⑰ 確率論に於ける線型的方法

（random function について）

高島 已千雄

本文は

Kari Karhunen, Über lineare Methoden in der Wahrscheinlichkeitsrechnung, Suomalaisen Tiedeakatemian Toimituksia Annales Academiae Scientiarum Fennicae, Helsinki (1947), Sarja A, I. Mathematica-Physica 37. の内容の紹介である。 random function については既に M. Loève, Fonctions aléatoires du second order (P. Lévy, Processus stochastiques et Mouvement Brownien, (1948) の巻末の Note) があるが，こゝに敢えて紹介をする。 色々と注意すべき事や，気が附いた事もあるにはあるが，それらはすべて一応割愛することにした。

原論文の内容について，§1 の「probability field と random quantity」は凡て省略した。 また §2 は Hilbert 空間論そのものではあるが後で利いて来るので，証明は省略したが事項についてはかなり詳細に書いたつもりである。 §3. に於て random function の定義及び構成についてはあまり触れなかつたがこの事については Doob and Ambrose [1] 等を参照されたい。

尚附録として，最後に（VI）

Kari Karhunen, Über die Strukture stationärer zufälliger Funktionen, Arkiv för Matematik, vol. 1 (1949)
を附加しておいた。前論文の続篇と見做してもよいであろう。（尚，本VI については O. Hanner [1] を参照）

従って以下の目次は原文と番号の付け方及び順序が狂い，また内容についても同じ事が云へるのであるが，その心算であて頂きたい。

目　　次

I.

確率変数の線状集合

§1.1. $\{x_\mu\}$を確率変数（一般に複素数値とする）の與へられた集合とする。 C_k を複素係数として x_μから作られた有限一次結合

$$\sum_{k=1}^{n} C_k\, x_{\mu_k}$$

全体の集合を $\{x_\mu\}$ の複素線状集合体Lと云ふ.

Lは明かに線型集合である：

$$x,\ y \in L \longrightarrow ax + by \in L$$

凡てのμにつき $E\{|x_\mu|^2\} < \infty$ と假定する。 然らば，$E\{x_\mu\}$ が定義されしかも有限である。

一般性を失はずに，凡ての μ に対して $E\{x_\mu\} = 0$ と假定出來る。 然らば明かに凡ての $z \in L$ につき $E\{|z|^2\} < \infty$ 且つ $E\{z\} = 0$ である。

$(E\{|z|^2\})^{\frac{1}{2}}$ をzのノルムと云ひ，$\|z\|$ と書く．$z = 0$ なる時且つその時に限り $\|z\| = 0$ である．何となれば，$\|z\| = 0$ より明かに $Pr\{z = 0\} = 1$， 従つてzは零と同等である．以下，$z = 0$ 等はzは零と同等であると云ふ意味とする。

任意の $y,\ z \in L$ に対して $E\{y\bar{z}\}$が定義され且つ有限で

$$|E\{y\bar{z}\}| \leqq \|y\|\cdot\|z\| \qquad (\textit{Schwarz}\text{の不等式})$$

二つの元 $y,\ z \in L$ の距離を $\|y - z\|$ で定義する。これは許される。何となれば，明かに

$1°\qquad y = z \rightleftarrows \| y - z \| = 0$

$2°\qquad \| y - z \| \geqq 0.$

$3°\qquad \| y - z \| \leqq \| y - w \| + \| w - z \|.$

確率変数列 $\{ x_n \}$ が確率変数 x に平均収斂するとは，

$$\lim_{n \to \infty} \| x_n - x \| = 0$$

なる時を云ふ． 記号：

$$x = \underset{n \to \infty}{l.i.m.}\ x_n.$$

補題 1． 確率変数列 $\{ x_n \}$, $\| x_n \| < \infty$, $(n = 1, 2, \cdots)$ が或る確率変数に平均収斂するために必要且つ充分な條件は Cauchy の収斂條件：

如何なる $\varepsilon > 0$ についても $m, n > n_\varepsilon$ なる限り $\| x_m - x_n \| < \varepsilon$ なる如き n_ε が存在する，が成立することである。

$\underset{n \to \infty}{l.i.m.}\ x_n = x$ と書けば，

$$\| x \| < \infty, \quad \| x \| = \lim_{n \to \infty} \| x_n \|, \quad E\{x\} = \lim_{n \to \infty} E\{x_n\}$$

が成立する． 更に $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ が夫々 x, y に平均収斂するならば，

$$E\{ x \bar{y} \} = \lim_{n \to \infty} E\{ x_n \bar{y}_n \}.$$

§ 1．2． L の平均収斂列の極限値である如き確率変数を L に追加する。かくして得られた集合を $\{ x_\mu \}$ の閉線状集合体と云ひ，L_2 と書く。

L_2 は一般 Euclid 空間を形成する。即ち次の a，b 及び c が成立する：

$a.$ L_2 は線状空間である。

b. $x, y \in L_2$ の scalar 積を $E\{x\bar{y}\}$ と定義すれば，L_2 に於て scalar 乗法が定義され，次の諸法則が成立する：

$$E\{ax \cdot \bar{y}\} = aE\{x\bar{y}\},\ E\{(x_1+x_2)\bar{y}\} = E\{x_1\bar{y}\} + E\{x_2\bar{y}\},\ E\{x\bar{y}\} = \overline{E\{y\bar{x}\}}.$$

更に $x \neq 0$ に対しては $E\{x\bar{x}\} = E\{|x|^2\} > 0$，且つ $x = 0$ に対しては $E\{x\bar{x}\} = E\{|x|^2\} = 0$．ノルム $\|x\|$ は $E\{x\bar{x}\}$ によつてそれの平方根として定義される．二つの元 $x, y \in L_2$ の距離とは $\|x-y\|$ のことである．

c. L_2 は（平均収斂の意味で）完備である。即ち Cauchy の収斂條件を満足する．

$z_1, z_2, \cdots\cdots, z_n \in L_2$ が一次從属であるとは，$\sum_{k=1}^{n} c_k z_k = 0$ なる如き悉くは零でない常数 $C_1, C_2, \cdots\cdots, C_n$ が存在する時を云ふ．然らざる時は一次独立と云ふ．

$E\{x\bar{y}\} = 0$ なる時元 $x, y \in L_2$ は直交すると云ふ。記号：$x \perp y$． 之と対応して S_1 のどの元も S_2 のどの元とも直交する時集合 $S_1, S_2 \subset L_2$ は直交すると云ふ．記号：$S_1 \perp S_2$．

依つて一般 Euclid 空間に関する一般の定理を L_2 の上に応用出来る．

§ 1.3.

L_2 の部分集合 S が L_2 に於て基本集合であるとは，有限一次結合 $\sum_{k=1}^{n} c_k y_k$，$y_k \in S$ が L_2 の中に稠密に在る。即ち如何なる $x \in L_2$，$\varepsilon > 0$ に対しても $\|x - \sum_{k=1}^{n} c_k y_k\| < \varepsilon$ なる如き S の元の有限集合 $\{y_1, y_2, \cdots\cdots, y_n\}$ 及びそれに対応する常数 $C_1, C_2, \cdots\cdots, C_n$ が存在する時を云ふ．

L は L_2 の中で稠密であるから，特に集合 $\{x_\mu\}$ は L_2 に於て基本集合である。

L_2 の中の基本集合の最小の濃度を L_2 の次元と云ふ。

記号：$\dim L_2$．即ち次元は集合 $\{x_\mu\}$ の濃度より大とはなり得ない，即ち index μ の集合 M の濃度 $\mathfrak{m}$ より大とはなり得ない．$\mathfrak{m} = m < \infty$ で x_μ が一次独立ならば，更に $\dim L_2 = m$ でこの場合 L_2 は普通の m 次元 Euclid 空間 R^m

と同一の構造を有する。 $\dim L_2$が可附番無限であるならば，L_2はHilbert 空間である。これら二つの場合は何れにせよ L_2 は可分である。 即ちその中に可附番無限な稠密部分集合が存在する。他方 $\dim L_2$が可附番以上ならば，L_2 は勿論可分ではない。

補題 2. 基本集合 H の中の凡ての zに対して $y \perp z$ならば， $y = 0$ である。

証明 如何なる $\varepsilon > 0$ に対しても

$$\| y - y_\varepsilon \| < \varepsilon, \quad y_\varepsilon = \sum_{k=1}^{n} c_k z_k, \quad z_k \in H \quad (k = 1, \cdots, n)$$

となる如き $y_\varepsilon \in L_2$ が存在する。 然る時は $E\{y \bar{y}_\varepsilon\} = 0$，従つて $\| y \|^2 \leqq \| y - y_\varepsilon \|^2 < \varepsilon^2$，従つて $\|y\| < \varepsilon$. ここで $\varepsilon > 0$ は任意だから $y = 0$.

系. 基本集合 H の中の凡ての z に対して，$E\{y_1 \bar{z}\} = E\{y_2 \bar{z}\}$ ならば， $y_1 = y_2$ である。

L_2 の元の系 $\mathcal{O}$ が正規直交系をなすとは，

$$E\{ y \bar{z} \} = \begin{cases} 0, & (y \neq z), \\ 1, & (y = z), \end{cases} \quad y, z \in \mathcal{O}$$

なる時を云ふ. 更に $\mathcal{O}$ が L_2 の中の基本集合であるならば，完全と云ふ。

$\mathcal{O} = \{ z_\kappa ; \kappa \in \Theta \}$，但し Θ は可附番でないことがあり得る，を正規直交系とし，任意の $y \in L_2$ に対し，

$c_\kappa = E\{ y \bar{z}_\kappa \}$；$\kappa \in \Theta$ を y の $\mathcal{O}$ に関する Fourier 係数と云ふ. この c_κの任意の有限個を，$c_{\kappa_1}, c_{\kappa_2}, \cdots, c_{\kappa_n}$ とすれば， Bessel の不等式が成立する：

$$\| y \|^2 \geqq \sum_{i=1}^{n} | c_{\kappa_i} |^2 .$$

これより $\sum_{\kappa \in \Theta} |c_\kappa|^2$ が高々可附番個の項を除き零であり且つ c_κ の順序に無関係に部分和の極限値が存在すると云ふ意味で収斂することが分る。 換言すれば，$\{c_\kappa\} \in l_2(\Theta)$ である。

更にまた，上と同じ意味で $\sum_{\varkappa \in \Theta} c_\varkappa z_\varkappa$ が平均収斂することが分る。

明かに，

$$y - \sum_{\varkappa \in \Theta} c_\varkappa z_\varkappa \perp \{ z_\varkappa \}.$$

$\{ z_\varkappa \}$ が完全であるとすれば，$y = \sum_{\varkappa \in \Theta} c_\varkappa z_\varkappa$．これを確率変数 y の完全正規直交系 ϑ による（Fourier）展開と云ふ。

L_2 の中には常に完全正規直交系が存在すること及びその濃度が，$\dim L_2$に等しいことが分る。 $\dim L_2$ が可附番無限であるならば，よく知られた Gram－Schmidt の直交化の方法により可附番基本集合を構成出来る。 $\dim L_2$ が可附番以上であるならば，整列可能假定を応用し超限歸納法によつて直交系を定義しなければならない。

§ 1.4. Sを L_2 の部分集合とし，S の元の線状集合体を（S）と書く． 明かに（S）は L_2 の部分集合である。（S）についても，それを拡大して一般 Euclid 空間［S］にすることが出来る。 一般 Euclid 空間をなす L_2 の部分集合を L_2 の部分空間と云ふ。特に［S］を S によつて張られた部分空間と云ふ．明かにSは［S］に於ける基本集合である．

また $z \perp S$，$z \in L_2$ ならば，$z \perp (S)$，$z \perp [S]$．

補　題　3．　S が L_2 に於ける基本集合でないならば，$z \perp [S]$ なる如き $z \in L_2$，$z \neq 0$ が存在する。

S_1，S_2，---，S_n，--- を二つづつ互に直交する部分空間とし，系 $\{ S_1, S_2, \cdots, S_n, \cdots \}$ によつて張られる部分空間を S_i，$i = 1, 2, \cdots$ の直和と云ふ． 記号：$\sum_{i=1}^{\infty} \oplus S_i$ と書く．
従つてその元は $\sum_i y_i$，$y_i \in S_i$，$i = 1, 2, \cdots$ なる形の L_2 の元から成る，但し $\sum_i \| y_i \|$ は收斂するものとする．

M 及び N を部分空間とし，N を M の部分空間とする時，$\{ y ; y \perp N, y \in M \}$ を M に於ける N の直交成分と云ふ。記号：$M \ominus N$．これについては，$M = N \oplus (M \ominus N)$ が成立

する。

これよりMの元 y は凡て

$$y = z_1 + z_2, \quad z_1 \in N, \; z_2 \in M \ominus N$$

と一意的に表はせる．z_1 を N の上への y の射影と云ふ．記号：$P_N y$．明かに $P_N y$ は y と N とにのみ依存し，Mの選び方に関係しない。これについては $P_N(P_M y) = P_N y$ が成立する。

§ 1．5．　L_2 の部分集合 S の上で定義された複素数値函数 $\ell(x)$ が線型作用素であるとは，任意の $x, y \in S$ 及び複素数 a, b に対して $ax + by \in S$ なる限り，

$$\ell(ax + by) = a\ell(x) + b\ell(y)$$

が成立する時を云ふ。また

$$z = ax + by,\; x, y \in S \rightarrow \ell(z) = a\ell(x) + b\ell(y)$$

と定義すれば，ℓ を（S）の上に拡張出来る．しかも定義は一意的である。

如何なる $x \in (S)$ に対しても $|\ell(x)| \leqq k \cdot \|x\|$ なる数 k が存在する時，$\ell(x)$ を有界と云ふ．$\ell(x)$ が有界ならば，それは連続である。

補助定理 1．　$\ell(x)$ は S の上で定義されてをり且つ有界であるとすれば，$\ell(x)$ は［S］の上に拡張され且つ［S］の上でやはり有界である。

任意の $z \in L_2$ に対して $\ell(x) = E\{x\bar{z}\}$ は明かに L_2 の上で定義された有界な線型作用素である，そして z は $\ell(x)$ によって一意的に定められる。

逆に

補題 4．　$\ell(x)$ を部分空間 S の上で定義された有界な線型作用素とすれば，如何なる $x \in S$ に対しても $\ell(x) = E\{x\bar{z}^*\}$ なる如き一つ而して唯一つの元 z^* が S の中に存在する。

§ 1.6. 列 $\{x_n\}$, $x_n \in L_2$ が x に弱収斂するとは，如何なる $\Xi \in L_2$ に対しても $E\{x\Xi\} = \lim_{n\to\infty} E\{x_n \Xi\}$ が成立する時を云ふ。極限値 x はかくの如くして一意的に決定される。加之，$\Xi \in L_2$ の代りに基本集合の元を考察すれば充分である。

x_n が x に平均収斂（即ち強収斂）するならば，x_n は x に弱収斂する（補題1）．但し逆は必ずしも成立しない。

II.

Random function

§ 2.1. T を任意の集合とする。T のどの元にも一意的に定まつた確率変数 $x(t)$ が対応するとする．然る時 $x(t)$ を，parameter t の random function と云ふ．

T を $x(t)$ の定義域，確率変数の集合 $\{x(t)\}_{t\in T}$ を $x(t)$ の値庫と云ふ．

二つの random functions $x(t)$, $y(t)$ が同等であるとは，それらが同一の定義域 T を有し，且つ如何なる $t \in T$ に対しても $x(t) = y(t)$ である時を云ふ．この場合明かに $y(t)$ の値庫も $x(t)$ の値庫と同等である。

$x(t)$ が定義されてゐる probability field の中の如何なる根源事象 ξ にも函数 $x(t;\xi)$ が対応する．

かゝる函数を random function $x(t)$ の realization と呼ぶ

realization それ自身が根源事象ならば，random function は直接に定義されてゐると云ふ．

この場合根源事象の集合 E は空間 R^T の部分集合である．

更に $E = R^T$，即ち T の上で定義された如何なる函数も $x(t)$ の realization であるならば，$x(t)$ を一般 random function と云ふ．

$x(t)$ が直接に定義されてをり且つ一般であるならば，よく知られてゐる如く E の上の確率測度 P' は有限次元分布函数

$$F(a_1,\cdots,a_n;x(t_1),\cdots,x(t_n))=P_r\{x(t_1)\leqq a_1,\cdots,x(t_n)\leqq a_n\}$$

全体の系によつて決定される．併し，$x(t)$ の凡ての realizations が可測性，連続性等の如き或る制限された性質を有する，即ち $x(t)$ が一般でなく従つて E が R^T の眞部分集合である場合には，確率測度を定義するのに困難さが生じて來る．この場合は Doob [1] により R^T の上で定義された測度 P^* から出発してこの P^* を補助として，$S=E\frown S^*$，S^* は R^T の P^*-可測部分集合，なる形に表現し得る E の部分集合 S を考察して E の上の測度を構成出來る．

Doob は E を含む R^T の如何なる P^*-可測部分集合も P^* 測度 1 を有する，即ち E が外 P^*-測度 1 を有するならば，$P(S)=P^*(S^*)$ と定義出來ることを示した．この時 E は確率測度 P と共に一般でない random function $x_{\mathscr{E}}(t)$ を定義する．これは明かに對応する一般 random function と同等である．

逆に $x(t)$ をそれの凡ての realization が性質 $\mathscr{E}$ を有する直接或ひは間接に定義された random function とする．$x_{\mathscr{E}}(t)$ によつて有限次元分布函数 $F(a_1,\cdots,a_n;x_{\mathscr{E}}(t_1),\cdots,x_{\mathscr{E}}(t_n))$ の系が定義される．従つて R^T の上の測度 P^* が定義される．

$x(t)$ の realization の集合 E が外 P^*-測度 1 を有することは直ぐに分る．

$x(t)$ を一般 random function とし，P^* を R^T の上の對応する確率測度とする．それの凡ての realization が性質 $\mathscr{E}$ を有し且つ $x(t)$ と同等である random function $x_{\mathscr{E}}(t)$ が存在すると假定する．同等な random function によつて明かに同一の確率測度が定義されるから，上述により $x_{\mathscr{E}}(t)$ の realization の集合は外 P^*-測度 1 を有する．

一般 random function $x(t)$ は，それの元の凡てが性質 $\mathscr{E}$ を有し且つ且つ P^*-測度 1 を持つてゐる所の R^T の部分集合 E が存在する場合，性質 $\mathscr{E}$ を殆んど確実に有すると云ふ．上述によりその realization が凡て性質 $\mathscr{E}$ を有する $x(t)$ と同等な random function が存在する時且つその時にのみこの場合が生じる.

以下に於ては互に同等な random function を區別しない。従つて realizations の個々の性質をそのまゝ研究することは出來ない。かくの如くにすれば，それの realization が或るいくつかの求むる性質を有する所の與へられた random function と同等な random function が存在することを先づ確かめ，それからかゝる特殊化された random function を研究せねばならない。

我々の random function の定義が本質的には Wiener の定義と一致することを注意しておく. 一般の直接に定義された random function の概念は Khintchine [1] の確率過程の概念と同一のものである. 一般でない直接に定義された random function は Doob [1] がはじめて取扱つた. これらの概念の間の関係については Doob and Ambrose [1] を參照

§ 2.2. I. と同じく，凡ての $t \in T$ に対して $E\{x(t)\} = 0$ 且つ $\|x(t)\| = E\{|x(t)|^2\} < \infty$ と假定する. (M. Loéve の « fonction aléatoire du second order» である).

$x(t)$ の値庫 $\{x(t)\}$ の閉線状集合体を random function $x(t)$ に屬する線状空間と云ふ. 記号: $L_2(x)$, 或ひは略して L_2.

$T \times T$ の上で定義された函数

$$r(s, t) = E\{x(s)\overline{x(t)}\}$$

を $x(t)$ の相関函数と云ふ. これは凡ての $s, t \in T$ に対して有限である (Schwarz の不等式). 明かに

$$r(s, t) = \overline{r(t, s)}.$$

特に,

$$r(t, t) = \|x(t)\|^2 \geqq 0.$$

任意の $t_i \in T$ 及び任意の複素数 a_i に対して

$$\sum_{i,j=1}^{n} r(t_i,t_j)a_i\bar{a}_j = \| \sum_{i=1}^{n} a_i x(t_i) \|^2 \geqq 0$$

であるから，$r(s,t)$は quasi-definite hermitian function である．逆に，かゝる函数は何れも或る random function の相関函数となり得る．（実際かゝる函数は normal random function の相関函数となる．例へば Levy [1]，Loéve の Note 定理１）．

§ ２．３．　$L_2(x)$が可分である時，random function $x(t)$は可分であると云ふ．　$x(t)$ が可分ならば，$L_2(x)$の中に高々可附番無限個の正規直交系 $\{z_n\}$ が存在する．

即ち如何なる $t \in T$ に対しても

$$x(t) = \sum_k z_k f_k(t), \quad f_k(t) = E\{x(t)\bar{z}_k\} \qquad (2.1)$$

が成立する，但し右辺の和が無限ならは常に平均收斂する．更に（補題１）

$$E\{x(s)\overline{x(t)}\} = E\{\sum_k z_k f_k(s) \cdot \overline{\sum_k z_k f_k(t)}\} = \sum_k f_k(s)\overline{f_k(t)},$$

従つて相関函数に対して bilinear representation

$$r(s,t) = \sum_k f_k(s)\overline{f_k(t)} \qquad (2.2)$$

が成立する．但し右辺の級数は凡ての s 及び t に対して普通の意味で收斂する。逆に $\{f_n(t)\}$ を T の上で定義された有限な函数の列とし級数 $\sum_k |f_k(t)|^2$ が T に於て到る所收斂するならば，（2.2）によつて quasi-definite hermitian function が，$T \times T$ の上で定義される．そこで $\{z_n\}$ を確率変数の正規直交系とすれば，（2.1）によつて可分な random function が定義される．依って

定　理　２．１．　$r(s,t)$が可分な random function の相関函数であるためには，それが（2.2）の形に表現出来て且つ級数 $\sum_k |f_k(t)|^2$ が如何なる $t \in T$ に対しても收斂することが必要且

つ充分である.

§ 2.4.. Tを位相空間とする. Tの上で定義された random function $x(t)$ が点tに於て平均連続（Continuous in the mean）であるとは，如何なる $\varepsilon > 0$ に対しても任意の $s \in D_\varepsilon(t)$ につき $\| x(s) - x(t) \| < \varepsilon$ なる如き近傍 $D_\varepsilon(t)$ が存在する時を云ふ. $x(t)$ が集合 $S \subset T$ の如何なる点でも平均連続である時，S に於て平均連続であると云ふ. 以下特に断らぬ限り連続と略称する。

定理 2.2. random function $x(t)$ が S に於て連続であるためには，相関函数 $r(s, t)$ が $S \times S$ の何れの点 (s, t) に於ても連続であることが必要且つ充分である. 従つて $x(t)$ が S に於て連続である場合 $r(s, t)$ は $S \times S$ の何れの点に於ても連続である.

証明. 充分. $\| x(s) - x(t) \|^2 = r(s,s) - r(s,t) - r(t,s) + r(t,t)$ より明か

必要. $t, v \in S$ とすれば，任意の $s, u \in T$ に対して

$$|r(s,u) - r(t,v)| \leqq \| x(s) \| \cdot \| x(u) - x(v) \| + \| x(s) - x(t) \| \cdot \| x(v) \|.$$

そこで $\| x(s) - x(t) \| < \varepsilon$ 且つ $\| x(u) - x(v) \| < \varepsilon$ なる如き s 及び u を選べば，$\| x(s) \| \leqq \| x(t) \| + \varepsilon$ に注意して

$$|r(s,u) - r(t,v)| \leqq [\| x(t) \| + \| x(v) \|] \cdot \varepsilon + \varepsilon^2$$

これより $r(s, u)$ は点 (t, v) で連続で，そしてこの点は $S \times S$ の上の任意の点であるから $S \times S$ の如何なる点に於ても連続である.

（終）

定理 2.3. random function $x(t)$ の定義域が可分でありしかも $x(t)$ が T に於て連続であるならば，$x(t)$ は可分である.

証明. 集合 $\{ t_1, t_2, \cdots, t_n, \cdots \}$ が T に於て稠密ならば，

$\{x(t_n)\}$ は $x(t)$ の連続性により $L_2(x)$ に於ける基本集合を作る。

（終）

§ 2.5. 同一の定義域 T を持つ random function の集合 $x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t), \cdots$ を考へる。それらの値庫の和の閉線状集合体を $L_2(x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots)$ とする。

$x_m(t)$ と $x_n(t)$ との相互相関函数とは函数

$$r_{m,n}(s,t) = E\{x_m(s)\overline{x_n(t)}\}$$

を云ふ。明かに

$$r_{m,n}(s,t) = \overline{r_{n,m}(t,s)}.$$

random function $x_n(t)$ が点 t_0 で連続ならば、

$$E\{x_m(s)\overline{x_n(t)}\} - E\{x_m(s)\overline{x_n(t_0)}\} \leqq \|x_m(s)\|\cdot\|x_n(t)-x_n(t_0)\|$$

より分る如く、$r_{m,n}(s,t)$ $(m, n = 1, 2, \cdots)$ は如何なる点 (s, t_0) に於ても連続である。

III.

random function の積分

§ 3.1. random function $x(t)$ の定義域である空間 T に於て測度 τ が次の如く定義されてゐるとする：

T は有限な測度を持つ τ－可測部分集合の高々可附番個の和である。

$x(t)$ が τ－可測であるとは、如何なる $z \in L_2(x)$ に対しても $E\{z\overline{x(t)}\}$ が τ－可測である時を云ふ。

定理 3.1. $x(t)$ 及び $y(t)$ を可測な random function，a 及び b を複素常数，$f(t)$ を可測函数とする。

更に $\{x_n(t)\}$ を如何なる t に対しても random function $x_\infty(t)$ に平均収斂する random function の可測函数列とする。

然る時は，random function $ax(t)+by(t)$, $f(t)x(t)$ 及び $x_\infty(t)$ は可測である。

証 明. $Z_2 \in L_2(x, y)$ とする. すると $Z = Z_1 + Z_2$, $Z_1 \in L_2(x)$, $Z_2 \in L_2(x, y) \ominus L_2(x)$.

従つて $E\{Z\overline{x(t)}\} = E\{Z_1\overline{x(t)}\}$, 即ち $E\{Z\overline{x(t)}\}$ は可測である。 同様にして $E\{Z\overline{y(t)}\}$ も可測で，結局

$$\bar{a}E\{Z\,\overline{x(t)}\} + \bar{b}E\{Z\,\overline{y(t)}\} = E\{Z[\overline{ax(t)+by(t)}]\}$$

は可測である。 $L_2(ax+by)$ の元は何れも $L_2(x, y)$ の元であることは明かだから，定義によつて $ax(t)+by(t)$ は可測である。$E\{Z\overline{x(t)}\}$ と共に $\overline{f(t)}E\{Z\overline{x(t)}\} = E\{Z\overline{f(t)x(t)}\}$ は可測である。 これより $f(t)x(t)$ の可測性が出て来る。 上述の如く如何なる $Z \in L_2(x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots)$ 及び如何なる n に対しても $E\{Z\overline{x_n(t)}\}$ が可測函数であることが分る。

補題 1 により $E\{Z\overline{x_\infty(t)}\} = \lim_{n\to\infty} E\{Z\overline{x_n(t)}\}$, 從つて，$E\{Z\overline{x_\infty(t)}\}$ の可測性従つて $x_\infty(t)$ の可測であることが分る。(如何なる $Z \in L_2(x_\infty)$ も亦 $L_2(x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots)$ の中の元であることが容易に分る。) （終）

定 理 3. 2. $x(t)$ が可測であるためには，相関函数 $r(s, t)$ が如何なる固定した s に対しても t の可測函数であることが必要且つ充分である。

証 明. 必要。 $r(s, t) = E\{x(s)\overline{x(t)}\}$ より明か。

充分. Z を $\{x(t)\}$ の線状集合体 $L(x)$ の元とする。

即ち，$Z = \sum_{k=1}^{n} a_k x(t_k)$ とすれば，

$$E\{Z\,\overline{x(t)}\} = \sum_{k=1}^{n} a_k r(t_k, t)$$

は可測函数 $r(t_k, t)$, $k = 1, \cdots, n$ の一次結合として可測である。

さて $Z \in L_2(x)$ とすれば，$Z = \underset{n\to\infty}{l.i.m.} Z_n$, $Z_n \in L(x)$, $n = 1, 2, \cdots$ と表はすことが出來る。

依つて $E\{Z\overline{x(t)}\} = \lim_{n\to\infty} E\{Z_n\overline{x(t)}\}$. 如何なる $E\{Z_n\overline{x(t)}\}$ も可測であるから，$E\{Z\overline{x(t)}\}$ も可測である。

（終）

§ 3.2. τ－可測集合 S に関する random function の定積分の定義． Slutzky [1], Doob [1], Cramér [2] 及び Doob and Ambrose [1] を参照．こゝでは §3.1. の意味の random function の可測性だけを假定して從つて非常に一般的で同時に簡單な積分の定義を擧げる。

定理 3.3. $x(t)$ を可測な random function とし，S を T の τ－可測部分集合とする。如何なる $Z \in L_2$ に対しても $E\{Z\overline{x(t)}\}$ が S に関する有限な定積分を有し，且つ式

$$\frac{1}{\|Z\|}\left|\int_S E\{Z\overline{x(t)}\}\,d\tau(t)\right| \tag{3.1}$$

が有界である時には，如何なる $Z \in L_2$ に対しても

$$E\{Z\overline{X(S)}\} = \int_S E\{Z\overline{x(t)}\}\,d\tau(t)$$

が成立する如き一意的に定まつた元 $X(S) \in L_2$ が存在する。

証明． 簡單のため

$$I_S(Z) = \int_S E\{Z\overline{x(t)}\}\,d\tau(t)$$

と書けば，明かに

$$I_S(aZ_1 + bZ_2) = aI_S(Z_1) + bI(Z_2).$$

m を（3.1）式の上限とすれば，

$$|I_S(Z)| \leqq m\|Z\|.$$

依つて $I_S(Z)$ は L_2 の上の有界線型作用素である。

依つて（補題４），　$E\{ z\overline{X(S)}\} = I_S(z)$　なる如き一意的に定つた元 $X(S) \in L_2$　が存在する。　　　　（終）

$S_1 \cap S_2 = \phi$　なる二つの集合 S_1 及び S_2 に対して夫々，$X(S_1)$ 及び $X(S_2)$　が存在するならば，如何なる $z \in L_2$ に対しても，

$$E\{ z\overline{X(S_1+S_2)}\} = E\{ z\overline{X(S_1)}\} + E\{ z\overline{X(S_2)}\}$$

が成立つ。　依って（補題２系）

$$X(S_1+S_2) = X(S_1) + X(S_2).$$

従って $X(S)$ は T の τ－可測部分集合の系の上で定義された additive random setfunction である。

$X(S)$ を S に関する $x(t)$ の定積分と云ふ。　記号：

$$X(S) = \int_S x(t)\,d\tau(t). \qquad (3.2)$$

容易に分る如く，　この積分は普通の積分の性質を有する：

$$\begin{cases} \int_{S_1+S_2} x(t)\,d\tau(t) = \int_{S_1} x(t)\,d\tau(t) + \int_{S_2} x(t)\,d\tau(t),\ S_1 \cap S_2 = \phi. \\ \int_S \{a x_1(t) + b x_2(t)\}\,d\tau(t) = a\int_S x_1(t)\,d\tau(t) + b\int_S x_2(t)\,d\tau(t). \\ \int_S 0 \cdot d\tau(t) = 0 \end{cases}$$

但しここで右辺の積分の存在を假定する。

さて

$$E\{ X(S_1)\overline{X(S_2)}\} = I_{S_2}[X(S_1)] = \int_{S_2} E\{ X(S_1)\overline{x(t)}\}\,d\tau(t)$$

$$= \int_{S_2} E\{x(t)\overline{X(S_1)}\}d\tau(t) = \int_{S_2} \overline{I_{S_1}[x(t)]d\tau(t)} = \int_{S_2}\overline{d\tau(t)\int_{S_1}E\{x(t)\overline{x(s)}\}d\tau(s)}$$

$$= \int_{S_2}\overline{d\tau(t)\int_{S_1}r(t,s)d\tau(s)} = \int_{S_2}d\tau(t)\int_{S_1}r(s,t)d\tau(s) = \int_{S_1}\int_{S_2}r(s,t)d\tau(s)d\tau(t).$$

依つて

$$E\{\int_{S_1}x(t)d\tau(t)\cdot\overline{\int_{S_2}x(t)d\tau(t)}\} = \int_{S_1}\int_{S_2}r(s,t)d\tau(s)d\tau(t).$$

特に

$$\|\int_S x(t)d\tau(t)\| = (\int_S\int_S r(s,t)d\tau(s)d\tau(t))^{\frac{1}{2}}.$$

積分（3.2）が存在する場合，$x(t)$ は集合 S に関して積分可能であると云ふ。 然らば

定　理　3．4．　random function $x(t)$ が集合 S に関して積分可能であるためには，相関函数 $r(s,t)$ が集合 S×S に関して有限積分可能であることが必要且つ充分である．

証　明．　必要．既に云つた．

充分．（3．1）式が有界であることを云へばよい。 先づ $r(s,t)$ が quasi-definite であることから積分

$$\int_S\int_S r(s,t)d\tau(s)d\tau(t) \geqq 0$$

であることに注意する。 そこで $\Xi \in L_2$ とする．

$$f_\Xi(t) = E\{\overline{\Xi}x(t)\}, \quad x_\Xi(t) = x(t) - \frac{\Xi}{\|\Xi\|}f_\Xi(t)$$

とおけば，明かに $\Xi \perp x_\Xi(t)$． 依つて

$$r(s,t) = E\{x_\Xi(s)\overline{x_\Xi(t)}\} + \frac{1}{\|\Xi\|^2}f_\Xi(s)\overline{f_\Xi(t)}.$$

$E\{x_z(s)\overline{x_z(t)}\}$ の積分もやはり $\geqq 0$ であるから，

$$\int_S\int_S r(s,t)\,d\tau(s)\,d\tau(t)=\int_S\int_S E\{x_z(s)\overline{x_z(t)}\}\,d\tau(s)\,d\tau(t)$$

$$+\frac{1}{\|z\|^2}\int_S\int_S f_z(s)\overline{f_z(t)}\,d\tau(s)\,d\tau(t)\geqq\frac{1}{\|z\|^2}\left|\int_S f_z(t)\,d\tau(t)\right|^2.$$

即ち

$$\frac{1}{\|z\|}\left|\int_S E\{z\,\overline{x(t)}\}\,d\tau(t)\right|\leqq\left(\int_S\int_S r(s,t)\,d\tau(s)\,d\tau(t)\right)^{\frac{1}{2}}.\quad\text{(終)}$$

§ 3．3．　$f(t)$ を殆んど凡てのｔに対して $\|x(t)\|\leqq f(t)$ なる如き実て一可測函数とすれば，殆んど凡ての s，t に対して

$$|r(s,t)|\leqq\|x(s)\|\cdot\|x(t)\|\leqq f(s)\cdot f(t).$$

依って

$$\int_S\int_S r(s,t)\,d\tau(s)\,d\tau(t)\leqq\left(\int_S f(t)\,d\tau(t)\right)^2.$$

依って前§により

$$\left\|\int_S x(t)\,d\tau(t)\right\|\leqq\int_S f(t)\,d\tau(t).\qquad(3.3)$$

特に $\|x(t)\|$ 自身可測ならば，$f(t)=\|x(t)\|$ とおける．
よって

$$\left\|\int_S x(t)\,d\tau(t)\right\|\leqq\int_S\|x(t)\|\,d\tau(t).$$

定　理　3．5．　$\{x_n(t)\}$ を如何なるｔに対しても平均收斂する可測な random function の列とする．また如何なる n 及び殆んど凡ての ｔ に対しても $\|x_n(t)\|\leqq f(t)$ なる如き集合 S に関して積分可能な実函数 $f(t)$ が存在するとする．

然る時は $x(t) = \underset{n\to\infty}{l.i.m.}\ x_n(t)$ は S に関して積分可能で且つ列

$$\left\{ \int_S x_n(t)\, d\tau(t) \right\}$$

は $\int_S x(t)\, d\tau(t)$ に弱収斂する。　更に $\{x_n(t)\}$ の収斂が S に於て一様であるならば，強収斂する：

$$\int_S x(t)\, d\tau(t) = \underset{n\to\infty}{l.i.m}\int_S x_n(t)\, d\tau(t).$$

証　明.　　前半.　殆んど凡ての t に対して $\|x(t)\| = \underset{n\to\infty}{l.i.m.}\|x_n(t)\| \leqq f(t)$：（補題1）.　　依って定理3．1及び（3．3）によつて $x(t)$ は S に関して積分可能である．　更に如何なる $z \in L_2$ 及び殆んど凡ての t に対して（補題1）

$$\left| E\{ z\,\overline{x(t)} \} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| E\{ z\,\overline{x_n(t)} \} \right| \leqq \|z\| \cdot f(t).$$

よつて $E\{z\,\overline{x(t)}\}$ は S に関して積分可能であり且つ

$$\int_S E\{ z\,\overline{x(t)} \}\, d\tau(t) = \lim_{n\to\infty} \int_S E\{ z\,\overline{x_n(t)} \}\, d\tau(t).$$

これから random function の積分の定義により如何なる $z \in L_2$ に対しても

$$E\left\{ z\,\overline{\int_S x(t)\, d\tau(t)} \right\} = \lim_{n\to\infty} E\left\{ z\,\overline{\int_S x_n(t)\, d\tau(t)} \right\}.$$

即ち

$$\left\{ \int_S x_n(t)\, d\tau(t) \right\} \text{ は } \int_S x(t)\, d\tau(t)$$

に弱収斂する．

後半．　一様収斂を仮定してゐるから，如何なる t に対しても，$m, n > n_\varepsilon$ なる限り $\|x_m(t) - x_n(t)\| < \varepsilon$ 　なる如き数 n_ε

が存在する。　そこで

$$\int_{S-S_\varepsilon} f(t)\,d\tau(t) < \varepsilon$$

なる如き　$\tau(S_\varepsilon) < \infty$ なる集合 S_ε を選ぼう。　Tは有限測度の集合の高々可附番個の和で従って如何なる S_n も有限測度を有するとして

$$\int_S f(t)\,d\tau(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{S_n} f(t)\,d\tau(t)$$

と書けるからこれは可能である。　依って充分に n だけを大きく選んだ時　$S_\varepsilon = \sum_{i=1}^{n} S_i$　とおくことが出来る。さて（3．3）により

$$\left\| \int_{S_\varepsilon} x_m(t)\,d\tau(t) - \int_{S_\varepsilon} x_n(t)\,d\tau(t) \right\| \leqq \varepsilon\cdot\tau(S_\varepsilon),$$

そして

$$\left\| \int_{S-S_\varepsilon} x_m(t)\,d\tau(t) - \int_{S-S_\varepsilon} x_n(t)\,d\tau(t) \right\| \leqq 2\int_{S-S_\varepsilon} f(t)\,d\tau(t) < 2\varepsilon.$$

これより

$$\left\| \int_S x_m(t)\,d\tau(t) - \int_S x_n(t)\,d\tau(t) \right\| \leqq \left\| \int_{S_\varepsilon} x_m(t)\,d\tau(t) - \int_{S_\varepsilon} x_n(t)\,d\tau(t) \right\|$$
$$+ \left\| \int_{S-S_\varepsilon} x_m(t)\,d\tau(t) - \int_{S-S_\varepsilon} x_n(t)\,d\tau(t) \right\| < [\tau(S_\varepsilon)+2]\,\varepsilon.$$

そこで Cauchy の收斂條件に注意する。　　　　（終）

§　3．4．　Tの如何なる可測部分集合 S に対しても

$$\int_S x(t)\,d\tau(t) = 0$$

なる時，可測な random function $x(t)$ は nullarty であると

云ふ。

この場合には如何なる $z \in L_2$ に対しても殆んど到る処

$$E\{z\overline{x(t)}\} = 0 \quad \text{（積分の定義）}.$$ また

系. $x(t)$ が nullartig であるためには，如何なる固定した s に対しても $r(s,t)$ が T に於て殆んど到る処零となることが必要且つ充分である。

nullartig な random function の例. その値庫が引続き互に直交する元から成る，従つて $r(s,t)=0$ $(s\neq t)$ なる random function.

定理 3.6. 可分且つ nullartig な random function は殆んど到る処零である.

証明. 可分性により L_2 の中に可附番基本集合 $\{z_1, z_2, \cdots, z_n, \cdots\}$ が存在する. $S_n = \{t;\ E\{z_n\overline{x(t)}\} \neq 0\}$ とする. どの S_n も零集合であるから, $S=\sum_{n=1}^{\infty} S_n$ も零集合である. 如何なる $t\in T-S$ 及び如何なる n に対しても

$$E\{z_n\overline{x(t)}\} = 0,$$

従つて $x(t)=0$. （終）

定理 3.7. T を位相空間とし，τ－測度は T の中の近傍が零集合でないやうに定義されてゐるとする。然る時は T に於て定義された nullartig random function は如何なる点に於ても不連続であるか或ひは零に等しい。

証明. $x(t_0)\neq 0$ とする. $x(t)$ が $t=t_0$ で連続とすると，如何なる $t\in D_\varepsilon$ に対しても $\|x(t)-x(t_0)\|<\varepsilon$ なる如き t_0 の近傍 D_ε が存在する。即ち

$$\left|E\{x(t_0)\overline{x(t)}\}\right| > \frac{1}{2}\|x(t_0)\|^2 - \frac{1}{2}\varepsilon^2.$$

そこで $\|x(t_0)\|>\varepsilon$ に選べば，如何なる $t\in D_\varepsilon$ に対しても $|E\{x(t_0)\overline{x(t)}\}|>0$. これは矛盾である。 （終）

IV.

random function のスペクトル表示

§ 4．1．　R を元 a の任意の集合とする。R に於て測度 σ が再び次の如く定義されてゐるとする：

R は有限な測度を持つ σ－可測部分集合の高々可附番個の和である。

R の凡ての σ－可測部分集合の体の上で random set function $Z(S)$ が次の如く定義されてゐるとする：

1° $Z(S)$ は additive である，即ち

$$Z(S_1+S_2)=Z(S_1)+Z(S_2),\quad S_1\frown S_2=\phi. \tag{4.1}$$

2° 任意の可測集合 S_1, S_2 に対して

$$E\{Z(S_1)\overline{Z(S_2)}\}=E\{Z(S_2)\overline{Z(S_1)}\}=\sigma(S_1\frown S_2). \tag{4.2}$$

かかる random setfunction を random spectralfunction と云ふ。（4．1）及び（4．2）から直ぐ分る如く，

系．(a)　$Z(S_1)\perp Z(S_2)$，　$S_1\frown S_2=\phi$.

(b)　$\|Z(S)\|^2=\sigma(S)$.

(c)　$S_1\subseteqq S_2\subseteqq\cdots\subseteqq S_n\subseteqq\cdots$，及び $S=\lim_{n\to\infty}S_n$

有限な σ－測度を持つ可測集合とすれば，

$$Z(S)=\underset{n\to\infty}{l.i.m.}\ Z(S_n).$$

証　明，　（c）だけをやる。假定より $\sigma(S)=\lim_{n\to\infty}\sigma(S_n)$.
依って $\|Z(S)-Z(S_n)\|^2=\|Z(S-S_n)\|^2=\sigma(S-S_n)\to 0.$　（終）

上述の種類の如何なる集合 R の上でも random spectral-function を構成出來ることを証明出來るから我々の定義は決して空なものではない。

§ 4.2. Rの上で定義された複素函数 $f(a)$ の spectralfunction $Z(S)$に関する積分

$$\int_R f(a)\, d\, Z(a)$$

の定義.

（i） $f(a)$ は有界可測で且つ $\sigma(R)$ は有限である場合.

R の上で有限個の相異なる値のみを取る所の可測函数（Simple function）の列 $\{f_n(a)\}$ によつて $f(a)$を一様に近似出來る.

$$f_n(a)=\begin{cases} v_1^{(n)}, & (a\in S_1^{(n)}),\\ v_2^{(n)}, & (a\in S_2^{(n)}),\\ \cdots & \cdots\cdots \\ v_{N_n}^{(n)}, & (a\in S_{N_n}^{(n)}),\end{cases} \qquad n=1,2,\cdots$$

とし, 有限和

$$I(f_n)=\sum_{k=1}^{N_n} v_k^{(n)} Z(S_k^{(n)}) \qquad (4.3)$$

を作る. （4.2）より

$$\| I(f_n)\|^2=\sum_{k=1}^{N_n} |v_k^{(n)}|^2\cdot \sigma(S_k^{(n)}).$$

そこで和（4.3）が $n\to\infty$ の時 $L_2(Z)$ に於て一定の極限値に收斂することを証明する.

任意の m, n に対して

$$S_k^{(n)}=S_k^{(n)}\cap R=\sum_{i=1}^{N_m} S_k^{(n)}\cap S_i^{(m)}$$

なることに注意して，

$$\| I(f_m) - I(f_n) \|^2 = \| \sum_{i=1}^{N_m} \sum_{j=1}^{N_n} (v_i^{(m)} - v_j^{(n)}) Z(S_i^{(m)} \cap S_j^{(n)}) \|^2 = \| I(f_m - f_n) \|^2$$

$$= \sum_{i=1}^{N_m} \sum_{j=1}^{N_n} | v_i^{(m)} - v_j^{(n)} |^2 \sigma(S_i^{(m)} \cap S_j^{(n)})$$

$$= \sum_{i=1}^{N_m} \sum_{j=1}^{N_n} | f_m(a_{ij}) - f_n(a_{ij}) |^2 \sigma(S_i^{(m)} \cap S_j^{(n)})$$

を得る，　但しここで $a_{ij} \in S_i^{(m)} \cap S_j^{(n)}$ なる任意の元である。
列 $\{ f_n(a) \}$ の一様収斂性により $m, n > n_\varepsilon$ なる限り如何なる a に対しても $| f_m(a) - f_n(a) | < \varepsilon$. よつて

$$\| I(f_m) - I(f_n) \|^2 \leqq \sum_{i=1}^{N_m} \sum_{j=1}^{N_n} \varepsilon^2 \sigma(S_i^{(m)} \cap S_j^{(n)}) = \varepsilon^2 \cdot \sigma(R)$$

假定により $\sigma(R) < \infty$ だから，Cauchy の收斂條件により，列 $\{ I(f_n) \}$ は一定の極限值 $I(f)$ に收斂する。

特に $f(a) = \lim_{n \to \infty} f_n(a) \equiv 0$ ならば，（4．3）及び補題1により，$\| I(f) \| = \lim_{n \to \infty} \| I(f_n) \| = 0$ となる。

即ち，$I(f) = 0$.　従つて $I(f)$ が近似函數列の特別な選び方と無関係であること，即ち $I(f)$ の一意性が出て來る。

証　明.

$$\lim_{n \to \infty} f_n(a) = \lim_{n \to \infty} f_n^*(a) = f(a) \quad とすれば，$$

$$\| \underset{n \to \infty}{\text{l.i.m.}} I(f_n) - \underset{n \to \infty}{\text{l.i.m.}} I(f_n^*) \| = \lim_{n \to \infty} \| I(f_n) - I(f_n^*) \|$$

$$= \lim_{n \to \infty} \| I(f_n - f_n^*) \| = 0.$$

即ち，$\underset{n \to \infty}{\text{l.i.m.}} I(f_n) = \underset{n \to \infty}{\text{l.i.m.}} I(f_n^*)$.　（終）

依つて

$$\int_R f(a) \, dZ(a) = \underset{n \to \infty}{\text{l.i.m.}} I(f_n)$$

と定義出来る．（４．３）から容易に分る如く，この積分は普通の積分の性質を有する;

$$
\begin{cases}
\int_{R_1+R_2} f(a)\,dZ(a) = \int_{R_1} f(a)\,dZ(a) + \int_{R_2} f(a)\,dZ(a), \quad R_1 \cap R_2 = \phi. \\
\int_{R} \{\alpha f_1(a) + \beta f_2(a)\}\,dZ(a) = \alpha \int_R f_1(a)\,dZ(a) + \beta \int_R f_2(a)\,dZ(a). \\
\int_R 0.\,dZ(a) = 0, \quad \int_R 1\cdot dZ(a) = Z(R).
\end{cases}
$$

さて普通の Lebesque 積分の性質により

$$\|I(f)\|^2 = \lim_{n\to\infty} \|I(f_n)\|^2 = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{N_n} |v_k^{(n)}|^2 \cdot \sigma(S_k^{(n)}) = \int_R |f(a)|^2 d\sigma(a).$$

即ち

$$\left\| \int_R f(a)\,dZ(a) \right\|^2 = \int_R |f(a)|^2 d\sigma(a). \qquad (4.4)$$

この式と，

$$E\{I_1 \cdot \bar{I}_2\} = \frac{1}{4}\{\|I_1+I_2\|^2 - \|I_1-I_2\|^2 + i\|I_1+iI_2\|^2 - i\|I_1-iI_2\|^2\}$$

なる式とを用ひて

$$E\left\{ \int_R f(a)\,dZ(a) \cdot \overline{\int_R g(a)\,dZ(a)} \right\} = \int_R f(a)\overline{g(a)}\,d\sigma(a).$$

特に $g(a)$ を R の可測部分集合 S の定義函数（characteristic function）とすれば，

$$E\left\{ Z(S) \cdot \overline{\int_R f(a)\,dZ(a)} \right\} = \int_S \overline{f(a)}\,d\sigma(a).$$

S_1，S_2 を R の可測部分集合とすれば，

$$E\left\{ \int_{S_1} f(a)\,dZ(a) \cdot \overline{\int_{S_2} g(a)\,dZ(a)} \right\} = \int_{S_1 \cap S_2} f(a)\overline{g(a)}\,d\sigma(a).$$

特に，

$$\int_{S_1} f(a)\,dZ(a) \perp \int_{S_2} g(a)\,dZ(a), \quad S_1 \cap S_2 = \phi.$$

（ii）　$f(a)$ の有界性或ひは $\sigma(R)$ の有限性を假定しないで，唯

$$\int_R |f(a)|^2 d\sigma(a)$$

の有限性だけを假定する，即ち $f(a) \in L_2(R)$ だけを假定する場合．

先づ，更に $f(a)$ を有界とする。　假定により

$$R = \sum_{n=1}^{\infty} R_n, \quad \sigma(R_i) < \infty, \quad R_i \cap R_j = \phi \ (i \neq j)$$

とする．　そこで

$$\int_R f(a)\,dZ(a) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{R_n} f(a)\,dZ(a)$$

と一応形式的に書く，　但し右辺の各項は（i）により既に定義されてゐる，しかもそれらの各項は（i）の最後の式により互に直交する．

また

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left\| \int_{R_n} f(a)\,dZ(a) \right\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{R_n} |f(a)|^2 d\sigma(a) = \int_R |f(a)|^2 d\sigma(a)$$

であるから，右辺の級数は平均收斂する．

次に，$f(a)$ はもはや有界でないとする．この場合

$$R_1' = \{ a \,;\, |f(a)| < 1 \}$$

$$R_n' = \{ a \,;\, n-1 \leq |f(a)| < n \}, \quad (n = 2, 3, \cdots)$$

とおく．　明かに，$R_i' \cap R_j' = \phi \ (i \neq j)$ で，　$f(a)$ の可測性により各 R_i' は可測集合である．　どの R_i' についても前の場合により

$$\int_{R_i'} f(a)\,dZ(a)$$

が定義される．

依つて再び

$$\int_R f(a)\,dZ(a) = \sum_{i=1}^{\infty} \int_{R_i'} f(a)\,dZ(a)$$

と書くことが出來る．　ここで右辺の級数は平均收斂する．

容易に分る如く，上述の定義に現れた極限値は近似集合列 $\{R_n\}$ 或ひは $\{R_n'\}$ の特別な選び方と無関係である．　從つて定義は一意的である。（i）に述べた積分の諸性質はかくの如く拡張された定義に於ても明かに成立する．

注　意．　（4.4）より分る如く，　$f(a) \in L_2(R)$ が本質的た假定である．

§ 4．3．　$L_2(R)$ を考察する。　二つの函数 $f(a)$，$g(a) \in L_2(R)$ は，σ に関して殆んど到る処一致する即ち

$$\int_R |f(a) - g(a)|^2\,d\sigma(a) = 0$$

なる時，一致するものと見做す．　よく知られてゐる如く，$L_2(R)$ は scalar 積を

$$\int_R f(a)\,\overline{g(a)}\,d\sigma(a)$$

によつて，　また距離を

$$\| f - g \| = \left(\int_R | f(a) - g(a) |^2 d\sigma(a) \right)^{\frac{1}{2}}$$

によつて定義すれば，　一般 Euclid 空間になる。

從つて I に述べた事は凡て $L_2(R)$ にそのまゝあてはまる．

さて，$L_2(R)$ と $L_2(Z)$ との間に次の定理が成立する：

定　理　4．1．　線状空間 $L_2(Z)$ と $L_2(R)$ との間に等距離寫像が定義され，しかもその寫像は双一意的である．

証　明．　積分 $\int_R f(a)\,dZ(a)$ によつて $L_2(R)$ の如何なる元にも $L_2(Z)$ の一意的に定つた元が対応する．

逆に，$L_2(Z)$ の如何なる元にも $L_2(R)$ の一意的に定つた元が対

応する。

逆に，$L_2(Z)$ の如何なる元にも $L_2(R)$ の一意的に定つた元が対応することを示さう。

$Z \in L(Z)$ とすれば，$Z = \sum_{k=1}^{n} c_k Z(S_k)$ に対して

$$f(a) = c_k, \quad a \in S_k, \quad k = 1, 2, \cdots, n \qquad (4.5)$$

が求むる函数 $f(a) \in L_2(R)$ であるから明かである。

次に $Z \in L_2(Z)$ とすれば，$Z = \underset{n \to \infty}{l.i.m.} Z_n$ なる $L(Z)$ の元の列 $\{Z_n\}$ が存在する。如何なる Z_n にも

$$Z_n = \int_R f_n(a)\, dZ(a)$$

なる如き（4.5）によって定義された $f_n(a) \in L_2(R)$ が対応する。積分の性質及び（4.4）により

$$\| Z_m - Z_n \|^2 = \int_R | f_m(a) - f_n(a) |^2 d\sigma(a) = \| f_m - f_n \|^2, \quad (4.6)$$

即ち $\{Z_n\}$ と共に $\{f_n\}$ も平均収斂する。よつて Riesz-Fischer の定理により，$\| f_n - f \|^2 \to 0$ なる如き σ－平方可積分な函数 $f(a)$ が存在し，

$$Z = \int_R f(a)\, dZ(a) \qquad (4.7)$$

が成立する。（4.6）式によつて，この式は任意の $Z_m, Z_n \in L_2(Z)$ に対して成立する。依つて $f(a)$ が Z によつて一意的に決定されることが分る。同じく，（4.6）式は，（4.7）によつて生じた $L_2(R)$ と $L_2(Z)$ との間の寫像が等距離的であることを示してゐる。（終）

集合 $L_2(Z)$ の表現（4.7）をスペクトル表示と云ふ。

特に R が凡ての正整数の集合で且つ $\sigma(S)$ が S の中の元の個数を表はすものとすると，（4.7）は $L_2(Z)$ の元の完全正規直交系 $\{Z(i)\}$ に依る展開を，特別の場合として，與へる（§ 1.3.参照）。

§ 4. 4.　$f(t, a)$ を $T \times R$ の上で定義された函数で，如何なる $t \in T$ に対しても $L_2(R)$ の元であるとする．然る時は

$$x(t) = \int_R f(t, a)\,dZ(a) \qquad (4.8)$$

は T の上の random function で，その値域は $L_2(Z)$ の中に在る。従って $L_2(x) \leqq L_2(Z)$．

さて，定理4．1．を用ひれば，

$L_2(x) = L_2(Z)$ なるためには，$f(t, a)$ に於て t が T の中を動く時に得られる R に於ける函数の集合 $\{f(t,a); t \in T\}$ が $L_2(R)$ に於いて基本集合を形成することが必要且つ充分である．

証　明．　$\{f(t,a); t \in T\}$ が $L_2(R)$ に於ける基本集合であるためには，$L_2(R)$ に於てそれらと直交する元が存在しないことが必要且つ充分である，からである。　（終）

従って，この事は，凡ての $t \in T$ に対して

$$\int_R f(t, a)\,\varphi(a)\,d\sigma(a) = 0 \qquad (4.9)$$

なる如き $\|\varphi(a)\| = 1$ なる如き $\varphi(a) \in L_2(R)$ が存在しないことを意味する。

尚，（4．8）の相関函数は次の如くなる：

$$r(s, t) = \int_R f(s, a)\,\overline{f(t, a)}\,d\sigma(a). \qquad (4.10)$$

§ 4. 5.　與へられた random function $x(t)$ に対して（4.8）が成立する如き random spectralfunction $Z(a)$ が R の上で見出されるのは如何なる時であらうか？　このための必要條件は $x(t)$ の相関函数に対して（4.10）が成立することである。（前§）．

この條件が更に充分であることを示さう。　即ち

定　理　4．2．　$x(t)$ の相関函数 $r(s, t)$ に対して式

$$r(s, t) = \int_R f(s, a)\,\overline{f(t, a)}\,d\sigma(a) \qquad (4.10)$$

が成立するならば，

$$x(t) = \int_R f(t, a)\, dZ(a) \qquad (4.8)$$

が成立する如き R の上で定義された random spectralfunction Z(S) が存在する。 更に，凡ての $t \in T$ に対して

$$\int_R f(t, a)\varphi(a)\, d\sigma(a) = 0 \qquad (4.9)$$

を満足する所の

$$\|\varphi(a)\| = \int_R |\varphi(a)|^2 d\sigma(a) = 1$$

なる函数 $\varphi(a) \in L_2(R)$ が存在しない時且つその時にのみ

$$L_2(x) = L_2(Z)$$

である.

証 明. (i) 上述の性質の $\varphi(a)$ が存在しないと假定する。

$\sigma(S) < \infty$ なる R の任意の可測部分集合 S をとる。

$L(x)$ に於ける作用素 l_S を

$$z = \sum_{k=1}^{n} c_k x(t_k) \to l_S = \int_S \sum_{k=1}^{n} c_k f(t_k, a)\, d\sigma(a)$$

によつて定義する. l_S は一意的，線型且つ有界である（証明は繰廻し — (iii)を見よ）.

従つて補助定理1によつて l_S を $L_2(x)$ の上の有界線型作用素に拡大出來る。 依つて補題4によつて，如何なる $z \in L_2(x)$ に対しても

$$E\{z\overline{Z(S)}\} = l_S(z)$$

が成立する如き一意的に定まつた元 $Z(S) \in L_2(x)$ が存在する。

依つて $\sigma(S) < \infty$ なる如何なる可測集合 S に対しても定義されてある所の random setfunction Z(S) を得る. 何となれば

1° Z(S) が additive であること. $S_1 \frown S_2 = \phi$ とすれば， $l_{S_1+S_2} = l_{S_1} + l_{S_2}$ に注意して，如何なる $z \in L_2(x)$ に対しても

$$E\{z\,\overline{Z(S_1+S_2)}\}=\ell_{S_1+S_2}(z)=E\{z\,[\overline{Z(S_1)+Z(S_2)}]\}$$

よつて $Z(S_1+S_2)=Z(S_1)+Z(S_2)$.

2°

$$E\{Z(S_1)\overline{Z(S_2)}\}=\sigma(S_1\frown S_2)\quad \text{であること.}$$

$$z=\sum_{k=1}^{n}c_k x(t_k)\to f_z(a)=\sum_{k=1}^{n}c_k f(t_k,a)$$

と書く. ℓ_S の一意性により・$f_z(a)$ は R に於て殆んど到る処一意的に決定される. ℓ_S の定義により如何なる $z\in L(x)$ に対しても

$$\ell_S(z)=\int_S f_z(a)d\sigma(a)=\int_R f_z(a)C_S(a)d\sigma(a),\quad (*)$$

但し $C_S(a)$ は S の定義函数. さて $y=\sum_{k=1}^{m}b_k x(s_k)$ を $L(x)$ の第二の元とすれば.

$$E\{y\bar z\}=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}b_i\bar c_j r(s_i,t_j)=\int_R\sum_{i=1}^{m}b_i f(s_i,a)\overline{\sum_{j=1}^{n}c_j f(t_j,a)}\,d\sigma(a).$$

従つて

$$E\{y\bar z\}=\int_R f_y(a)\overline{f_z(a)}\,d\sigma(a).\qquad (**)$$

特に $y\doteq z$ ならば

$$\|z\|^2=\int_R|f_z(a)|^2 d\sigma(a)\qquad (***)$$

さて $z\in L_2(x)$ とすれば, $z\doteq \underset{n\to\infty}{l.i.m}\,z_n$ なる $L(x)$ の列 $\{z_n\}$ が存在する. 従つて

$$\|z_m-z_n\|^2=\int_R|f_{z_m}(a)-f_{z_n}(a)|^2d\sigma(a).$$

よつて §4.3. の如く, $\{f_{z_n}(a)\}$ は極限函数 $f_z(a)$ に平均収斂する.

$$\ell_S(z)=\lim_{n\to\infty}\ell_S(z_n)=\lim_{n\to\infty}\int_S f_{z_n}(a)d\sigma(a)=\int_S f_z(a)d\sigma(a)$$

により，そして $y=\underset{n\to\infty}{l.i.m.}\, y_n$，$y_n\in L(x)$ ならば，

$$E\{y\overline{z}\}=\lim_{n\to\infty}E\{y_n\overline{z}_n\}=\lim_{n\to\infty}\int_R f_{y_n}(a)\overline{f_{z_n}(a)}d\sigma(a)$$
$$=\int_R f_y(a)\overline{f_z(a)}d\sigma(a)$$

であるから，任意の y，$z\in L_2(x)$ に対して（＊），（＊＊）及び（＊＊＊）が成立する。

$l_S(x(t))$ を考へる。一方では（＊）により

$$l_S(x(t))=\int_R f(t,a)\,e_S(a)\,d\sigma(a).$$

他方では（＊＊）により

$$l_S(x(t))=E\{x(t)\overline{Z(S)}\}=\int_R f(t,a)\overline{f_{Z(S)}(a)}d\sigma(a).$$

即ち如何なる $t\in T$ に対しても

$$\int_R f(t,a)\{\overline{f_{Z(S)}(a)}-e_S(a)\}d\sigma(a)=0,$$

従つて R に於て殆んど到る処

$$f_{Z(S)}(a)=\overline{f_{Z(S)}(a)}=e_S(a).$$

結局

$$E\{Z(S_1)\overline{Z(S_2)}\}=\int_R e_{S_1}(a)e_{S_2}(a)d\sigma(a)=\sigma(S_1\frown S_2).$$

即ち $Z(S)$ は random spectralfunction である．

$Z(S)$ の値庫は $L_2(x)$ に於ける基本集合を形成する。若しさうでないとすれば，$\sigma(S)<\infty$ なる如何なる S に対しても，$z\perp Z(S)$ なる如き零と異る元 $z\in L_2(x)$ が存在する。さうすれば，如何なる S に対しても

$$E\{z\overline{Z(S)}\}=l_S(z)=\int_S f_z(a)\,d\sigma(a)=0,$$

従つて R の上で殆んど到る処 $f_z(a)=0$，依つて（＊＊＊）によつて $\|z\|=0$．即ち $L_2(x)=L_2(Z)$ が成立せねばならない。

更に（4.8）が成立することを証明する。（＊）によって

$$E\{x(t)\overline{Z(S)}\}=l_S(x(t))=\int_S f(t,a)d\sigma(a).$$

また

$$E\{\int_R f(t,a)dZ(a)\cdot\overline{Z(S)}\}=\int_S f(t,a)d\sigma(a)$$

従って如何なる S に対しても

$$E\{x(t)\overline{Z(S)}\}=E\{\int_R f(t,a)dZ(a)\cdot\overline{Z(S)}\}.$$

$Z(S)$ の値庫は $L_2(x)$ の基本集合であるから，補題2，系により（4.8）を得る．

（ii）　條件（4.9）を満足し且つ殆んど到る処零とならない少くとも一つの函数 $\varphi(a)$ が存在すると假定する。

集合 $\{f(t,a);t\in T\}$ の閉線状集合体を $L_2(f)$とする。
然らば $\varphi(a)\perp L_2(f)$，従って $L_2(R)-L_2(f)\neq\phi$.
$\{g(t,a);t\in T'\}$ を $L_2(R\ominus L_2(f))$ に於ける基本集合とする，但し T' は T と共通元を持たぬやうに選ばれてゐるとする。

さて，

$$q(s,t)=\int_R g(s,a)\overline{g(t,a)}\,d\sigma(a)$$

によつて $T'\times T'$の上での quasi-definite hermitian function が定義される．よつて T' の上で相関函数 $q(s,t)$ を持つ random function $y(t)$ を構成することが出來る．(§2.2.).

そして対応する probability field $\mathfrak{F}'$ を，$x(t)$に属する probability field $\mathfrak{F}$ と根源事象を共有しないやうに，選ぶことが出來る。

そこで $\mathfrak{F}$ と $\mathfrak{F}'$ とを合併してかくして得られた probability field を $\mathfrak{F}\times\mathfrak{F}'$ と記す．$\mathfrak{F}\times\mathfrak{F}'$ の確率事象は $A\times A'$, $A\in\mathfrak{F}$, $A'\in\mathfrak{F}'$ から成る．　対応する確率測度は

$$Pr.\{A\times A'\}=Pr.\{A\}Pr.\{A'\}$$

によつて定義される．

random function $x(t)$, $y(t)$ は何れも $\mathfrak{F}\times\mathfrak{F}'$ に属する。
依つて

$$w(t)=\begin{cases} x(t), & (t\in T) \\ y(t), & (t\in T') \end{cases}$$

とおけば，$T+T'$ を定義域とする random function $w(T)$ を $\mathfrak{F}\times\mathfrak{F}'$ に於て定義出来る.

更に $f(t,a)=g(t,a)$, $t\in T'$ と定義すれば，$w(t)$ の相関函数は，

$$\rho(s,t)=\int_R f(s,a)\overline{f(t,a)}\,d\sigma(a).$$

実際，$s,t\in T$ ならば $\rho(s,t)=r(s,t)$. $s,t\in T'$ ならば $\rho(s,t)=q(s,t)$. 一方 $s\in T$, $t\in T'$ ならば $f(s,a)\perp g(t,a)$ より $\rho(s,t)=0$ であるが

$$E\{w(s)\overline{w(t)}\}=E\{x(s)\overline{y(t)}\}=\int_{E\times E'}x(s)\overline{y(t)}\,dP$$
$$=\int_E x(s)\,dP\int_{E'}y(t)\,dP=0,$$

但し E, E' は夫々 $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{F}'$ の中の確率事象である。
即ち何れにせよ $\rho(s,t)=E\{w(s)\overline{w(t)}\}$.

$\{f(t,a)\ ;\ t\in T+T'\}$ は $L_2(R)$ に於ける基本集合である.
何となれば，$\{f(t,a)\ ;\ t\in T\}$ は $L_2(f)$ に於ける基本集合，$\{f(t,a);t\in T'\}=\{g(t,a);t\in T'\}$ は $L_2(R)\ominus L_2(f)$ 基本集合しかも $L_2(R)=L_2(f)\oplus[L_2(R)\ominus L_2(f)]$ であるからである。依つて凡ての $t\in T+T'$ に対して

$$\int_R f(t,a)\varphi(a)\,d\sigma(a)=0$$

且つ

$$\int_R|\varphi(a)|^2\,d\sigma(a)=1$$

なる二つの性質を持つ $\varphi(a)$ は $L_2(R)$ の中には存在しない。
従つて (i) により

$$w(t)=\int_R f(t,a)\,dZ(a)$$

なる如き $L_2(Z)=L_2(w)=L_2(x)\oplus L_2(y)$ なる random spectralfunction $Z(S)$ が存在する。 特に $t\in T$ に対して (4.8) を得る。 § 4.4. により $\{f(t,a);\ t\in T\}$ は假定により， $L_2(R)$ に於ける基本集合であるから， $L_2(x)=L_2(Z)$ は成立しない。

(iii). (i) で定義した l_S の一意的，線型且つ有界であることの証明．

1° l_S の一意性

$$z=\sum_{k=1}^{n} c_k\, x(t_k)=\sum_{k=1}^{n'} c'_k x(t'_k)$$

とすれば，如何なる $t\in T$ に対しても (4.10) より

$$E\{z\,\overline{x(t)}\}=\sum_{k=1}^{n} c_k E\{\overline{x(t)}\,x(t_k)\}=\sum_{k=1}^{n} c_k\int_R \overline{f(t,a)}\,f(t_k,a)\,d\sigma(a)$$

$$=\sum_{k=1}^{n'} c'_k E\{\overline{x(t)}\,x(t'_k)\}=\sum_{k=1}^{n'} c'_k\int_R \overline{f(t,a)}\,f(t'_k,a)\,d\sigma(a)$$

従って $\sum_{k=1}^{n} c_k f(t_k,a)-\sum_{k=1}^{n'} c'_k f(t'_k,a)=\varphi(a)$ と書いて

$$\int_R \overline{f(t,a)}\,\varphi(a)\,d\sigma(a)=0.$$

依って假定によって

$$\int_R |\varphi(a)|^2 d\sigma(a)=0.$$

Schwarz の不等式により

$$\left|\int_S \varphi(a)\,d\sigma(a)\right|^2\leqq \int_S d\sigma(a)\cdot\int_S |\varphi(a)|^2 d\sigma(a)=0.$$

従って

$$\int_S \varphi(a)\,d\sigma(a)=\int_S\sum_{k=1}^{n} c_k f(t_k,a)\,d\sigma(a)-\int_S\sum_{k=1}^{n'} c'_k f(t'_k,a)\,d\sigma(a)=0.$$

2° l_S の線型性． これは明か．

3° l_S の有界性． Schwarz の不等式により

$$|l_S(z)|^2 = \left|\int_S \sum_{k=1}^{n} c_k f(t_k, a)\, d\sigma(a)\right|^2 \leqq \sigma(S)\cdot\int_S \left|\sum_{k=1}^{n} c_k f(t_k, a)\right|^2 d\sigma(a).$$

再び（4.10）によつて

$$\int_S \left|\sum_{k=1}^{n} c_k f(t_k, a)\right|^2 d\sigma(a) \leqq \int_R \left|\sum_{k=1}^{n} c_k f(t_k, a)\right|^2 d\sigma(a)$$

$$= \sum_{i,j=1}^{n} c_i \bar{c}_j \int_R f(t_i, a)\overline{f(t_j, a)}\, d\sigma(a) = E\left\{\left|\sum_{k=1}^{n} c_k x(t_k)\right|^2\right\} = \|z\|^2.$$

従つて

$$|l_S(z)| \leqq \|z\|\cdot(\sigma(S))^{\frac{1}{2}}.$$

$\sigma(S) < \infty$ だから，l_S は有界である．　　（終）

§ 4．6．　Fubini の定理に対応して

定　理　4．3．　$f(t, a)$ が $T \times R$ の上で可測ならば，

$$x(t) = \int_R f(t, a)\, dZ(a) \qquad (4.8)$$

によつて定義された random function $x(t)$ は可測である．
$x(t)$ が T の上で積分可能であるためには，

$$\int_R \left|\int_T f(t, a)\, d\tau(t)\right|^2 d\sigma(a)$$

が有限であることが必要且つ充分である．　しかもこの時次の式が成立する：

$$\int_T x(t)\, d\tau(t) = \int_R \left\{\int_T f(t, a)\, d\tau(t)\right\} dZ(a).$$

証　明．　（＊＊）により如何なる $z \in L_2(x)$ に対しても

$$E\{z\overline{x(t)}\} = \int_R f_z(a)\overline{f(t, a)}\, d\sigma(a).$$

依つて $E\{z\overline{x(t)}\}$ は如何なる z に対しても可測である（Fubini の定理）．　更に定理3．3．により $\sigma(S) < \infty$ なる如何なる S に対しても

$$E\{Z(S)\cdot\overline{\int_T x(t)d\tau(t)}\}=\int_T E\{Z(S)\cdot\overline{\int_R f(t,a)dZ(a)}\}d\tau(t)$$
$$=\int_T\{\int_S\overline{f(t,a)}d\sigma(a)\}d\tau(t).$$

之と対応して

$$E\{Z(S)\cdot\overline{\int_R\{\int_T f(t,a)d\tau(t)\}dZ(a)}\}=\int_S\{\overline{\int_T f(t,a)d\tau(t)}\}d\sigma(a)$$
$$=\int_S\{\int_T\overline{f(t,a)}d\tau(t)\}d\sigma(a).$$

しかるに Schwarz の不等式により

$$|\int_S\{\int_T\overline{f(t,a)}d\tau(t)\}d\sigma(a)|^2\leqq\sigma(S)\cdot\int_S|\int_T\overline{f(t,a)}d\tau(t)|^2d\sigma(a)$$
$$\leqq\sigma(S)\cdot\int_R|\int_T f(t,a)d\tau(t)|^2d\sigma(a)$$

こゝで右辺は有限である。 Fubini の定理により

$$\int_T\{\int_S\overline{f(t,a)}d\sigma(a)\}d\tau(t)=\int_S\{\int_T\overline{f(t,a)}d\tau(t)\}d\sigma(a).$$

従つて $\sigma(S)<\infty$ でありさへすれば

$$E\{Z(S)\cdot\overline{\int_T x(t)d\tau(t)}\}=E\{Z(S)\cdot\overline{\int_R\{\int_T f(t,a)d\tau(t)\}dZ(a)}\}.$$

$Z(S)$ の値庫は $L_2(X)$ に於ける基本集合であるから，補題2系により一求むる等式を得る。 (終)

§ 4.7. $\sigma(S)<\infty$ なる R の如何なる可測部分集合 S に対しても $g(a)\in L_2(S)$ なる函数 $g(a)$ を考へる。

然る時は明かに

$$Z^*(S)=\int_S g(a)dZ(a)$$

は測度

$$\sigma^*(S)=\int_S|g(a)|^2d\sigma(a) \qquad (4\cdot11)$$

に対応する random spectralfunction である。 函数 $f(a)$ が σ^* に関する $L_2(R)$ の中にあるならば，

$$\int_R f(a)\,dZ^*(a) = \int_R f(a)g(a)\,dZ(a) \qquad (4.12)$$

が成立する。　これは左辺の積分をその定義に従つて有限和の列によつて近似すれば直ちに分る。

$g(a)$ が（σ－）殆んど到る処零と異なるならば，(4.12) に於て

$$f(a) = \frac{c_S(a)}{g(a)}$$

とおくことが出来る。　然らば

$$Z(S) = \int_S \frac{dZ^*(a)}{g(a)}$$

従つて $L_2(Z^*) = L_2(Z)$．　特に $|g(a)| \equiv 1$ ならば，(4.11) により $\sigma^*(S) \equiv \sigma(S)$ が成立する。

§ 4. 8.　スペクトル表示の例．

1°　$x(t)$ をその相関函数が

$$r(s,t) = \sum_k f_k(s)\overline{f_k(t)}$$

によつて與へられる random function とする。　然る時は $x(t)$ に対して表示

$$x(t) = \sum_k z_k f_k(t)$$

が成立する如き直交系 $\{z_k\}$ が存在する。これより § 2.3. に注意して，$x(t)$ が可分であるためには，$r(s,t)$ に対して上の bilinear representation が成立することが必要且つ充分である．

2°　T を複素平面とし且つ $r(t)$ を整函数で，$t=0$ に対する凡ての次数の導函数は実且つ非負でそして如何なる t に対しても実数 c_k によつて

$$r(t) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k^2 t^k$$

が成立するものとする。 然る時は $r(s,t)=r(s,\bar{t})$ は quasi-definite hermitian function である。

これが random function $x(t)$ の相関函数であるならば，

$$r(s\bar{t})=\sum_{k=0}^{\infty}c_k^2 s^k \bar{t}^k$$

により，$\{z_k\}$ を $L_2(x)$ の完全正規直交系として，

$$x(t)=\sum_{k=0}^{\infty}c_k z_k t^k$$

なる表示が成立する。 即ち

$$\sum_{k=0}^{\infty}\varphi_k t^k c_k \equiv 0$$

が成立する如き $\sum_{k=0}^{\infty}|\varphi_k|^2=1$ なる複素数列 $\{\varphi_k\}$ は存在しない。

上記二つの例では，R は凡ての正整数の集合で $\sigma(S)$ は S の中の元の個数である（§ 4. 3. 参照）。

3° 直交 random function. $\xi(t)$ を次の性質を持つ random function とする。

$$\begin{cases} \|\xi(b)-\xi(a)\|^2=|b-a|, & \text{for all } a \text{ and } b, \\ \xi(d)-\xi(c)\perp\xi(b)-\xi(a), & a<b\leqq c<d, \\ \xi(0)=0. \end{cases}$$

これより容易に分る如く

$$r(s,t)=\frac{1}{2}(|s|+|t|-|s-t|).$$

然るによく知られてゐる如く，

$$|s|=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin\lambda^2 s}{\lambda^2}\,ds=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{2-e^{i\lambda s}-e^{-i\lambda s}}{\lambda^2}\,d\lambda,$$

之と対応して $|t|$，$|s-t|$ を同様な形に書いて

$$r(s,t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{i\lambda s}-1}{i\lambda}\cdot\left(\overline{\frac{e^{i\lambda t}-1}{i\lambda}}\right)d\lambda$$

を得る。 定理4．2．により

$$\xi(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{i\lambda t}-1}{i\lambda}\,dZ(\lambda)$$

が成立する如き普通の Lebesque 測度に対応する実直線上で定義された random spectralfunction $Z(S)$ が存在する。

random function

$$\xi^{*}(\lambda)=\int_{0}^{\lambda}dZ(\lambda)$$

は明かにはじめに挙げた三つの性質を有する。 容易に分る如く，$Z(\lambda)$ は $\xi^{*}(\lambda)$ によつて凡ての Lebesque 可測集合に対して一意的に定義される。 依つて $f(\lambda)\in L_2(-\infty,\infty)$ の時，積分

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(\lambda)\,d\xi^{*}(\lambda)$$

を簡単に

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(\lambda)d\xi^{*}(\lambda)=\int_{-\infty}^{\infty}f(\lambda)dZ(\lambda)$$

によつて定義出来る。 然る時は

$$\xi(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{i\lambda t}-1}{i\lambda}\,d\xi^{*}(\lambda).$$

一方，之に対して逆公式

$$\xi^{*}(t)=\frac{-1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-i\lambda t}-1}{it}\,d\xi(t)$$

が成立する． それには，右辺の積分を有限和によつて近似し，その中の ξ — 値を前の公式によつて表はし，そして極限に持つて行けばよい。

$\xi(t)$ が區間（0，1）の上に制限されてゐる場合には，上記の $\xi(t)$

に対する積分の代りに和を得る。

Wiener はこの和によつて fundamental random function を定義してゐる。彼は和の random coefficient が，Gauss-Laplace の法則に従つて分布し且つ互に独立であると假定してゐる。そしてこの時 $\xi(t)$ が殆んど確実に連続であることを証明してゐる。（上述の係数が互に独立であることだけを假定しても同一の結果が成立する。）（Paley-Wiener [1]，Chap. 9 参照）

$\xi(t)$，$(t)\geqq 0$ と制限すれば，$r(s,t)=\frac{1}{2}(|s+t|-|s-t|)$. 依つて

$$r(s,t)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin\lambda s\sin\lambda t}{\lambda^2}\,d\lambda.$$

定理 4.2. により

$$\xi(t)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty \frac{\sin\lambda t}{\lambda}\,d\xi_1^*(\lambda),\quad (t\geqq 0),$$

但し $\xi_1^*(\lambda)$ は $\lambda\geqq 0$ に対して定義され且つはじめに挙げた三つの性質を有する。この表示は実数である，即ち $\xi(t)$ が実数ならば $\xi_1^*(\lambda)$ も実数である。