルを有すると假定して何等一般性を失はない：

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda} |\gamma(\lambda;h)|^2 F'_x(\lambda)\, d\lambda = 0. \qquad (|t| > h)$$

$|\gamma(\lambda;h)|^2 F'_x(\lambda)$，$\gamma(\lambda;h) F'_x(\lambda)$ は何れも $L_1(-\infty,\infty)$ に属する（後者については Schwarz の不等式を用ゐる）。さて，Hille-Tamarkin [1] により，$f(\lambda) \in L_1(-\infty,\infty)$ の Fourier 変換は

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\log|f(\lambda)||}{1+\lambda^2}\, d\lambda$$

が収斂する時にのみ半軸上で $0$ となり得る。

依って

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\log\{|\gamma(\lambda;h)|^2 F'_x(\lambda)\}|}{1+\lambda^2}\, d\lambda < \infty, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\log\{|\gamma(\lambda;h)| F'_x(\lambda)\}|}{1+\lambda^2}\, d\lambda < \infty. \quad (*)$$

しかるに

$$0 \leqq |\log F_x'| = |2\log|\gamma| + 2\log F_x' - \log|\gamma|^2 F_x'| \leqq 2|\log|\gamma|F_x'| + |\log|\gamma|^2 F_x'|,$$

$$0 \leqq |\log|\gamma|| = |\log|\gamma|F_x' - \log F_x'| \leqq |\log|\gamma|F_x'| + |\log F_x'|.$$

従って（＊）は次の條件と同等である：

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\log F_x'(\lambda)|}{1+\lambda^2}\, d\lambda < \infty, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\log|\gamma(\lambda\,;h)||}{1+\lambda^2}\, d\lambda < \infty. \qquad (*)'$$

（＊）が満足されないならば，$\gamma(\lambda\,;h) \neq 0$ は存在しない．結局

定理 6．3．積分

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\log F_x'(\lambda)|}{1+\lambda^2}\, d\lambda \qquad (**)$$

が発散するならば，$x(t)$ は deterministic である。

特に $F_x'(\lambda)$ が正の測度の集合の上で $=0$ ならば，$x(t)$ は deterministic である．

注意．$\log F_x' < F_x'$ であるから，$F_x'$ の値だけで定理の積分（＊＊）の発散を調べることは出来ない。

§ 6．5．$x(t)$ のスペクトルが絶対連続であること及び積分（＊＊）が収斂することを假定する。然る時は，$x(t)$ を

$$x(t) = \int_0^{\infty} g(u)\, d_u \xi(t-u) = \int_{-\infty}^{t} g(t-u)\, d\xi(u) \qquad (***)$$

なる形に表現出来る。但しこゝで $\xi(S)$ は

$$\|\xi(S)\|^2 = \sigma(S), \quad \sigma : \text{Lebesque 測度} \qquad (***)'$$

を満足する実軸上の凡ての $\sigma$－可測集合に対して定義された random spectralfunction である（定理 5，6．）．$x(t)$ と $\xi(S)$ とは zusammengeordnet である．

性質（＊＊＊）′を有する random spectralfunction を homogeneous と云ふ。これは定常 random function と最も密接に

結び付く特性を有してゐる。 実際： $T_h$ を $t \to t+h$ なる実軸の translation とすれば，明かに $\xi(T_t S)$ は $t$ の定常 random function である． 特に $S=(a,b)$ ならば，$\xi(T_t S)$ に対してスペクトル表示

$$\xi(T_t S)=\xi(a+t,b+t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{it\lambda}\frac{e^{ib\lambda}-e^{ia\lambda}}{i\lambda}d\xi^*(\lambda)$$

を得る。 こゝで $\xi^*$ は再び homogeneous である． 更に一般に

$$\xi(S)=\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_S e^{it\lambda}dt\right\}d\xi^*(\lambda).$$

そして逆に

$$\xi^*(S)=\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_S e^{-it\lambda}d\lambda\right\}d\xi(t)$$

が成立する． 証明は全く同様． $\xi^*$ を $\xi$ の Fourier 変換と云ふ。 これら二式より明かに $\xi$ と $\xi^*$ とは zusammengeordnet である。

定　理 6．4． $\xi(S)$ を homogeneous random spectralfunction とし， $f(t)\in L_2(-\infty,\infty)$ とする． それらの Fourier 変換を夫々 $\xi^*(S)$, $f^*(t)$ と書けば，Parseval の等式

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\,d\xi(t)=\int_{-\infty}^{\infty}f^*(t)\,d\xi^*(t)$$

が成立する。

証　明． $\xi$ と $\xi^*$ とは zusammengeordnet であるから，

$$z=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\,d\xi(t)\in L_2(\xi)$$

は $L_2(\xi^*)$ にも属する。 依って定理に云ふ如き $f^*(t)\in L_2(-\infty,\infty)$ は存在する。 さて如何なる $S$ に対しても

$$E\{z\overline{\xi(S)}\}=\int_S f(t)dt=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f^*(\lambda)\left\{\int_S e^{-i\lambda t}dt\right\}d\lambda.$$

依つて殆んど到る処

$$f(t)=\frac{d}{dt}\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f^*(\lambda)\frac{e^{-i\lambda t}-1}{-i\lambda}\,d\lambda\right\}.$$

即ち $f^*$ は $f$ の Fourier 変換である。 (終)

定常 random function $x(t)$ の homogeneous spectral-function $\xi(S)$ が untergeordnet (zusammengeordnet) であるとは，如何なる $S$ に対しても $\xi(T_t S)$ が $t$ の函数として untergeordnet (zusammengeordnet) である時を云ふ．

これより直ちに本 § 冒頭の式 (＊＊＊) に於て $x(t)$ と $\xi(S)$ とが stationary zusammengeordnet であることが分る．

$L_2(\xi;t)$ を凡ての $\xi(S)$， $S$ は半軸 $(-\infty,t)$ の可測部分集合，によつて張られた $L_2(\xi)$ の部分空間とする．

$L_2(\xi;t)$ の元は

$$z=\int_{-\infty}^{t}f(u)\,d\xi(u),\quad f(u)\in L_2(-\infty,t)$$

なる形に書くことが出来る． 各 $t$ に対して $L_2(\xi;t)=L_2(x;t)$ が成立する時 $x(t)$ と $\xi(S)$ とは gleichförmig zusammengeordnet であると云ふ．

さて (＊＊＊) に於て $\xi(S)$ をそれが $x(t)$ と gleichförmig zusammengeornet である如くに選び得るか？ 先づかかる $\xi(S)$ が存在すると假定する． 假りに

$$x(t)=\int_{-\infty}^{t}g_1(t-u)\,d\xi_1(u)=\int_{-\infty}^{t}g_2(t-u)\,d\xi_2(u)$$

且つ各 $t$ に対して $L_2(\xi_1;t)=L_2(\xi_2;t)=L_2(x;t)$，とかゝる $\xi$ が二通りに存在したとする。 然る時は各可測集合 $S$ に対して

$$\xi_2(S)=\int_S f(t;S)\,d\xi_1(t)$$

なる如き $t\in S$ に対して定義された函数 $f(t;S)$ が存在する。

$$\xi_2(S_1+S_2)=\xi_2(S_1)+\xi_2(S_2),\ S_1\frown S_2=\phi \text{ より}$$

$$\xi_2(S_1+S_2)=\int_{S_1+S_2} f(t;S_1+S_2)\,d\,\xi_1(t)$$
$$=\int_{S_1} f(t;S_1)\,d\,\xi_1(t)+\int_{S_2} f(t;S_2)\,d\xi_1(t).$$

即ち凡ての $S_2$ に対して $t\in S_1$ の時 $f(t;S_1)=f(t;S_1+S_2)$.
依って $f(t;S)$ は各 $t$ に対して $S$ と無関係で従って $f(t)$ と書いてよい。 然る時は各 $t$ につき

$$x(t)=\int_{-\infty}^{t} g_1(t-u)\,d\,\xi_1(u)=\int_{-\infty}^{t} g_2(t-u)f(u)\,d\,\xi_1(u).$$

さて $L_2(x;t)=L_2(\xi;t)$ だから

$$g_1(t-u)=g_2(t-u)f(u)$$

従って $f(u)=\text{Const.}=k.$ 依って $\xi_2(S)=k\,\xi_1(S).$
$\|\xi_2(S)\|^2=|k|^2\cdot\|\xi_1(S)\|^2=\sigma(S)$ より $|k|=1$ となる。
即ち $\xi(S)$ は絶対値 1 たる常数因数を除いて一意的に決定される。
$x(t)$ は若しそれと gleichförmig zusammengeordnet である $\xi(S)$ が存在するならば purely indeterministic である。
証　明. $z\in L_2(x;-\infty)$ とすれば, $z\in L_2(\xi;t)$. 即ち

$$z=\int_{-\infty}^{t} f(u)\,d\,\xi(u)$$

なる形に表現出来る。 しかるに一意的なこの表現は任意の $t$ に対して成立せねばならぬ.
これは $f(u)\equiv 0$ の時にのみ可能, 従って $L_2(x;-\infty)=\{0\}$ である。 (終)

§ 6. 6. $x(t)$ と gleichförmig zusammengeordnet である $\xi(S)$ の存在を証明したいのであるが, それには次の如き補助定理を必要とする. (然しこゝでは証明は紙数の関係上概略だけとする).

補助定理 6. 1. 実変数 $u$ の複素数値函数 $f(u)$ は, $L_2(-\infty,\infty)$ 又は $L_1(-\infty,\infty)$ に属するとし且つその Fourier 変

但 $f^*(t)$ は $\equiv 0\ (t<0)$ とする。然る時は

$$f(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} e^{-itw} f^*(t)\,dt \qquad (w = u + iv)$$

によって条件

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(u+iv)|^p du < M(f) \quad \text{for all } v \leqq 0 \ (p=2 \text{ 又は } 1)$$

を満足する所の $v<0$ に対して正則な解析函数が定義される。

こゝで $M(f)$ は函数 $f$ の選擇とは無關係だが $v$ には關係する所の常数である。逆に最後の性質を持つ如何なる $f(w)$ も上述の形に表はすことが出来る。但しこゝで $f^*(w)$ は平方可積分又は有界である。更に

$$\lim_{v\to 0} f(u+iv) = f(u), \quad \text{for almost all } u,$$

$$\lim_{v\to 0} \int_{-\infty}^{\infty} |f(u+iv) - f(u)|^p du = 0, \quad (p=2 \text{ 又は } 1)$$

が成立する。

**証明.** $L_2$ 及び $L_1$ について夫々 Paley-Wiener [1] 及び Hille-Tamarkin [2] を見よ.

**補助定理 6.2.** 実軸に関して平方可積分或ひは絶対可積分な函数 $f(w)$ は，積分

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\log|f(t)||}{1+t^2}\,dt$$

が收斂し且つ $v<0$ に対して表現

$$f(w) = \Pi_f(w) \cdot \exp\left\{-\frac{1}{\pi i}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1+tw}{t-w} \frac{\log|f(t)|}{1+t^2}\,dt + \frac{1}{\pi i}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1+tw}{t-w}\,d\chi_f(t) + i\alpha_f - i\beta_f w\right\}$$

が成立する時且つその時にのみ補助定理 6.1. の條件を満足する，

但しこゝで $\Pi_f(w)$ は $v_\nu<0$ を以ての Blaschke product

$$\Pi_f(w) = \prod_\nu \frac{w - w_\nu}{w - \overline{w}_\nu} \cdot \frac{\overline{w}_\nu - i}{w_\nu + i}$$

を表はしそして

$$\sum_{\nu} \frac{v_\nu}{1+|w_\nu|^2} < \infty$$

とする。 $\chi_f(t)$ はその導函数が殆んど到る処零となる有界非減少函数を表はし, $\alpha_f$ は実数を, $\beta_f$ は正数を表はす.

上の表現は一意的である.

証 明. 必要. 明かに $f(w)$ は $v<0$ に対して解析的且つ正則である。 函数

$$\exp\left\{-\frac{1}{\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1+tw}{t-w}\ \frac{\log|f(t)|}{1+t^2}\,dt\right\}$$

は補助定理6.1.の條件を満足する( Paley and Wiener [1], 定理XII). 他方

$$\Pi_f(w)\cdot\exp\left\{\frac{1}{\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1+tw}{t-w}\,d\chi_f(t)+i\alpha_f-i\beta_f w\right\}$$

は $v<0$ に対して有界で且つ $v\to 0$ として殆んど到る処有界な境界値を有する. 従って $f(w)$ も同じ條件を満足する.

充分. 変換 $w=i\,\dfrac{z+1}{z-1}$ によって $f(w)$ は単位円の内部で解析的且つ正則な函数 $g(z)$ に変換される。 更に補助定理6.1.の假定により,

$$\int_0^{2\pi}|g(re^{i\varphi})|^p d\varphi \leqq M(f),\ r\leqq 1,\ (p=2 \text{ 又は } 1)$$

( Hille and Tamarkin [2] ). $\overset{+}{\log} a=\mathrm{Max}\{\log a, 0\}$ と書けば, これより $r\leqq 1$ に対して

$$\int_0^{2\pi}\log^+|g(re^{i\varphi})|\,d\varphi \leqq M(f).$$

$g(z)$ は単位円内に極を持たぬから, $g(z)$ は $|z|<1$ に対して beschränktartig な函数である( Nevaunlinna [1] ),

しかるにかゝる函数は

$$g(z) = \Pi_g(z)\cdot\exp\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{e^{i\vartheta}+z}{e^{i\vartheta}-z}\,d\psi(\vartheta)+i\alpha\right\}$$

なる形に表はすことが出来る，但し $\Pi_g(z)$ は Blaschke product，$\psi$ は有界変動の函数である。 そして

$$\psi(\vartheta) = \lim_{r\to 1}\int_0^{\vartheta}\log|g(re^{i\varphi})|\,d\varphi\,,$$

が成立する。 値 $\vartheta$ に対して $\psi'(\vartheta) < \infty$ ならば

$$\psi'(\vartheta) = \lim_{r\to 1}\log|g(re^{i\vartheta})|.$$

$\psi$ は有界変動の函数として殆んど到る処有限な導函数を有してゐるから， この式は殆んど到る処成立する。 従つて $\psi(\vartheta)$ の絶対連続成分が決定された， $\psi^+$ を $\psi$ の正変分とすれば

$$\psi^+(\vartheta) = \lim_{r\to 1}\int_0^{\vartheta}\log^+|g(re^{i\varphi})|\,d\varphi.$$

しかるに補助定理 6．1．の最後の式により

$$\lim_{r\to 1}\int_0^{2\pi}g(re^{i\varphi})\,d\varphi = \int_0^{2\pi}g(e^{i\varphi})\,d\varphi$$

( Hille and Tamarkin [2] )，そして殆んど到る処 $g(e^{i\varphi}) = \lim_{r\to 1}g(re^{i\varphi})$， 依つて

$$\int_0^{\vartheta}|g(re^{i\varphi})|\,d\varphi$$

は $r<1$ に対して一様に絶対連続である， 従つて $0 \leqq \log^+|g| \leqq |g|$ より

$$\int_0^{\vartheta}\log|g(re^{i\varphi})|\,d\varphi$$

は $r<1$ に対して一様に絶対連続，従つて $\psi^+(\vartheta)$ は絶対連続である ( Nevanlinna [1]，p. 194)． 依つて，その導函数が殆ん

ど到る処零となる函数

$$\psi_0(\vartheta) = \psi(\vartheta) - \int_0^{\vartheta} \psi'(\varphi)\,d\varphi$$

は非減少である。 最後に，殆んど到る処 $\lim_{r\to 1} \log|g(re^{i\varphi})| = \log|g(e^{i\varphi})|$ であるから，

$$\psi(\vartheta) = \int_0^{\vartheta} \log|g(e^{i\varphi})|\,d\varphi + \psi_0(\vartheta).$$

以上より $d\vartheta = \frac{du}{1+u^2}$ に注意し，$\vartheta = 0$ に於ける $\psi_0(\vartheta)$ の跳びを $\beta$ として，求むる式を得る。 （終）

補助定理 6．3． $f^*(t)$ を $t > 0$ に対して定義された平方平方可積分複素函数とする， 補助定理 6．1．で定義された函数

$$f(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} e^{-itw} f^*(t)\,dt \qquad (w = u + iv)$$

に対して表現

$$f(w) = \exp\left\{-\frac{1}{\pi i}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1+tw}{t-w}\,\frac{\log|f(t)|}{1+t^2}\,dt + i\alpha_f\right\}$$

が成立するためには

$$g^*(t) = \int_0^{\infty} f^*(u)\,h^*(u+t)\,du = 0 \qquad \text{for all } t > 0$$

なる如き同じく $t > 0$ に対して定義された恒等的には零でない平方可積分函数 $h^*(t)$ が存在しないことが必要且つ充分である。

証　明． 必要．直接にも出来るが，§ 6．7．を見よ．

充分． $t < 0$ に対して $h^*(t) \equiv 0$ とおけば，$g^*(t)$ は $t < 0$ に対しても定義される。 $f^*, h^* \in L_2$ より $g^*(t)$ は凡ての $t$ に対して有界である． 同じく $t < 0$ に対して $f^*(t) = 0$ と定義出来る。 更に

$$\begin{cases} h(w) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{itw} h^*(t)\,dt & (v > 0) \\ q(w) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{itw} q^*(t)\,dt & (v < 0) \end{cases}$$

と書く， 補助定理 6.1. により殆んど到る処

$$\lim_{v\to 0} f(w) = f(u), \quad \lim_{v\to 0} h(w) = h(u).$$

さて假定により Parseval の等式

$$q^*(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itu} f(u) h(u)\,du$$

が成立する。 $f(t)h(t) \in L_1$ であるから，補助定理 6.1 により

$$q(u) = \lim_{v\to 0} q(u+iv) = f(u)h(u).$$

$q(w)$ は $v<0$ に対して解析的で補助定理 6.2. の形に表現可能である， $h(w)$ は $v>0$ に対して解析的であるから， $\overline{h(\overline{w})}$ は，$v<0$ に対して解析的で明かに補助定理 1 の條件を満足し従つて補助定理 6.2. の形に表現可能である， 依つて， $f(w)$ が本補助定理の表現を有するならば

$$\Phi(w) = \overline{h(\overline{w})}\,\frac{q(w)}{f(w)}$$

$$= \Pi_h(w)\cdot\Pi_q(w)\cdot\exp\Big\{-\frac{1}{\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1+tw}{t-w}\times$$

$$\frac{\log|h(t)|+\log|q(t)|-\log|f(t)|}{1+t^2}\,dt + \frac{1}{\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1+tw}{t-w}\,d(\chi_h(t)+\chi_q(t)) - i(\beta_h+\beta_q)w$$

$$+ i(\alpha_h+\alpha_q+\alpha_f)\Big\}$$

を得る， 但しこゝで $\Pi_h(w), \Pi_q(w)$ は Blaschke product， $\chi_h(t)+\chi_q(t)$ は非減少， $\beta_h+\beta_q \geq 0$ である， 即ち $\Phi(w)$ は補助定理 6.2. の形に表現可能で，殆んど到る処境界値

$$\Phi(u) = \lim_{v \to 0} \Phi(u+iv) = \overline{h(u)}\,\frac{g(u)}{f(u)} = |h(u)|^2$$

を有する。 $h(u) \in L_2$ だから，$\Phi(u) \in L_1$，従って補助定理 6.1 及び 6.2. により $\Phi(w)$ は $t < 0$ に対して $= 0$ である Fourier 変換 $\Phi^*(t)$ を有する. 一方，上式より $\Phi(u)$ は実数，従つて $\Phi^*(-t) = \overline{\Phi^*(t)}$，依つて $\Phi^*(t) \equiv 0$， 従つて $\Phi(u) \equiv 0$，$h(u) \equiv 0$； 従つて $h^*(t) \equiv 0$. （終）

§ 6.7. $\xi(S)$ を § 6.5.（＊＊＊）が成立する homogeneous random spectralfunction とする. 然る時は常に $L_2(x;t) \subseteqq L_2(\xi;t)$ であるから，$x(t)$ と $\xi(S)$ とが gleichförmig zusammengeordnet であるのは $L_2(\xi;t)$ の中に $L_2(x;t)$ と直交する元が無い時且つその時に限る。

$L_2(\xi;t)$ のどの元も

$$z = \int_{-\infty}^{t} f(u)\,d\,\xi(u)$$

なる形に表現可能であるから， $u \leqq t$ に対して

$$E\{x(u)\bar{z}\} = \int_{-\infty}^{u} g(u-v)\overline{f(v)}\,dv = \int_{0}^{\infty} g(v)\overline{f(u-v)}\,dv.$$

$z \perp L_2(x;t)$ ならば，この式は凡ての $u \leqq t$ に対して 0 とならねばならぬ. $\overline{f(t-v)} = h(v)$ と書けば，$z \perp L_2(x;t)$ から凡ての $u > 0$ に対して

$$\int_0^{\infty} g(v)\overline{h(u+v)}\,dv = 0.$$

かゝる性質の $h(v)$ が存在しない時且つその時にのみ $L_2(x;t) = L_2(\xi;t)$ である. しかるに補助定理 6.3. により，かうなるためには

$$G(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} e^{-itw} g(t)\,dt$$

に対して表現

$$G(w)=\exp\left\{-\frac{1}{\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1+tw}{t-w}\frac{\log|G(t)|}{1+t^2}dt+i\alpha\right\}$$

が存在すれば充分である。しかるに $G(u)$ は $g(t)$ の Fourier 変換で従って（＊＊＊）により殆んど到る処

$$|G(\lambda)|^2=F_x'(\lambda)$$

を満足する。即ち因数 $e^{i\alpha}$ を無視すれば

$$G_0(w)=\exp\left\{-\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1+\lambda w}{\lambda-w}\frac{\log F_x'(\lambda)}{1+\lambda^2}d\lambda\right\}$$

が唯一の G－函数である。対応する g－函数 $g_0$ と書けば，

$$x(t)=\int_{-\infty}^{t}g_0(t-u)\,d\xi_0(u)$$

なる如き homogeneous random spectralfunction $\xi_0(S)$ が存在する。しかも $\xi_0(S)$ と $x(t)$ とは gleichförmig zusammengeordnet である。$\xi_0^*(S)$ と $g_0(t)$ とが（因数 $e^{i\alpha}$ を除いて）一意的に決定されることを既に知つてゐる。これより特に補助定理 6.3. に於ける充分條件が亦必要であることが分る．

補助定理 6，2．により，対応する G－函数を

$$G(w)=G_0(w)\cdot\Pi(w)\cdot\exp\left\{\frac{1}{\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1+\lambda w}{\lambda-w}\,d\chi(\lambda)-i\beta w+i\alpha\right\}$$

から決定するならば，（＊＊＊）が成立する凡ての函数 $g(t)$ を得る．但しこゝで $\Pi(w)$，$\chi(\lambda)$，$\beta$ は補助定理 6．2．の條件を満足せねばならぬがその他は全く任意に選んでよい。

最後に，random spectralfunction $\xi(S)$，特に $\xi_0(S)$ に対する表現を構成して見る．

$F_x$ の絶対連続性により，$G(w)$ を上式により決定するならば，$|G(\lambda)|^2=F_x'(\lambda)$ であるから，

$$\xi^*(S)=\int_S\frac{dZ_x(\lambda)}{G(\lambda)}$$

によって homogeneous random spectralfunction が定義されることが分る。 実際：

$$\| \xi^*(S) \|^2 = \int_S \frac{dF_x(\lambda)}{|G(\lambda)|^2} = \int_S \frac{dF_x(\lambda)}{F_x'(\lambda)} = \sigma(S).$$

$\xi^*$ の Fourier 変換を $\xi$ とすれば，定理 6.4. により，$G(w)$ が上式により定義されてゐるならば，$G(\lambda)$ の Fourier 変換 $g(t)$ は $t<0$ に対して零となるから

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda} dZ_x(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda} G(\lambda) d\xi^*(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t-u)\, d\xi(u)$$

$$= \int_{-\infty}^{t} g(t-u)\, d\xi(u).$$

以上まとめて；

定 理 6. 5. 連続な定常 random function $x(t)$ が purely indeterministic であるためには，そのスペクトルが絶対連続且つ完備で積分

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\log F_x'(\lambda)|}{1+\lambda^2} d\lambda$$

が収斂することが必要且つ充分である。 この條件は $x(t)$ が

$$x(t) = \int_{-\infty}^{t} g(t-u)\, d\xi(u)$$

なる形に表現可能であると云ふ條件と等意である，但しこゝで $\xi(S)$ は $x(t)$ と zusammengeordnet な homogeneous random spectralfunction である．

$$g(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t} G(\lambda) d\lambda$$

$$\xi(S) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_S e^{it\lambda} dt \right\} . \frac{dZ_x(\lambda)}{G(\lambda)}$$

とおけば，凡てのかゝる表現を得る。　但し

$$G(\lambda)=\lim_{\mu\to 0} G(\lambda+i\mu)$$

で且つ $G(\lambda+i\mu)=G(w)$ は $\mu<0$ に対して

$$\begin{cases} G(w)=G_0(w)\cdot\Pi(f)\cdot\exp\left\{\frac{1}{\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1+\lambda w}{\lambda-w}\,d\chi(\lambda)-i\beta w+i\alpha\right\}, \\ G_0(w)=\exp\left\{-\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1+\lambda w}{\lambda-w}\;\frac{\log F_x'(\lambda)}{1+\lambda^2}\,d\lambda\right\} \end{cases}$$

によって決定される。　$\xi(s)$ は $x(t)$ と gleichförmig zusammengeordnet である如くに選ぶことが出来る，そして $G(w)=G_0(w)$ と取れば対応する表現を得る．　この最後の表現

$$x(t)=\int_{-\infty}^{t} g_0(t-u)\,d\,\xi_0(u)$$

は因数 $e^{i\alpha}$ を除いて一意的に決定される。

この定理の系として

定　理　6．6．　連続な定常 random function $x(t)$ の成分分解に於て，成分 $x_2(t)$ 及び $x_3(t)$ は deterministic である．

成分 $x_1(t)$ は積分

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{|\log F_x'(\lambda)|}{1+\lambda^2}\,d\lambda$$

の收斂，発散に従って夫々 purely indeterministic, deterministic である．　$x_1(t)$ は完備且つ絶対連続なスペクトルを有する唯一の定常成分であるから，$x_1(t)$ は purely indeterministic となり得る所の唯一の定常成分でもある．　特に，purely indeterministic な random function $x(t)$ の各定常成分は（trivial な $x(t)$ それ自身の場合を除いて）deterministic である．

§　6．8．　$x(t)$ を連続な定常 random function とする．$x(t)$ の linear extrapolation の問題は $\|x(t)-z\|\ (t>s)$ を

minimum ならしめる $z \in L_2(x;s)$ を見出すことである。

この minimum は $\hat{z} = P_{L_2(x;s)}x(t)$ によつて達せられる。
しかるに定理6．5．及び 6．6．より直ちに

$$P_{L_2(x;s)}x(t) = x_2(t) + x_3(t) + \int_{-\infty}^{s} g_0(t-u)\,d\xi_0(u).$$

即ち extrapolation の誤差は

$$x(t) - P_{L_2(x;s)}x(t) = \int_{s}^{t} g_0(t-u)\,d\xi_0(u).$$

そしてそのノルムの平方は

$$D_x(t-s) = \left\| \int_s^t g_0(t-u)\,d\xi_0(u) \right\| = \int_0^{t-s} |g_0(u)|^2 du.$$

$D_x(t) \equiv 0$ ならば，$x(t)$ は deterministic である。
また $D_x(t)$ は非減少函数で exptrapolation の不正確さをはかる measure である。

以　　上．

# 文　献


S. Bochner : [1] Vorlesugen über Fouriersche Integrale, (1932)

H. Bohr : [1] Vorlesungen über die fastperiodischen Funktionen, (19 )

H. Cramér : [1] Random variable and probability distributions, (1937)

—— : [2] On the theory of stationary process, Ann. of Math., vol. 41 (1940)

—— : [3] On the harmonic analysis in certain functional space Arkiv. f. math.-astron. O. fysik, vol. 28 (1942)

J. L. Doob : [1] Stochastic processes depending on a continuous parameter, Trans. of the Amer. Math. Soc., vol. 42 (1937)

—— : [2] The Brownian movement and stochastic equations, Ann. of Math., vol. 43 (1942)

—— : [3] The Elementary Gaussian processes, Ann. of Math. Stat, vol. 15 (1944)

—— : [4]* Time series and harmonic analysis, Proc. of the Barkly Symp. (1949)

J. L. Doob and W. Ambrose : [1] On two formulation of the theory of stochastic processes depending upon a continuous parameter, Ann. of Math., vol. 41 (1940).

M. Frechét : [1] Généralités sur les probabilites; et Théorie des événements en chaine le cas d'un nombre fini d'états possibles, vol. I. (1937), vol. II. (1938).

O. Hanner : [1]* Deterministic and non-deterministic stationary random processes, Arkiv f. Mat. vol. 1 (1949).

E. Hille and J. D. Tamarkin : [1] A theorem of Paley and Wiener, Ann. of Math., vol. 34 (1933).

—— : [2] On the absolutely integrability of Fourier-transforms, Fund. Math., vol. 25 (1935).

E. Hopf : [1] Ergodentheorie, (1937).

B. Jessen : [1] Abstract mall-og Integralteori, Kφbenhaven, (1947).

K. Karhunen : [1] Zur Spektraltheorie stochastischer stationärer Prozesse, Ann. Ac. Sci. Fennicae. A. I., 34, Helsinki, (1946).

—— [2] Lineare Transformationen stationärer stochastischer Prozesse, X- Skand. Mat. Kongr. Kφbenhaven, (1946).

A. Khintchine : [1] Korrelationstheorie der stationären stochastischen Prozesse, Math. Ann. vol. 109 (1934).

A. Kolmogoroff : [1] Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung, (1932)

—— : [2] Stationäre Folge in einem Hilbertschen Raum (in russian), Bull. de l'Universide de Moscou, vol. 2. (1941).

—— : [3] Intrapolation und Extrapolation von stationären zufalligen Folgen, Bull. Acad. Sci. URSS, Sér. Math., vol. 5 (1941)

P. Lévy : [1] Théorie de l'addition des variables aleatoires, (1937)

—— : [2]* Processus stochastiques et mouvement

Brownien, (1948)

H. Löwig : [1] Komplexe euklidische Räume von beliebiger oder transfiniter Dimensionszahl, Acta Litt. Sci. Szeged. vol. 7 (1934).

G. Maruyama : [1]* The harmonic analysis of stationary stochastic processes, Memoirs of the Faculty of Sci. Kyūsyū univ. vol. III. (1943).

J. v. Neuman : [1] Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik, (1932)

R. Nevanlinna : [1] Eindeutige analytische Funktionen (1936)

R. E. A. C. Paley and N. Wiener : [1] Fourier Transforms in the complex domain, (1934).

F. Riesz : [1] Zur Theorie des Hilbertsche Raumes, Acta. Litt. Sci. Szeged vol. 7 (1934).

S. Saks : [1] Theory of the integral. (1937).

E. Slutsky : [1] Alcune applicazioni dei coefficienti di Fourier all'analisi delle funzioni aleatorie stazionarie, Gior. Inst. Ital. Attuari, vol. 5 (1934)

—— : [2] Sur les fonctions aléatoires presque périodiques et sur la décompositions des fonctions aléatoires stationnaires en composantes, Actualités Sci. et ind., 738 (1938).

M. H. Stone : [1] Linear transformations in Hilbert space and their applications to analysis, (1932)

N. Wiener : [1] R. E. A. C. Paley and N. Wienerを見よ.

—— : [2]* Extrapolation, interpolation and smoothing of stationary time series, (1949)

H. Wold : [1] A Study in the Analysis of stationary time series, (1937).

* 印は筆者の追加したものである。