⑫ 卵形線に交はる直線に就て

山形大学文理学部助教授

逸見　傳三郎

「互に外部にある三つの卵形線 C_1, C_2 C_3 があるとき C_1 に交る直線が他の C_2 C_3 とも同時に交る確率を求む」　と云ふ問題を窪田先生よりお聞きしたので次に簡単にその解を記さして戴こうと思ひます。

この問題に於て直線の Hesse 座標（即ち原点からその直線に至る垂線距離を p，その直線が X 軸となす角を θ とする時）（ p, θ ）を確率変数にとるものとし，卵形線 C_i $(i=1,2,3)$ に交る直線全体の集合 A_i，之に含まれる直線の Hesse 座標を直角座標の点座標にもつ点の領域を ω_i とする時 A_i の測度 $m(A_i)$ は

$$m(A_i) = \int_{\omega_i} dp\,d\theta \quad \cdots\cdots\cdots \quad (1)$$

$$i = 1, 2, 3$$

で定義されるものと仮定します。

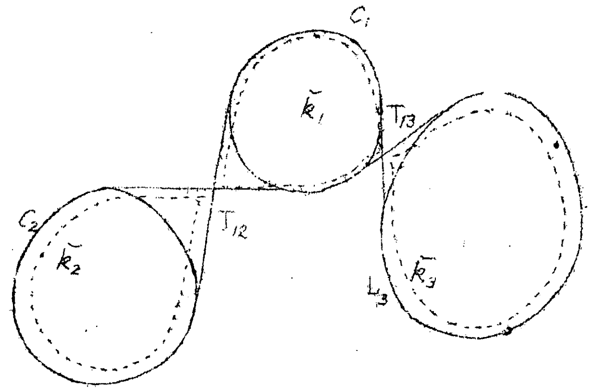
さて卵形線 C_i の支持函数を $H_i(\theta)$ とすれば（1）を p について積分すれば

$$m(A_i) = \int_0^{\pi} \left\{ H_i(\theta) + H_i(\theta+\pi) \right\} d\theta \quad \cdots\cdots \quad (2)$$

更に卵形線 C_i の周を l_i とすれば Crofton の定理により（2）

の左辺は ℓ_i に等しい故

$$m(A_i) = \ell_i \quad \cdots\cdots (3)$$
$$(i = 1, 2, 3)$$



第　一　図

次に，卵形 C_1 と卵形 C_2 及び卵形 C_1 と卵形 C_3 との共通内接線の交点を夫々 T_{12}, T_{13} とし，C_1 と二点 T_{12}, T_{13} を含む最小の周を有する卵形線を $\tilde{k}_1$，卵形 C_2 と点 T_{12} を含む周の最小なる卵形線を $\tilde{k}_2$，C_3 と T_{12} を含む最小の周を有する卵形を $\tilde{k}_3$ とす。（$\tilde{k}_1$，$\tilde{k}_2$，$\tilde{k}_3$ は夫々第一図に於ける点線で縁取った卵形線である）　之等 $\tilde{k}_i$ ($i = 1, 2, 3$) に交る直線全体の集合を夫々 B_i ($i = 1, 2, 3$) とすれば，集合 ($A_1 \cap A_2 \cap A_3$) と集合 ($B_1 \cap B_2 \cap B_3$) が一致する事は幾何学的に明らかである。　従て

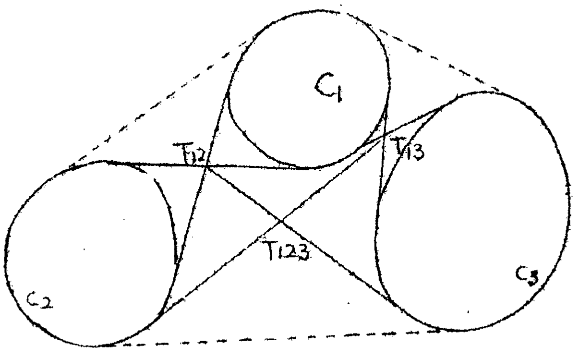
$$m(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = m(B_1 \cap B_2 \cap B_3) \quad \cdots\cdots (4)$$

然るに任意の三つの集合 B_1 B_2 B_3 の間に

$$m(B_1 \cup B_2 \cup B_3) = m(B_1) + m(B_2) + m(B_3) - m(B_1 \cap B_2)$$
$$- m(B_1 \cap B_3) - m(B_2 \cap B_3)$$
$$+ m(B_1 \cap B_2 \cap B_3)$$

なる関係がある故 (4) の式は

$$m(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = m(B_1 \cup B_2 \cup B_3) - m(B_1) - m(B_2) - m(B_3)$$
$$+ m(B_1 \cap B_2) + m(B_2 \cap B_3) + m(B_3 \cap B_1) \qquad \cdots\cdots\cdots (6)$$



第二図

今 L（P, Q, R ……）なる記号により P, Q, R …… を含む最小の周を有する卵形線の周を表す事にすれば，（3）を得たと同様にして

$$m(B_i) = L(\bar{R}_i) \qquad \cdots\cdots (7)$$

$$m(B_1 \cup B_2 \cup B_3) = L(\bar{R}_1\ \bar{R}_2\ \bar{R}_3) \qquad \cdots\cdots (8)$$

$L(\bar{R}_1\ \bar{R}_2\ \bar{R}_3)$ は第二図の点線で $C_1\ C_2\ C_3$ の間を結んだ卵形線の周で $L(C_1\ C_2\ C_3)$ に一致する。

従って（7）及（8）は

$$\left.\begin{aligned} m(B_1) &= L(C_1\ T_{12}\ T_{13}) \\ m(B_2) &= L(C_2\ T_{12}) \\ m(B_3) &= L(C_3\ T_{13}) \end{aligned}\right\} \qquad \cdots\cdots\cdots (7)'$$

$$m(B_1 \cup B_2 \cup B_3) = L(C_1 C_2 C_3) \qquad \cdots\cdots\cdots (8)'$$

二つの細形線に交る直線の測度は

$$
\left.\begin{aligned}
m(B_1 \cap B_2) &= L(C_1 T_{12} T_{13}) + L(C_2 T_{12}) - L(C_1 C_2) \\
m(B_1 \cap B_3) &= L(C_1 T_{12} T_{13}) + L(C_3 T_{13}) - L(C_1 C_3) \\
m(B_2 \cap B_3) &= L(C_2 T_{12} T_{123}) + L(C_3 T_{13} T_{123}) - L(C_2 C_3 T_{12} T_{13})
\end{aligned}\right\}
$$

-------- (9)

こゝに T_{123} は $\bar{K}_2$ と $\bar{K}_3$ の共通内接線の交点である.
(7)' (8)' 及び (9) を (6) に入れれば

$$
\begin{aligned}
m(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = {} & L(C_1 C_2 C_3) - L(C_1 T_{12} T_{123}) - L(C_2 T_{12}) - L(C_3 T_{13}) \\
& + L(C_1 T_{12} T_{13}) + L(C_2 T_{12}) - L(C_1 C_2) \\
& + L(C_1 T_{12} T_{13}) + L(C_3 T_{13}) - L(C_1 C_3) \\
& + L(C_2 T_{12} T_{123}) + L(C_3 T_{13} T_{123}) - L(C_1 C_2 T_{12} T_{13})
\end{aligned}
$$

整頓すれば

$$
\begin{aligned}
= {} & L(C_1 C_2 C_3) - L(C_1 C_2) - L(C_1 C_3) + L(C_1 T_{12} T_{13}) \\
& + L(C_2 T_{12} T_{123}) + L(C_3 T_{13} T_{123}) - L(C_1 C_2 T_{12} T_{13})
\end{aligned}
$$

故に求むる確率は

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{m(A_1)}\left\{m(A_1 \cap A_2 \cap A_3)\right\} = \frac{1}{L(C_1)} \Big\{ & L(C_1 C_2 C_3) - L(C_1 C_2) - L(C_1 C_3) + L(C_1 T_{12} T_{13}) \\
& + L(C_2 T_{12} T_{123}) + L(C_3 T_{13} T_{123}) - L(C_1 C_2 T_{12} T_{13}) \Big\}
\end{aligned}
$$

(終)