(21) 能率問題について

高野 金作

今更能率問題でもあるまいと御考えの読者もあるに違いないのだが，さういう専門家の為にではなく，去ば確率論の勉強途中にある人達の為に小文は書くのである。

東大教授河田敬義氏著「確率論」は P. Lévy 流の確率論を勉強するのに好都合であるだけでなく，絶えず，座右において参照するのにも便利な本であるが，印刷その他の誤りが少くないのが玉にきずであつた。

今度第三版（昭和26年3月1日）が出る運びになつて，既に店頭でもみかけるのであるが，それには正誤表が挿入されている。 これは，小生も関係したので諸賢の御批判を乞いたいのであるが，確率論の入門者にとつては有益であると信じている。（主な箇所は 179 頁定理（4.3）及び 246 頁定理（5.16）の証明）． その正誤表に「本文 102 頁所載の定理は成り立つか否か分らない」とあるけれども，実は成り立つのである。 この誤りは小生と著者との連絡の不充分によるものであるが，元来，同著の校正を引受けたのは，著者との私的関係によるのではなく，確率論の本の誤りを正すことによつて，幾分でもそれを読み易くしておくことは，確率統計の普及が当研究所の目的にも含まれている現状では，研究所としてもむしろ望ましいことだという考え，去ば公的関係によるのであるから，茲に，講究録の紙上をかりて，正誤表の誤りを正しておくことも許さるべきことだと思うのである。

能率問題について書いてある著書や論文は少くないのであるけれども，証明に誤りがあつたり（例えば，[2] M.G. Kendall），

記述が明確を欠いたり（例えば［3］P. Lévy）或は冗長であったり（例えば［1］H. Cramér，［4］A. Wintner）するので，

茲に簡単で厳密な証明を書いておくのは，以上の様な理由がないとしても無意味ではない。　以下の本文は，これらの本を参照しなくても読める様に書いて置いた。

すべての次数 n の能率 M_n が存在する様な一次元確率法則は，如何なる條件の下に，その能率の系列 $M_1, M_2, \cdots\cdots$ で一義で決定されるかという問題は確率論に於ても統計理論に於ても重要な問題である。　分布函数を $F(x)$ とし，n 次の能率及び絶対能率を M_n 及び $\overline{M_n}$ とおけば

$$M_n = \int_{-\infty}^{+\infty} x^n dF(x) ,$$

$$\overline{M_n} = \int_{-\infty}^{+\infty} |x^n| dF(x) .$$

確率法則は特性函数

$$(1) \qquad \varphi(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} dF(x)$$

によって一義に決定されるから，$\varphi(t)$ が $M_1, M_2, \cdots\cdots$ で一義に決定されるか否かについて考えればよい。　すべての M_n が存在する（換言すれば，すべての $\overline{M_n}$ が有限である）という假定の下に，$\varphi(t)$ は形式的にテイラー級数に展開される。

$$(2) \qquad \varphi(t) \sim 1 + M_1(it) + \frac{M_2}{2!}(it)^2 + \cdots + \frac{M_n}{n!}(it)^n + \cdots$$

若し右辺のテイラー級数が収斂するならば，その収斂半径 R は

$$(3) \qquad \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\frac{|M_n|}{n!}} = \frac{1}{R} < \infty$$

で與えられるわけであるが，茲では，慣例に従って，t は実変数として考えているのであるから，(2) の右辺が収斂しても，それ

がもとの函数 $\varphi(t)$ を表すとは即断出来ないのであるけれども，$\varphi(t)$ が特性函数である場合には收斂すれば，もとの函数を表すことが知られている。 実際次の定理が成立つ。

定 理 1. 若しもすべての次数の能率が存在して，(3)が成立するならば，$\varphi(t)$ は t を複素変数と考えて，$|\mathfrak{J}(t)|<R$（$\mathfrak{J}$ は 虚数部分を表す）で，t の正則函数となり，$\varphi(t)$ は $\{M_n\}$ より一義に決定される。

この定理を証明する爲に次の *Lemma* を証明しておく。

Lemma. すべての次数の能率が存在するならば

$$(4)\quad \overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{\frac{\overline{M}_n}{n!}}=\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{\frac{|M_n|}{n!}}=\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[2n]{\frac{M_{2n}}{(2n)!}}$$

証明 任意の正整数 n に対し

$$\overline{M}_n^{\frac{1}{n}}\leqq\overline{M}_{n+1}^{\frac{1}{n+1}}$$

であるから

$$(5)\quad \left(\frac{\overline{M}_n}{n!}\right)^{\frac{1}{n}}\leqq\left(\frac{\overline{M}_{n+1}}{(n+1)!}\right)^{\frac{1}{n+1}}\cdot\frac{(n+1)^{\frac{1}{n+1}}}{(n!)^{\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}}}$$

而して

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^{\frac{1}{n+1}}}{(n!)^{\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}}}=1$$

（これの証明には *Stirling* の公式を用いるに及ばない。

$n\geqq4$ として $2^n<n!<(n+1)^n$ 従って $2^{\frac{1}{n+1}}<(n!)^{\frac{1}{n(n+1)}}<(n+1)^{\frac{1}{n+1}}$ なることに注意すればよい。）

(5) に於て n を奇数又は偶数として $n\to\infty$ ならしめて得る二つの不等式から

$$\overline{\lim}\left(\frac{\overline{M}_{2n+1}}{(2n+1)!}\right)^{\frac{1}{2n+1}}=\overline{\lim}\left(\frac{\overline{M}_{2n}}{(2n)!}\right)^{\frac{1}{2n}}$$

を得るから

$$\overline{\lim}\left(\frac{\overline{M}_n}{n!}\right)^{\frac{1}{n}}=\overline{\lim}\left(\frac{M_{2n}}{(2n)!}\right)^{\frac{1}{2n}}$$

従つて，

$$\overline{\lim}\left(\frac{|M_n|}{n!}\right)^{\frac{1}{n}}\leqq\overline{\lim}\left(\frac{\overline{M}_n}{n!}\right)^{\frac{1}{n}}=\overline{\lim}\left(\frac{M_{2n}}{(2n)!}\right)^{\frac{1}{2n}}\leqq\overline{\lim}\left(\frac{|M_n|}{n!}\right)^{\frac{1}{n}}$$

とから (4) を得る。

定理 1 の証明． 先づ (1) の右辺の積分が $|\mathcal{J}(t)|<R$ で絶対收斂することを証明する。 複素数 t を実数及虚数部分に分けて

$$t=r+is\qquad(i=\sqrt{-1})$$

とおくと，実数 x に対し，

$$|e^{itx}|=e^{-sx}\leqq e^{|sx|}$$

$$(6)\qquad\int_{-\infty}^{+\infty}e^{|sx|}dF(x)=\int\sum_{n=0}^{\infty}\frac{|sx|^n}{n!}dF(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\overline{M}_n}{n!}|s|^n$$

假定 (3) と (4) とから

$$\overline{\lim}\sqrt[n]{\frac{\overline{M}_n}{n!}}=\frac{1}{R}<\infty$$

故に，$|s|<R$ ならば (6) の右辺は收斂し，従つて $|\mathcal{J}(t)|<R$ で (1) の右辺の積分は絶対收斂する。

次に

$$\varphi_n(t)=\int_{-n}^{n}e^{itx}dF(x),\qquad(n=1,2,3,\cdots\cdots).$$

とおけば，$\varphi_n(t)$ は明かに t の正則函数で，且つ，$|\mathcal{J}(t)|<R$ で $n\to\infty$ の時，$\varphi(t)$ に広義の一様收斂するから，よく知られた定理（例へば [5] 吉田，121 頁）により，$\varphi(t)$ は $|\mathcal{J}(t)|<R$

で正則である。　特に，$|t|<R$ では

$$\varphi(t)=1+M_1(it)+\frac{M_2}{2!}(it)^2+\cdots+\frac{M_n}{n!}(it)^n+\cdots$$

となり，$|t|<R$ 内での $\varphi(t)$，従って $|\mathfrak{J}(t)|<R$ 内での $\varphi(t)$ は $\{M_n\}$ から一義に決定される。

次に能率問題の k 次元えの拡張を書いてみる。

定理 2.　k 次元 Euclid 空間に於ける確率法則を $\mathcal{L}$ とし，その分布函数，周辺分布函数を夫々 $F(x_1,x_2,\cdots,x_k)$，$F_1(x_1)\cdots\cdots,F_k(x_k)$ とおき，周辺分布 F_l の n 次の絶対能率を

$$\beta_{ln}=\int_{-\infty}^{+\infty}|x^n|\,dF_l(x),\quad l=1,2,\cdots k\ ;\ n=1,2,\cdots$$

とおく。若し

$$\overline{\lim}\left(\frac{\beta_{ln}}{n!}\right)^{\frac{1}{n}}=\frac{1}{R_l}<\infty\quad.\quad l=1,2,\cdots,k,$$

ならば，$\mathcal{L}$ の特性函数

$$\varphi(t_1,t_2,\cdots,t_k)=\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}e^{i(t_1x_1+\cdots+t_kx_k)}dF(x_1,\cdots,x_k)$$

は $t_1,\cdots\cdots,t_k$ を複素変数と考えて

$$|\mathfrak{J}(t_l)|<\frac{R_l}{k},\quad l=1,2,\cdots,k.$$

で正則で，確率法則 $\mathcal{L}$ はその能率の系列 $\{\alpha_{n_1n_2\cdots n_k}\}$ から一意に決定される。茲に

$$\alpha_{n_1n_2\cdots n_k}=\int\cdots\int x_1^{n_1}\cdots x_k^{n_k}\,dF(x_1,\cdots,x_k).$$

証明．　$t_l=\sigma_l+i\tau_l\quad(l=1,2,\cdots,k)$

とおくと，

$$\left|e^{i(t_1x_1+\cdots+t_kx_k)}\right| = e^{-\tau_1x_1-\cdots-\tau_kx_k} \leqq e^{|\tau_1x_1|}\cdot e^{|\tau_2x_2|}\cdots e^{|\tau_kx_k|}$$

$$\leqq \frac{1}{k}\left(e^{k|\tau_1x_1|}+e^{k|\tau_2x_2|}+\cdots+e^{k|\tau_kx_k|}\right)$$

$$\therefore \int\cdots\int\left|e^{i(t_1x_1+\cdots+t_kx_k)}\right|dF(x_1,\cdots,x_k)$$

$$\leqq \frac{1}{k}\sum_{\ell=1}^{k}\int\cdots\int e^{k|\tau_\ell x_\ell|}dF(x_1,\cdots,x_k)$$

$$= \frac{1}{k}\sum_{\ell=1}^{k}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{k|\tau_\ell x|}dF_\ell(x) < \infty. \qquad \left(|\tau_\ell| < \frac{R_\ell}{k}\right)$$

以下省略

最後に題目とは関係がないのであるけれども，他にも正誤表の一寸した誤りがあるのでこの機会に直して置きたいと思います。"確率論" 180頁最初の4行を次の様に改める．

$0 < \varepsilon < l_0$ なる ε に対し

$$Q_0(l_0-\varepsilon) = F_0\left(Z_0+\frac{l_0-\varepsilon}{2}+0\right)-F_0\left(Z_0-\frac{l_0-\varepsilon}{2}\right)$$

なる Z_0 をとり

$$Z_0-\frac{l_0-\varepsilon'}{2}, \quad Z_0+\frac{l_0-\varepsilon'}{2}, \qquad (0<\varepsilon'<\varepsilon)$$

を $F_0(Z)$ の連続点とする。

$$Q_n(l_0) \geqq F_n\left(Z_0+\frac{l_0-\varepsilon'}{2}\right)-F_n\left(Z_0-\frac{l_0-\varepsilon'}{2}\right)$$

$n\to\infty$ ならしめると

$$\varliminf_{n\to\infty} Q_n(l_0) \geqq F_0\left(Z_0+\frac{l_0-\varepsilon'}{2}\right)-F_0\left(Z_0-\frac{l_0-\varepsilon'}{2}\right)$$

$$\geqq F_0\left(Z_0+\frac{l_0-\varepsilon}{2}+0\right)-F_0\left(Z_0-\frac{l_0-\varepsilon}{2}\right)$$

$$= Q_0(l_0-\varepsilon)$$

$Q_0(\ell)$ は $\ell=\ell_0$ で連続で $\varepsilon>0$ はいくらでも小さくとれるから，

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} Q_n(\ell_0) \geqq Q_0(\ell_0).$$

尚この定理（4.3）については文献［6］又は［7］に簡単な証明がある。

文　　献

[1] H. Cramér, Mathematical Methods of Statistics. 1946. pp. 176 — 177.

[2] M. G. Kendall, Conditions for uniqueness in the problem of moments. A.M.S., 1940. Vol. 11 No. 4 pp. 402 — 409.

[3] P. Lévy, Théorie de L'addition des Variables aléatoires, 1937, p. 41

[4] A. Wintner, The Fourier Transforms of Probability Distributions, 1947. pp. 35 — 38

[5] 吉田洋一，　函数論，昭和13年，p. 121.

[6] K. Takano, A note on the concentration functions, Kōdai Math. Seminor Reports. 1950. Nos. 1 — 2. p. 13

[7] 高野金作，分布函数に関する若干の考察，研究録第5巻第8号，348頁，定理3.

（1951. 4. 1）