⑦ Order Statisticsを利用した平均値と標準偏差の推定値について

（其の一）

阪大 理学部数学教室

小川 潤次郎

はしがき

正規母集団 $N(m, \sigma^2)$ の母平均 m，母分散 σ^2 の標本からの推定値としてわ，夫々

標本平均 $$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

不偏分散推定値

$$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$$

が最も効率の高いものであることは良く知られている。しかし今標本数 n が非常に大きいとき，そして分類機が使用可能であるときに，その内から，例えば10コ内外の値を選んで，それらの一次式を用いて m や σ を推定して見当をつけるというような事情が起る。このとき，効率を最大にするには，どのように選べばよいか？ このような問題に対する解答として1946年に Frederick Mosteller (1) わ，その学位論文で Order Statistics の利用を提唱した。

Mosteller のやり方わ Sample Size n として，これから k コの Order Statistics

$$x(n_1) < x(n_2) < \cdots < x(n_k)$$

但し　$n_i + n_{k-i+1} = n \quad i = 1, 2, \cdots, k$

（このようなとり方を Symmetric Spacing と呼んでおく。）を取ってこれの平均値

$$\hat{\theta}_k = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k} x(n_i)$$

を m の推定値とし又

$$\hat{\sigma} = \frac{\sum \{ x(n_{k-i+1}) - x(n_i) \}}{C}$$

を σ の推定値として，それらの効率（$\bar{x}$ 及び s^2 の分散に対する $\hat{\theta}_k$，$\hat{\sigma}$ の分散の比）を最大ならしめるように Spacing を決定したのであった。山内二郎教授[2]わ更に重みを考えることによって更に効率を高め得ることを示した。

然し両者共に Symmetric Spacing で且つ m, σ の何れか一方が既知の場合に他の未知なる方を推定する場合のみ取扱ったのであった。

こゝでわ，拡張された最小自乗法に関する A. Markoff の定理[3] を援用することによって，山内教授の計算（重みの決定の）のよって来る必然性を示し Symmetric ならざる一般の Spacing の場合の推定値の公式を与え，特に m, σ が同時に未知なる場合の推定値の公式を与える。

§1 最小自乗法に関する A. Markoff の定理

定　　　理

（i）$x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n$ わ平均値が夫々 $m_1, m_2, \cdots\cdots, m_n$ で，その分散行列（ Variance-covariance Matrix ）が

$$(\sigma^2 d_{ij}), \quad i,j = 1, 2, \cdots\cdots, n$$

なる Non-singular な n 次元分布に従う。但しこゝで d_{ij} わ既知で，σ^2 わ未知なる定数である。

（ii）平均値 $m_1, m_2, \cdots\cdots, m_n$ わ s 箇（ $s < n$ ）の未知定数，$\theta_1, \theta_2, \cdots\cdots, \theta_s$ の一次形式である，即ち

$$m_i = a_{i1}\theta_1 + a_{i2}\theta_2 + \cdots\cdots + a_{is}\theta_s, \quad i = 1, 2, \cdots\cdots, n$$

こゝで a_{ij} わ既知定数である。

（iii）上の一次形式の係数行列 A

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & a_{1s} \\ a_{21} & a_{22} & & \cdots & a_{2s} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & \cdots & a_{ns} \end{pmatrix}$$

の階数わ s である。

（iv）

$$(d_{ij})^{-1} = (D_{ij})$$

以上の條件の下で，未知量

$$b_1\theta_1 + b_2\theta_2 + \cdots\cdots + b_s\theta_s$$

（但し $b_1, b_2, \cdots\cdots, b_s$ わ既知とする）

の最良不偏線形推定値（ The best linear unbiased estimate)[4]
Fわ次のようにして求められる。

今

$$S = \sum_{i,j=1}^{n} D_{ij} \left(x_i - \sum_{\alpha=1}^{s} a_{i\alpha}\theta_\alpha\right)\left(x_j - \sum_{\beta=1}^{s} a_{j\beta}\theta_\beta\right) \qquad (1)$$

において，$x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n$ を与えられたものとして，Sを最小ならしめるような θ_α の値を θ_α^0 とすれば

$$F = b_1\theta_1^0 + b_2\theta_2^0 + \cdots\cdots + b_s\theta_s^0 \qquad (2)$$

である。　このとき S の最小値を

$$S_0 = \sum_{i,j=1}^{n} D_{ij} \left(x_i - \sum_{\alpha=1}^{s} a_{i\alpha}\theta_\alpha^0\right)\left(x_j - \sum_{\beta=1}^{s} a_{j\beta}\theta_\beta^0\right)$$

とすれば，$\dfrac{S_0}{n-s}$ わ σ^2 の不偏推定値である。　従って

$$F = l_1x_1 + l_2x_2 + \cdots\cdots + l_nx_n$$

とすれば，

$$\frac{S_0}{n-s} \times \sum_{i,j=1}^{n} d_{ij}\, l_i\, l_j \qquad (3)$$

わ F の分散の不偏推定値である。

§2. 問題の定式化

今考える正規母集団の密度函数を

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-m)^2\right\}$$

とする。大さ n の Order Statistics を考えて，その

$$n_1 < n_2 < \cdots\cdots < n_k$$

番目の Order Statistics を

$$x(n_1) < x(n_2) < \cdots\cdots < x(n_k)$$

とする。これらの同時分布の確率要素わ，よく知られたように

$$\frac{n!}{(n_1-1)!(n_2-n_1-1)!\cdots(n_k-n_{k-1}-1)!(n-n_k)!}\left(\int_{-\infty}^{x(n_1)} g(t)dt\right)^{n_1-1}\left(\int_{x(n_1)}^{x(n_2)} g(t)dt\right)^{n_2-n_1-1}\cdots\left(\int_{x(n_{k-1})}^{x(n_k)} g(t)dt\right)^{n_k-n_{k-1}-1}\left(\int_{x(n_k)}^{\infty} g(t)dt\right)^{n-n_k}\times$$

$$g(x(n_1))\,g(x(n_2))\cdots g(x(n_k))\,dx(n_1)\,dx(n_2)\cdots dx(n_k)$$

である。今

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n_i}{n} = \lambda_i \qquad i = 1, 2, \cdots, k$$

勿論

$$0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \cdots\cdots < \lambda_k < 1$$

が有限確定となるときの極限分布を考えよう。

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{t^2}{2}}$$

として

$$\int_{-\infty}^{u_i} f(t)\,dt = \lambda_i, \qquad i = 1, 2, \cdots, k$$

$$\int_{-\infty}^{x_i} g(t)\,dt = \lambda_i, \qquad i = 1, 2, \cdots, k$$

によって，u_i，x_i を決定すると，

$$x_i = m + u_i \sigma \qquad i = 1, 2, \cdots, k \qquad (4)$$

又

$$g_i = g(x_i), \qquad f_i = f(u_i) \qquad i = 1, 2, \cdots, k$$

とおくと

$$g_i = \frac{f_i}{\sigma} \qquad i = 1, 2, \cdots, k$$

である。

さて Mosteller の定理(5) によれば，今の場合の $x(n_1)$，$x(n_2)$，$\cdots$，$x(n_k)$ の極限分布の密度函数わ

$$C \cdot \exp\left[-\frac{1}{2}\left\{\sum_{i=1}^{k} \frac{\lambda_{i+1}-\lambda_{i-1}}{(\lambda_{i+1}-\lambda_i)(\lambda_i-\lambda_{i-1})} \cdot g_i^2 \times (x(n_i)-x_i)^2 - 2\sum_{i=2}^{k} \frac{g_i g_{i-1}}{\lambda_i-\lambda_{i-1}} (x(n_i)-x_i)(x(n_{i-1})-x_{i-1})\right\}\right]$$

$$
= C \cdot \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2} \left\{ \sum_{i=1}^{k} \frac{\lambda_{i+1}-\lambda_{i-1}}{(\lambda_{i+1}-\lambda_i)(\lambda_i-\lambda_{i-1})} f_i^2 \cdot (x(n_i)-m-u_i\sigma)^2 \right.\right.
$$

$$
\left.\left. -2\sum_{i=2}^{k} \frac{f_i f_{i-1}}{\lambda_i-\lambda_{i-1}} (x(n_i)-m-u_i\sigma)(x(n_{i-1})-m-u_{i-1}\sigma) \right\} \right] \qquad (5)
$$

である。

結局各々の問題は $x(n_1)$, $x(n_2)$, ……, $x(n_k)$ が（7）で與えられる k 次元正規分布をするときに，未知定数 m, σ の最良不偏線形推定値を求めることになる。 この場合の Markoff の定理の（D_{ij}）に相当するものは

$$
\begin{bmatrix}
\frac{\lambda_2-\lambda_0}{(\lambda_2-\lambda_1)(\lambda_1-\lambda_0)} f_1^2 & -\frac{f_2 f_1}{\lambda_2-\lambda_1} & 0 & \cdots\cdots & 0 \\
-\frac{f_2 f_1}{\lambda_2-\lambda_1} & \frac{\lambda_3-\lambda_1}{(\lambda_3-\lambda_2)(\lambda_2-\lambda_1)} f_2^2 & -\frac{f_3 f_2}{\lambda_3-\lambda_2} & \cdots\cdots & 0 \\
\cdots\cdots & \cdots\cdots & & & \\
0 & 0 & 0 & \cdots\cdots & \frac{1-\lambda_{k-1}}{(1-\lambda_k)(\lambda_k-\lambda_{k-1})} f_k^2
\end{bmatrix}
$$

但し　$\lambda_0 = 0$

であるから，（1）式わ

$$S = \sum_{i=1}^{k} \frac{\lambda_{i+1} - \lambda_{i-1}}{(\lambda_{i+1}-\lambda_i)(\lambda_i-\lambda_{i-1})} f_i^2 \left(x(n_i) - m - u_i\sigma \right)^2$$

$$- 2\sum_{i=2}^{k} \frac{f_i\, f_{i-1}}{\lambda_i - \lambda_{i-1}} \left(x(n_i) - m - u_i\sigma \right)\left(x(n_{i-1}) - m - u_i\sigma \right) \tag{6}$$

となる。従って $m,\ \sigma$ の最良不偏推定値わ

$$\frac{\partial S}{\partial m} = 0, \qquad \frac{\partial S}{\partial \sigma} = 0$$

の解として與えられることになる。

§3. 最良不偏線形推定値の決定

一般の場合を考える前に Special Cases から調べて行かう。

1. σ 既知の場合

このときわ $\sigma = 1$ として差支えない。

$$x'(n_i) = x(n_i) - n_i, \qquad i = 1, 2, \cdots, k$$

とすると，

$$S = \sum_{i=1}^{k} \frac{\lambda_{i+1} - \lambda_{i-1}}{(\lambda_{i+1}-\lambda_i)(\lambda_i-\lambda_{i-1})} f_i^2 \cdot \left(x'(n_i) - m \right)^2$$

$$- 2\sum_{i=2}^{k} \frac{f_i\, f_{i-1}}{\lambda_i - \lambda_{i-1}} \left(x'(n_i) - m \right)\left(x'(n_{i-1}) - m \right)$$

となって，このときの m の最良不偏線形推定値を $\hat{m}_0$ とすれば，，

$$\hat{m}_0 = K_1 \cdot \Bigg[\sum_{i=1}^{k} \frac{\lambda_{i+1}-\lambda_{i-1}}{(\lambda_{i+1}-\lambda_i)(\lambda_i-\lambda_{i-1})} f_i^2 \cdot x'(n_i)$$

$$- \sum_{i=2}^{k} \frac{f_i f_{i-1}}{\lambda_i-\lambda_{i-1}} \left(x'(n_i) + x'(n_{i-1}) \right) \Bigg]$$

$$= K_1 \cdot \sum_{i=1}^{k} \left(\frac{f_i - f_{i-1}}{\lambda_i - \lambda_{i-1}} - \frac{f_{i+1} - f_i}{\lambda_{i+1} - \lambda_i} \right) \cdot f_i \left(x(n_i) - u_i \right) \qquad (7)$$

但し

$$K_1^{-1} = \sum_{i=1}^{k} \left(\frac{f_i - f_{i-1}}{\lambda_i - \lambda_{i-1}} - \frac{f_{i+1} - f_i}{\lambda_{i+1} - \lambda_i} \right) f_i = \sum_{i=1}^{k+1} \frac{(f_i - f_{i-1})^2}{\lambda_i - \lambda_{i-1}} \qquad (8)$$

但しこゝでも、

$$\lambda_0 = 0 \ , \quad \lambda_{k+1} = 1 \ , \quad f_0 = f_{k+1} = 0$$

とする。

今簡単の爲に

$$a_i = \frac{f_i - f_{i-1}}{\lambda_i - \lambda_{i-1}} \quad , \quad i = 1, 2, \cdots\cdots, k+1$$

$$\sum_{i=1} (a_i - a_{i+1}) = a_1 - a_{k+1}$$

$$= \frac{f_1}{\lambda_1} + \frac{f_k}{1-\lambda_k} = \frac{f_1(1-\lambda_k) + f_k \lambda_1}{\lambda_1(1-\lambda_k)_{f_k}}$$

$$\sum_{i=1}^{k} (a_i - a_{i+1}) \lambda_i = a_1 \lambda_1 + \sum_{i=2} a_i (\lambda_i - \lambda_{i-1}) - a_{k+1} \lambda_k$$

$$= a_1 \lambda_1 + \sum_{i=2}^{k} (f_i - f_{i-1}) - a_{k+1} \lambda_k$$

$$= \frac{f_1}{\lambda_1} \lambda_1 + f_k - f_1 + \frac{f_k}{1-\lambda_k} \lambda_k = \frac{f_k}{1-\lambda_k}$$

$$\hat{m}_0 = K_1 \left\{ \sum_{i=1}^{k} (a_i - a_{i+1}) f_i \cdot (x(n_i) - u_i) \right\}$$

で，

$$E\left(x(n_i) - m - u_i\right)\left(x(n_j) - m - u_j\right) = \frac{\lambda_i(1-\lambda_j)}{n f_i f_j}$$

$$i \leqq j$$

なることを用いて，$\hat{m}_0$ の分散 $\sigma^2_{\hat{m}_0}$ を計算すると，

$$\sigma^2_{\hat{m}_0} = K_1^2 \cdot \left\{ \sum_{i=1}^{k} (a_i - a_{i+1})^2 \cdot f_i^2 \cdot \frac{\lambda_i(1-\lambda_i)}{n f_i^2} + 2 \sum_{i<j} (a_i - a_{i+1})(a_j - a_{j+1}) f_i f_j \frac{\lambda_i(1-\lambda_j)}{n f_i f_j} \right\}$$

$$= \frac{K_1^2}{n} \cdot \left\{ \sum_{i=1}^{k} (a_i - a_{i+1})^2 \lambda_i + 2 \sum_{i<j} (a_i - a_{i+1})(a_j - a_{j+1}) \lambda_i - \frac{f_k^2}{(1-\lambda_k)^2} \right\} \tag{9}$$

となる。

いくつか書いて見ると次の通りである。

(i) $k = 2$.

$$\hat{m}_0 = \frac{\left(\frac{f_1}{\lambda_1} - \frac{f_2 - f_1}{\lambda_2 - \lambda_1}\right) f_1 \cdot (x(n_1) - u_1) + \left(\frac{f_2 - f_1}{\lambda_2 - \lambda_1} + \frac{f_2}{1-\lambda_2}\right) f_2 \cdot (x(n_2) - u_2)}{\frac{f_1^2}{\lambda_1} + \frac{(f_2 - f_1)^2}{\lambda_2 - \lambda_1} + \frac{f_2^2}{1-\lambda_2}}$$

$$\sigma^2_{\hat{m}_0} = \frac{\left(\frac{f_1}{\lambda_1} - \frac{f_2 - f_1}{\lambda_2 - \lambda_1}\right)^2 \lambda_1 + \left(\frac{f_2 - f_1}{\lambda_2 - \lambda_1} + \frac{f_2}{1-\lambda_2}\right)^2 \lambda_2 + 2\left(\frac{f_1}{\lambda_1} - \frac{f_2 - f_1}{\lambda_2 - \lambda_1}\right)\left(\frac{f_2 - f_1}{\lambda_2 - \lambda_1} + \frac{f_2}{1-\lambda_2}\right)\lambda_1 - \frac{f_2^2}{(1-\lambda_2)^2}}{n\left(\frac{f_1^2}{\lambda_1} + \frac{(f_2 - f_1)^2}{\lambda_2 - \lambda_1} + \frac{f_2^2}{1-\lambda_2}\right)^2}$$

特に Symmetric Spacing では

$$u_1 + u_2 = 0, \quad f_1 = f_2, \quad \lambda_1 + \lambda_2 = 1$$

$$\hat{m}_0 = \frac{f_1}{\lambda_1}\left\{ x(n_1) + x(n_2) \right\}$$

$$\sigma^2_{\hat{m}_0} = \frac{2\lambda_1}{4nf_1^2}$$

これわ Mosteller の場合[6] と一致する。

(ii) $k = 3$

$$\hat{m}_0 = \frac{\left(\frac{f_1}{\lambda_1} - \frac{f_2 - f_1}{\lambda_2 - \lambda_1}\right) f_1 \cdot (x(n_1) - u_1) + \left(\frac{f_2 - f_1}{\lambda_2 - \lambda_1} - \frac{f_3 - f_2}{\lambda_3 - \lambda_2}\right) f_2 \cdot (x(n_2) - u_2) + \left(\frac{f_3 - f_2}{\lambda_3 - \lambda_2} + \frac{f_3}{1 - \lambda_3}\right) f_3 \cdot (x(n_3) - u_3)}{\frac{f_1^2}{\lambda_1} + \frac{(f_2 - f_1)^2}{\lambda_2 - \lambda_1} + \frac{(f_3 - f_2)^2}{\lambda_0 - \lambda_2} + \frac{f_3^2}{1 - \lambda_3}}$$

$$\sigma^2_{\hat{m}_0} = \frac{\left(\frac{f_1}{\lambda_1} - \frac{f_2 - f_1}{\lambda_2 - \lambda_1}\right)^2 \lambda_1 + \left(\frac{f_2 - f_1}{\lambda_2 - \lambda_1} - \frac{f_3 - f_1}{\lambda_3 - \lambda_2}\right)^2 \lambda_2 + \left(\frac{f_3 - f_2}{\lambda_3 - \lambda_2} + \frac{f_3}{1 - \lambda_3}\right)^2 \lambda_3 + 2\left(\frac{f_1}{\lambda_1} - \frac{f_2 - f_1}{\lambda_2 - \lambda_1}\right)\left(\frac{f_2 - f_1}{\lambda_2 - \lambda_1} - \frac{f_3 - f_2}{\lambda_3 - \lambda_2}\right)\lambda_1 \quad *}{n\left(\frac{f_1^2}{\lambda_1} + \frac{(f_2 - f_1)^2}{\lambda_2 - \lambda_1} + \frac{(f_3 - f_2)^2}{\lambda_3 - \lambda_2} + \frac{f_3^2}{1 - \lambda_3}\right)^2}$$

$$* \quad \underline{+ 2\left(\frac{f_1}{\lambda_1} - \frac{f_2 - f_1}{\lambda_2 - \lambda_1}\right)\left(\frac{f_3 - f_2}{\lambda_3 - \lambda_2} + \frac{f_3}{1 - \lambda_3}\right)\lambda_1 + 2\left(\frac{f_2 - f_1}{\lambda_2 - \lambda_1} - \frac{f_3 - f_2}{\lambda_3 - \lambda_2}\right)\left(\frac{f_3 - f_2}{\lambda_3 - \lambda_2} + \frac{f_3}{1 - \lambda_3}\right)\lambda_2 - \frac{f_3^2}{(1 - \lambda_3)^2}}$$

特に Symmetric Spacing なら

$$u_1 + u_3 = 0, \quad u_2 = 0, \quad \lambda_1 + \lambda_3 = 1, \quad \lambda_2 = \frac{1}{2}$$

$$f_1 = f_3 \qquad f_2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

$$\hat{m}_0 = \frac{f_1 - \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\lambda_1}{\lambda_1(1 - 2\lambda_1)} \cdot f_1 \left(x(n_1) + x(n_3) \right)$$

$$\sigma_{\hat{m}_0}^2 = \frac{\left(\frac{f_1}{\lambda_1} - \frac{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} - f_1}{\frac{1}{2} - \lambda_1}\right)^2 (1+2\lambda_1) - \frac{f_1^2}{\lambda_1^2}}{4n \frac{f_1^4}{\lambda_1^2}}$$

Mostellerでわ

$$\sigma_{\hat{m}_0}^2 = \frac{2}{9n} \left\{ \frac{\lambda_1}{f_1^2} + \frac{\lambda_1\sqrt{2\pi}}{f_1} + \frac{\pi}{4} \right\}$$

である。

Ⅱ. m が既知の場合。

このときわ，$m=0$ としてやってよい。それわ丁度 $x(n_i)-m$ を改めて $x(n_i)$ と考えることに相当する。

このとき Markoff の定理の S は

$$S = \sum_{i=1}^{k} \frac{\lambda_{i+1}-\lambda_{i-1}}{(\lambda_{i+1}-\lambda_i)(\lambda_i-\lambda_{i-1})} f_i^2 \cdot (x(n_i)-u_i\sigma)^2$$

$$-2\sum_{i=2}^{k} \frac{f_i f_{i-1}}{\lambda_i-\lambda_{i-1}} (x(n_i)-u_i\sigma)(x(n_{i-1})-u_{i-1}\sigma)$$

となるから

$$-\frac{1}{2}\frac{\partial S}{\partial \sigma} = \sum_{i=1}^{k} \frac{\lambda_{i+1}-\lambda_{i-1}}{(\lambda_{i+1}-\lambda_i)(\lambda_i-\lambda_{i-1})} f_i^2 \cdot u_i (x(n_i)-u_i\sigma)$$

$$-\sum_{i=2}^{k} \frac{f_i f_{i-1}}{\lambda_i-\lambda_{i-1}} \left\{ u_i (x(n_{i-1})-u_{i-1}\sigma) + u_{i-1}(x(n_i)-u_i\sigma) \right\}$$

よって，σ の最良不偏線形推定値を $\hat{\sigma}_0$ とすれば，それは

$$\hat{\sigma}_0\left[\sum_{i=1}^{k}\frac{\lambda_{i+1}-\lambda_{i-1}}{(\lambda_{i+1}-\lambda_i)(\lambda_i-\lambda_{i-1})}f_i^2 u_i^2-2\sum_{i=2}^{k}\frac{f_i u_i f_{i-1}u_{i-1}}{\lambda_i-\lambda_{i-1}}\right]$$

$$=\sum_{i=1}^{k}\frac{\lambda_{i+1}-\lambda_{i-1}}{(\lambda_{i+1}-\lambda_i)(\lambda_i-\lambda_{i-1})}f_i^2 u_i x(n_i)-\sum_{i=2}^{k}\frac{f_i f_{i-1}}{\lambda_i-\lambda_{i-1}}\left(u_{i-1}x(n_i)+u_i x(n_{i-1})\right)$$

から求められる筈である。　即ち

$$\hat{\sigma}_0=K_2\cdot\left[\sum_{i=1}^{k}\left(\frac{f_i u_i-f_{i-1}u_{i-1}}{\lambda_i-\lambda_{i-1}}-\frac{f_{i+1}u_{i+1}-f_i u_i}{\lambda_{i+1}-\lambda_i}\right)f_i\cdot x(n_i)\right] \tag{10}$$

但しこゝで

$$K_2^{-1}=\sum_{i=1}^{k}\left(\frac{f_i u_i-f_{i-1}u_{i-1}}{\lambda_i-\lambda_{i-1}}-\frac{f_{i+1}u_{i+1}-f_i u_i}{\lambda_{i+1}-\lambda_i}\right)f_i u_i$$

$$=\sum_{i=1}^{k+1}\frac{(f_i u_i-f_{i-1}u_{i-1})^2}{\lambda_i-\lambda_{i-1}} \tag{11}$$

こゝで

$$b_i=\frac{f_i u_i-f_{i-1}u_{i-1}}{\lambda_i-\lambda_{i-1}}\qquad i=1,2,\cdots,k+1$$

とおくと，前と同様に計算で

$$\sum_{i=1}^{k+1}(b_i-b_{i+1})\lambda_i=\frac{f_k u_k}{1-\lambda_k}$$

$\hat{\sigma}_0$ の分散を計算すると，

$$\sigma_{\hat{\sigma}_0}^2 = \frac{K_2^2\sigma^2}{n}\cdot\left[\sum_{i=1}^{k}(b_i-b_{i+1})^2\lambda_i + 2\sum_{i<j}(b_i-b_{i+1})(b_j-b_{j+1})\lambda_i - \frac{f_k^2 u_k^2}{(1-\lambda_k)^2}\right] \tag{12}$$

k の小さい場合を書いて見ると次のようになる。

(i) $k = 2$

$$\hat{\sigma}_0 = \frac{\left(\frac{f_1u_1}{\lambda_1} - \frac{f_2u_2-f_1u_1}{\lambda_2-\lambda_1}\right)f_1\cdot x(n_1) + \left(\frac{f_2u_2-f_1u_1}{\lambda_2-\lambda_1} + \frac{f_2u_2}{1-\lambda_2}\right)f_2\cdot x(n_2)}{\frac{f_1^2u_1^2}{\lambda_1} + \frac{(f_2u_2-f_1u_1)^2}{\lambda_2-\lambda_1} + \frac{f_2^2u_2^2}{1-\lambda_2}}$$

$$\sigma_{\hat{\sigma}_0}^2 = \frac{\sigma^2}{n}\,\frac{\left(\frac{f_1u_1}{\lambda_1} - \frac{f_2u_2-f_1u_1}{\lambda_2-\lambda_1}\right)^2\lambda_1 + \left(\frac{f_2u_2-f_1u_1}{\lambda_2-\lambda_1} + \frac{f_2u_2}{1-\lambda_2}\right)^2\lambda_2 + 2\left(\frac{f_1u_1}{\lambda_1} - \frac{f_2u_2-f_1u_1}{\lambda_2-\lambda_1}\right)\left(\frac{f_2u_2-f_1u_1}{\lambda_2-\lambda_1} + \frac{f_2u_2}{1-\lambda_2}\right)\lambda_1 - \frac{f_2^2u_2^2}{(1-\lambda_2)^2}}{\left(\frac{f_1^2u_1^2}{\lambda_1} + \frac{(f_2u_2-f_1u_1)^2}{\lambda_2-\lambda_1} + \frac{f_2^2u_2^2}{1-\lambda_2}\right)^2}$$

特に Symmetric Spacing をとれば

$$f_1 = f_2, \qquad \lambda_1 + \lambda_2 = 1$$

$$u_1 + u_2 = 0$$

$$\hat{\sigma}_0 = \frac{1}{2u_1}\left(x(n_1) - x(n_2)\right)$$

$$\sigma_{\hat{\sigma}_0}^2 = \frac{\sigma^2}{4u_1^2 n}\left\{\frac{\lambda_1(1-\lambda_1)}{f_1^2} + \frac{\lambda_2(1-\lambda_2)}{f_1^2} - 2\,\frac{\lambda_1(1-\lambda_2)}{f_1 f_2}\right\}$$

$$= \frac{\sigma^2}{4nu_1^2f_1^2}\left(2\lambda_1 - 4\lambda_1^2\right) = \frac{\sigma^2}{2n}\times\frac{\lambda_1 - 2\lambda_1^2}{u_1^2f_1^2}$$

これも Mosteller の結果 (7) と一致する。

(ii) $k = 3$

$$\hat{\sigma}_0 = \frac{\left(\frac{f_1u_1}{\lambda_1}-\frac{f_2u_2-f_1u_1}{\lambda_2-\lambda_1}\right)f_1\,x(n_1)+\left(\frac{f_2u_2-f_1u_1}{\lambda_2-\lambda_1}-\frac{f_3u_3-f_2u_2}{\lambda_3-\lambda_2}\right)f_2\,x(n_2)+\left(\frac{f_3u_3-f_2u_2}{\lambda_3-\lambda_2}+\frac{f_3u_3}{1-\lambda_3}\right)f_3\,x(n_3)}{\frac{f_1^2u_1^2}{\lambda_1}+\frac{(f_2u_2-f_1u_1)^2}{\lambda_2-\lambda_1}+\frac{(f_3u_3-f_2u_2)^2}{\lambda_3-\lambda_2}+\frac{f_3^2u_3^2}{1-\lambda_3}}$$

$$\sigma_{\hat{\sigma}_0}^2 \text{ の分子} = \left(\frac{f_1u_1}{\lambda_1}-\frac{f_2u_2-f_1u_1}{\lambda_2-\lambda_1}\right)^2\lambda_1+\left(\frac{f_2u_2-f_1u_1}{\lambda_2-\lambda_1}-\frac{f_3u_3-f_2u_2}{\lambda_3-\lambda_2}\right)^2\lambda_2$$

$$+\left(\frac{f_3u_3-f_2u_2}{\lambda_3-\lambda_2}+\frac{f_3u_3}{1-\lambda_3}\right)^2\lambda_3+2\left(\frac{f_1u_1}{\lambda_1}-\frac{f_2u_2-f_1u_1}{\lambda_2-\lambda_1}\right)\left(\frac{f_2u_2-f_1u_1}{\lambda_2-\lambda_1}-\frac{f_3u_3-f_2u_2}{\lambda_3-\lambda_2}\right)\lambda_1$$

$$+2\left(\frac{f_1u_1}{\lambda_1}-\frac{f_2u_2-f_1u_1}{\lambda_2-\lambda_1}\right)\left(\frac{f_3u_3-f_2u_2}{\lambda_3-\lambda_2}+\frac{f_3u_3}{1-\lambda_3}\right)\lambda_1+2\left(\frac{f_2u_2-f_1u_1}{\lambda_2-\lambda_1}-\frac{f_3u_3-f_2u_2}{\lambda_3-\lambda_2}\right)\left(\frac{f_3u_3-f_2u_2}{\lambda_3-\lambda_2}+\frac{f_3u_3}{1-\lambda_3}\right)\lambda_2$$

$$-\frac{f_3^2u_3^2}{(1-\lambda_3)^2}$$

$$\sigma_{\hat{\sigma}_0}^2 \text{ の 分母} = \left\{\frac{f_1^2u_1^2}{\lambda_1}+\frac{(f_2u_2-f_1u_1)^2}{\lambda_2-\lambda_1}+\frac{(f_3u_3-f_2u_2)^2}{\lambda_3-\lambda_2}+\frac{f_3^2u_3^2}{1-\lambda_3}\right\}^2$$

III. m, σ 共に未知の場合

このときは（6）式の S を用いなければならない。

$$-\frac{1}{2}\frac{\partial S}{\partial m} = \sum_{i=1}^{k} \frac{\lambda_{i+1}-\lambda_{i-1}}{(\lambda_{i+1}-\lambda_i)(\lambda_i-\lambda_{i-1})} f_i^2 \left(x(n_i) - m - u_i\sigma \right)$$

$$\pm \sum_{i=2}^{k} \frac{f_i f_{i-1}}{\lambda_i-\lambda_{i-1}} \left(x(n_i) + x(n_{i-1}) - 2m - (u_i+u_{i-1})\sigma \right)$$

$$-\frac{1}{2}\frac{\partial S}{\partial \sigma} = \sum_{i=1}^{k} \frac{\lambda_{i+1}-\lambda_{i-1}}{(\lambda_{i+1}-\lambda_i)(\lambda_i-\lambda_{i-1})} f_i^2 \cdot u_i \left(x(n_i) - m - u_i\sigma \right)$$

$$\pm \sum_{i=2}^{k} \frac{f_i f_{i-1}}{\lambda_i-\lambda_{i-1}} \left\{ u_i x(n_{i-1}) + u_{i-1} x(n_i) - m(u_i+u_{i-1}) - 2u_i u_{i-1}\sigma \right\}$$

よって，m，σ の最良不偏線形推定値を夫々 $\hat{m}$，$\hat{\sigma}$ とすれば，それわ

$$\hat{m} \cdot \left[\sum_{i=1}^{k} \frac{\lambda_{i+1}-\lambda_{i-1}}{(\lambda_{i+1}-\lambda_i)(\lambda_i-\lambda_{i-1})} f_i^2 - 2\sum_{i=2}^{k} \frac{f_i f_{i-1}}{\lambda_i-\lambda_{i-1}} \right]$$

$$+ \hat{\sigma} \cdot \left[\sum_{i=1}^{k} \frac{\lambda_{i+1}-\lambda_{i-1}}{(\lambda_{i+1}-\lambda_i)(\lambda_i-\lambda_{i-1})} f_i^2 u_i - \sum_{i=2}^{k} \frac{f_i f_{i-1}}{\lambda_i-\lambda_{i-1}} (u_i+u_{i-1}) \right]$$

$$= \sum_{i=1}^{k} \frac{\lambda_{i+1}-\lambda_{i-1}}{(\lambda_{i+1}-\lambda_i)(\lambda_i-\lambda_{i-1})} f_i^2 x(n_i) - \sum_{i=2}^{k} \frac{f_i f_{i-1}}{\lambda_i-\lambda_{i-1}} \left(x(n_i) + x(n_{i-1}) \right)$$

$$\hat{m}\left[\sum_{i=1}^{k}\frac{\lambda_{i+1}-\lambda_{i-1}}{(\lambda_{i+1}-\lambda_i)(\lambda_i-\lambda_{i-1})}f_i^2u_i-\sum_{i=2}^{k}\frac{f_if_{i-1}}{\lambda_i-\lambda_{i-1}}(u_i+u_{i-1})\right]$$

$$+\hat{\sigma}\left[\sum_{i=1}^{k}\frac{\lambda_{i+1}-\lambda_{i-1}}{(\lambda_{i+1}-\lambda_i)(\lambda_i-\lambda_{i-1})}f_i^2u_i^2-2\sum_{i=2}^{k}\frac{f_if_{i-1}}{\lambda_i-\lambda_{i-1}}u_iu_{i-1}\right]$$

$$=\sum_{i=1}^{k}\frac{\lambda_{i+1}-\lambda_{i-1}}{(\lambda_{i+1}-\lambda_i)(\lambda_i-\lambda_{i-1})}f_i^2u_ix(n_i)\pm\sum_{i=1}^{k}\frac{f_if_{i-1}}{\lambda_i-\lambda_{i-1}}(u_ix(n_{i-1})+u_{i-1}x(n_{i-1}))$$

から求められる筈である。書直して

$$\hat{m}\left(\sum_{i=1}^{k+1}\frac{(f_i-f_{i-1})^2}{\lambda_i-\lambda_{i-1}}\right)+\hat{\sigma}\left(\sum_{i=1}^{k+1}\frac{(f_i-f_{i-1})(f_iu_i-f_{i-1}u_{i-1})}{\lambda_i-\lambda_{i-1}}\right)=\sum_{i=1}^{k+1}\frac{(f_i-f_{i-1})(f_ix(n_i)-f_{i-1}x(n_{i-1}))}{\lambda_i-\lambda_{i-1}} \tag{13}$$

$$\hat{m}\left(\sum_{i=1}^{k+1}\frac{(f_i-f_{i-1})(f_iu_i-f_{i-1}u_{i-1})}{\lambda_i-\lambda_{i-1}}\right)+\hat{\sigma}\left(\sum_{i=1}^{k+1}\frac{(f_iu_i-f_{i-1}u_{i-1})^2}{\lambda_i-\lambda_{i-1}}\right)=\sum_{i=1}^{k+1}\frac{(f_iu_i-f_{i-1}u_{i-1})(f_ix(n_i)-f_{i-1}x(n_{i-1}))}{\lambda_i-\lambda_{i-1}}$$

よって今

$$\Delta=\left(\sum_{i=1}^{k+1}\frac{(f_i-f_{i-1})^2}{\lambda_i-\lambda_{i-1}}\right)\left(\sum_{i=1}^{k+1}\frac{(f_iu_i-f_i+u_{i-1})^2}{\lambda_i-\lambda_{i-1}}\right)$$

$$-\left(\sum_{i=1}^{k+1}\frac{(f_i-f_{i-1})(f_iu_i-f_{i-1}u_{i-1})}{\lambda_i-\lambda_{i-1}}\right)^2 \tag{14}$$

とおくと，$\hat{m}$，$\hat{\sigma}$ が次のようになる。

$$\hat{m} = \frac{1}{\Delta} \times \left[\left(\sum_{i=1}^{k+1} \frac{(f_i u_i - f_{i-1} u_{i-1})^2}{\lambda_i - \lambda_{i-1}} \right) \left(\sum_{i=1}^{k+1} \frac{(f_i - f_{i-1})(f_i x(n_i) - f_{i-1} x(n_{i-1}))}{\lambda_i - \lambda_{i-1}} \right) \right.$$

$$\left. - \left(\sum_{i=1}^{k+1} \frac{(f_i - f_{i-1})(f_2 u_2 - f_{i-1} u_{i-1})}{\lambda_i - \lambda_{i-1}} \right) \left(\sum_{i=1}^{k+1} \frac{(f_i u_i - f_{i-1} u_{i-1})(f_{i-1} x(n_{i-1}))}{\lambda_i - \lambda_{i-1}} . \right) \right] \tag{15}$$

$$\hat{\sigma} = \frac{1}{\Delta} \times \left[\left(\sum_{i=1}^{k+1} \frac{(f_i - f_{i-1})(f_i u_i - f_{i-1} u_{i-1})}{\lambda_i - \lambda_{i-1}} \right) \left(\sum_{i=1}^{k+1} \frac{(f_i - f_{i-1})(f_i x(n_i) - f_{i-1} x(n_{i-1}))}{\lambda_i - \lambda_{i-1}} \right) \right.$$

$$\left. - \left(\sum_{i=1}^{k+1} \frac{(f_i - f_{i-1})^2}{\lambda_i - \lambda_i} \right) \left(\sum_{i=1}^{k+1} \frac{(f_i u_i - f_{i-1} u_{i-1})(f_i x(n_i) - f_{i-1} x(n_{i-1}))}{\lambda_i - \lambda_{i-1}} \right) \right] \tag{16}$$

Optimum Spacing の定め方及び数値計算の結果わ其二に於て述べる。

(1950. 10. 5)

参考文献

(1) Frederick Mosteller : On Some Useful "Inefficient" Statistics, Ann. of Math. Statist. Vol. 17. No. 4. December. 1946. p.p. 377－408

(2) 山内二郎 : 順序づけ統計量を利用した「平均値と標準偏差の推定値の計算」について, 統計数理研究. Vol. 3. No. 1～2. p.p. 52～57. (1949)

(3) F. N. David and J. Neyman : Extension of the Markoff Theorem On Least Squares : Statist. Res. Mem. Vol. 1. p. 105.
増山元三郎 : Markoff の定理について, 統数研講究録. Vol. 4 No. 11. (1949)
北川敏次郎 : Markoff の定理について, 統数研講究録. Vol. 5 No. 1 (1950)

(4) F. N. David and J. Neyman, loc. cit.

(5) F. Mosteller, loc. cit. Theorem. 2. p. 383.

(6) F. Mosteller, loc. cit. p. 387

(7) F. Mosteller. loc. cit. p. 393.

(受付 1950. 10. 10)