⑳ A.S. BERRY の論文に関する注意

高野 金作

A. S. Berry はその論文
The accuracy of the Gaussian approximation to the sum of independent variables, Trans. A. M. S. vol. 49 pp. 122 − 136
に於て次の定理を証明した。

X_1, X_2, ……, X_n を独立な確率変数とし，各 X_k は何れも有限な三次の絶対能率を有するものとする。

$S = X_1 + X_2 + \cdots\cdots + X_n$ とおく。

一般性を失ふことなく

$$E(X_k) = 0, \qquad k = 1, 2, \cdots, n.$$

$$\sigma(S) = 1$$

と仮定し

$$\lambda_k = \begin{cases} E(|X_k|^3) \big/ E(X_k^2), & (E(X_k^2) \neq 0 \text{ の時}), \\ 0, & (E(X_k^2) = 0 \text{ の時}). \end{cases}$$

$$\frac{\max(\lambda_1, \lambda_2, \cdots\cdots, \lambda_k)}{\sigma(S)} = \varepsilon$$

とおき，更に S の分布函数を $F(x)$，平均値 0，分散 1 なる正規分布函数を $G(x)$ とし

$$M = \sup_x | F(x) - G(x) |$$

とおけば，次の不等式が成立つ

定　理　1.　$M \leqq 1.88\ \varepsilon.$

証明は次の不等式による。

$$(1)\quad A\left(\sqrt{\frac{\pi}{2}}\cdot\frac{\tau}{\varepsilon}\cdot M\right) \leqq \int_0^{\frac{\tau}{\varepsilon}}\left(\frac{\tau}{\varepsilon}-t\right)\frac{e^{t^2 h(\varepsilon t)}-1}{t}e^{-\frac{t^2}{2}}dt,$$

$0<\tau<\sqrt{2}$

茲に

$$A(u)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot u\cdot\left\{3\int_0^u\frac{1-\cos x}{x^2}dx-\pi\right\},$$

$$h(x)=\frac{x}{6}-\frac{1}{x^2}\left\{\log\left(1-\frac{x^2}{2}\right)+\frac{x^2}{2}\right\}$$

$M \leqq 1$　であるから吾々は　$\varepsilon < \frac{1}{1.88}$ と假定して差支えない。Berry の原論文によれば

$$(2)\quad \begin{cases} \tau = 1.1 \quad \text{とすれば，} \quad \varepsilon < \frac{1}{1.85} \quad \text{として} \\ (1)\ \text{の右辺} < \frac{1.1}{6}\sqrt{\frac{\pi}{2}} < 0.2298 \end{cases}$$

一方

$$A(2.59) > 0.2298$$

故に

$$A\left(\sqrt{\frac{\pi}{2}}\cdot\frac{1.1}{\varepsilon}\cdot M\right) < A(2.59)$$

$A(u)$ は　$A(u)>0$ なる範囲では，u について単調増加であるから，

$$\sqrt{\frac{\pi}{2}}\cdot\frac{1.1}{\varepsilon}\cdot M < 2.59$$

これから

$$M < 1.88\ \varepsilon$$

を得る。

然しながら上の (2) には計算の間違いがある様に思われる。

単に計算の間違ひに過ぎないのであるけれども，実際 Berry の定理を用いる場合に，$M \leqq k\varepsilon$ なる定数 k の存在だけでなしに，その値が物を云ふことがあるかも知れぬので，検算しておくのも無駄ではないであろう。

Berry は

$$B = \int_0^{\frac{1.1}{\varepsilon}} \left(\frac{1.1}{\varepsilon} - t\right) \frac{e^{t^2 h(\varepsilon t)} - 1}{t} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

を次の三つの部分に分けた。

$$B = B_1 + B_2 + B_3$$

茲に $c = 0.75$ として

$$B_1 = \frac{\varepsilon}{6} \int_0^{c/\varepsilon} \left(\frac{1.1}{\varepsilon} - t\right) t^2 e^{-\frac{t^2}{2}} dt,$$

$$B_2 = \int_0^{c/\varepsilon} \left(\frac{1.1}{\varepsilon} - t\right) \frac{e^{t^2 h(\varepsilon t)} - 1 - \frac{1}{6}\varepsilon t^3}{t} e^{-\frac{t^2}{2}} dt,$$

$$B_3 = \int_{c/\varepsilon}^{1.1/\varepsilon} \left(\frac{1.1}{\varepsilon} - t\right) \frac{e^{t^2 h(\varepsilon t)} - 1}{t} e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

問題は B_2 の評価にある。　$t > 0$ を固定して

$$\frac{1}{\varepsilon^2}\left(e^{t^2 h(\varepsilon t)} - 1 - \frac{\varepsilon t^3}{6}\right)$$

を $0 < \varepsilon < \frac{\sqrt{2}}{t}$ で定義された ε の函数と考えると，これは単調増加である。　ε について正係数の巾級数に展開されるからである。　B_2 の積分区間では $\varepsilon \leqq \frac{c}{t}$ であるから

$$\frac{1}{\varepsilon^2}\left(e^{t^2 h(\varepsilon t)} - 1 - \frac{\varepsilon t^3}{6}\right) \leqq \frac{t^2}{c^2}\left(e^{t^2 h(c)} - 1 - \frac{c t^2}{6}\right)$$

依って

$$B_2 \leqq \int_0^{1.1/\varepsilon}\left(\frac{1.1}{\varepsilon}-t\right)\cdot\frac{\varepsilon^2}{c^2}\cdot t\left(e^{t^2h(c)}-1-\frac{ct^2}{6}\right)e^{-\frac{t^2}{2}}dt$$

$$\leqq \int_0^{1.1/\varepsilon}\left(\frac{1.1}{\varepsilon}-t\right)\frac{\varepsilon^2}{c^2}t\left(e^{t^2h(c)}-1-\frac{ct^2}{6}\right)e^{-\frac{t^2}{2}}dt \equiv B_2''$$

原論文 P. 132 にはこの最後の積分に部分積分を施して

$$B_2'' = \frac{1.1\varepsilon}{c^2}\left\{\frac{1}{\sqrt{1-2h(c)}}-1-\frac{c}{3}\right\}$$
$$-\frac{\varepsilon}{c}\int_0^{1.1/\varepsilon}\left\{\frac{e^{t^2h(c)}}{\sqrt{1-2h(c)}}-1-\frac{c}{3}-\frac{ct^2}{6}\right\}e^{-\frac{t^2}{2}}dt$$

を得る様に書いてあるけれども，これは間違いで，実際は

$$(3)\quad B_2'' = \frac{1.1\varepsilon}{c^2}\left\{\frac{1}{1-2h(c)}-1-\frac{c}{3}\right\}$$
$$-\frac{\varepsilon^2}{c^2}\int_0^{1.1/\varepsilon}\left\{\frac{e^{t^2h(c)}}{1-2h(c)}-1-\frac{c}{3}-\frac{ct^2}{6}\right\}e^{-\frac{t^2}{2}}dt$$

となる。　部分積分によって得られる等式

$$\int_0^a(a-t)te^{-\frac{bt^2}{2}}dt = \frac{a}{b}-\frac{1}{b}\int_0^a e^{-\frac{bt^2}{2}}dt,$$

$$\int_0^a(a-t)t^3e^{-\frac{t^2}{2}}dt = 2a-2\int_0^a e^{-\frac{t^2}{2}}dt-\int_0^a t^2e^{-\frac{t^2}{2}}dt$$

を B_2'' に適用すればよい。

(3) の右辺の積分中の｛　｝内を $f(t^2)$ とおけば

$$f(t^2) = \frac{e^{t^2h(c)}}{1-2h(c)}-1-\frac{c}{3}-\frac{ct^2}{6}$$

$h(c) > \frac{c}{6}$ であるから，$h(c) < \frac{1}{2}$ でさえあれば，$f(t^2)$ は t^2 について単調増加で，且つ

$$f(0) = \frac{1}{1-2h(c)}-1-\frac{c}{3} > \frac{1}{1-\frac{c}{3}}-1-\frac{c}{3} > 0$$

であるから，すべてのt^2について $f(t^2)>0$．故に

(4) $$h(c)<\frac{1}{2}$$

ならば，次の不等式が成立つ．

(5) $$B_2''<\frac{1.1\varepsilon}{c^2}\left\{\frac{1}{1-2h(c)}-1-\frac{c}{3}\right\}$$

Berry に従つて $c=0.75$ とおくと

$$B_2''<0.968\varepsilon$$

を得る。これが Berry の原論文では

$$B_2\leqq 0.134\varepsilon$$

となつている。

B_1 については

$$\int_a^\infty t^3e^{-\frac{t^2}{2}}dt=\int_a^\infty(at^2+2t-a)e^{-\frac{t^2}{2}}dt$$

なることに注意して

$$B_1=\frac{\varepsilon}{6}\int_0^{c/\varepsilon}\left(\frac{1.1}{\varepsilon}-t\right)t^2e^{-\frac{t^2}{2}}dt$$

$$=\frac{1}{6}\int_0^\infty(1.1-\varepsilon t)t^2e^{-\frac{t^2}{2}}dt-\frac{1}{6}\int_{c/\varepsilon}^\infty(1.1-\varepsilon t)t^2e^{-\frac{t^2}{2}}dt$$

$$=\frac{1.1}{6}\sqrt{\frac{\pi}{2}}-\frac{\varepsilon}{3}-\frac{1}{6}\int_{c/\varepsilon}^\infty\left[(1.1-c)t^2-2\varepsilon t+c\right]e^{-\frac{t^2}{2}}dt$$

を得る。(Cf. P.L. Hsu, Ann. Math. Soc., vol. XVI, NO.1)

積分区間内で

$$(1.1-c)t^2-2\varepsilon t+c\geqq 0$$

なるための條件は

(6) $$(1.1-c)c-\varepsilon^2\geqq 0$$

この條件の下に

(7) $B_1 < \frac{1.1}{6}\sqrt{\frac{\pi}{2}} - \frac{\varepsilon}{3}$

原論文では $\varepsilon < \frac{1}{1.88}$ ， $C = 0.75$ であるが，これから (6) は必ずしも云えない。

B_3 については原論文通り

$$(8) \quad B_3 \leqq \frac{\varepsilon}{C}\int_C^{1.1}\left(\frac{1.1}{u}-1\right)\frac{du}{H(u)},$$

$$H(u) = u^2 - \frac{u^3}{6} + \log\left(1-\frac{u^2}{2}\right)$$

$H'(u)$ は $0 < u < \sqrt{2}$ に於て只一根をもつ、それを u' とすると $0.8 < u' < 1$.

$0 < u < u'$ では $H(u)$ は単調増加

$u' < u < \sqrt{2}$ では $H(u)$ は単調減少

$0 < u \leqq 1.1$ に於て $H(u) > 0$

1.1 と 1.2 との間に $H(u)$ は零点を有するから（8）を利用するとすれば，（1）に於てては 1.1 よりも余り大きくすることは出来ない。

条件 (4), (6) の下に (5), (7), (8) が成立つ．（5）の右辺を小さくするには，C を小さくすればよいが，C を小さくすると（8）の右辺は大きくなる。 $\varepsilon < \frac{1}{2}$ ，$C = 0.65$ とおいて計算すると

$h(0.65) < 0.170005$
$H(0.65) > 0.139423$

を用いて

$B_1 < \frac{1.1}{6}\sqrt{\frac{\pi}{2}} - \frac{\varepsilon}{3}$

$B_2 < 0.7772\,\varepsilon$

$$B_3 < 0.3465\,\varepsilon$$

$$\therefore\ B < 0.2298 + \varepsilon\left(-\frac{1}{3} + 0.7772 + 0.3465\right)$$

$\varepsilon < \frac{1}{2}$ であるから

$$B < 0.6250$$

然るに $A(2.8) > 0.6250$

$$A\left(\sqrt{\frac{\pi}{2}}\cdot\frac{1.1}{\varepsilon}\cdot M\right) < 0.6250 < A(2.8)$$

$$\therefore\ \sqrt{\frac{\pi}{2}}\cdot\frac{1.1}{\varepsilon}M < 2.8$$

従って

$$M < 2.031\,\varepsilon$$

Berry の定理 1 は成立するかも知れないけれども，上記の計算によれば，次の様に改めた方が無難であろう。

定理 1′ $M < 2.031\,\varepsilon$

もっと計算をやってみれば，ε の係数はもっと小さくすることが出来るであろう。 せめて $M < 2\varepsilon$ にしたいものである。

定理 1 の定数を以上の様に変えねばならないならば，原論文の §4，の三つの定理の定数も計算し直さねばならないであろう。

定理 1 に於て $M \leqq k\varepsilon$ なる定数 k の存在だけが問題ならば次の様にすればよい。 不等式 (1) に於て τ の値を $h(\tau) < \frac{1}{2}$ なる様にきめておく、 $t > 0$ を固定すれば

$$\frac{e^{t^2 h(\varepsilon t)} - 1}{\varepsilon}\ ; \qquad \left(0 < \varepsilon < \frac{\sqrt{2}}{t}\right),$$

は ε について単調増加であるから，(1) の右辺の積分区間内では

$$\frac{1}{\varepsilon}\left(e^{t^2 h(\varepsilon t)} - 1\right) \leqq \frac{t}{\tau}\left(e^{t^2 h(\tau)} - 1\right)$$

が成立つ。 従つて(1)の右辺を B とおけば

$$B \leqq \int_0^{\frac{\tau}{\varepsilon}} \left(1-\frac{\varepsilon}{\tau} t\right)\left(e^{t^2 k(\tau)}-1\right) e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

$$< \int_0^{\frac{\tau}{\varepsilon}} e^{-\frac{t^2}{2}(1-2k(\tau))} dt < \int_0^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}(1-2k(\tau))} dt$$

$$= \sqrt{\frac{\pi}{2(1-2k(\tau))}}$$

そこで

$$A(u) > \sqrt{\frac{\pi}{2(1-2k(\tau))}}$$

なる u をとれば

$$A\left(\sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{\tau}{\varepsilon} \cdot M\right) \leqq A(u)$$

従つて

$$\sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{\tau}{\varepsilon} \cdot M \leqq u$$

然るに u は M, ε に無関係な定数であるから

$$M \leqq k\varepsilon$$

なる定数 k の存在が証明された。

(1949. 11. 28)

おことわり：— この小文は大分前に書いたのですが，中途半端であるので，公表するのを差控えていました。 然し，今の私にはこんな計算をやれる見込はありません。 原論文の結果は時々引用されていることもありますので，何かのお役に立てばと思ってここに載せていたゞくことにしました。

(1951. 4. 1)