(23) # 系統統計量 (Siptomation Statistics) の理論及びその応用

大阪大学理学部数学教室　小川潤次郎

目　次

序　　　論

所謂統計的推定論の基本的な思想は標本の含む未知母数に関する有益な情報（Relevant Information）を最大限に汲み出そうとするものである。[1]　その上限を与えるものが報知高（amount of Information）である．そしてこのためには有効推定値[2]（Efficient Estimate）が用いられる．このような立場の基礎は標本の大さを増す費用が計算の費用に比較して著しく大なる場合であつて，農事試験における資料とか医学における臨床的例を取扱う様な場合である．

しかし現実に吾々の出会う場合には，これと反対の事情のことも屢々ある。例えば教育統計などの場合には，標本を増すことが非常に簡単である．このような場合には推定値自身は有効推定値でなくとも，標本の大いさを必要な丈大とすることによつて，推定精度を高めることができる．又非常に尨大な資料があるとき，その平均値なり，標準偏差なりを或程度の粗くともよいから迅速に知り度いということもある．

このような場合現今では分類機（Counting Sougkter）が利用出来るから如何に尨大な資料といえども簡単に順序づけが出来るという点に着目して順序づけ統計量又は，その函数である系統統計量（Siptematic Statistics）の利用を提唱したのは Frederick Mosteller であつた。

Mosteller はその学位論文[3]で正規母集団の平均値，標準偏差，相関係数の系統統計量による推定を考察しとその相対効率を最大ならしめるような順序づけ統計量の決定を問題とした．其後山内二郎教授[4]は正規母集団の平均値及び標準偏差の順序づけ統計量の一次結合による推定を取り扱い Mosteller よりも著しく高い効率を与えた。

本論文の目的は正規母集団の平均値及び標準偏差の推定及びそれらに関する統計的仮説の検定を系統統計量を用いて行う場合を最も一般的な立場から考察することである。

更にその応用として投薬死亡率曲線（Dosage Mortality Curve）及び時間死亡率曲線（Time-Mortality Curve）における母数の推定及び仮説検定について述べ、最後に住宅の平均耐用年限の推定について述べる.

本論文を草するに当つて、第6.1, 6.2, 6.3, 6.4, 6.5, 6.6 表の計算を担当された宮本良雄氏、著者に有益な助言を寄せられた山内二郎教授、増山元三郎博士、大阪市立大学の大沢清氏、統数研の鍋谷清治氏及び文献の筆写に当られた統数研の諸氏特に塩原由郎、藤本熙の両氏に深く感謝する.

第 1 章　推　定　論

本章では系統統計量を用いた場合の正規母集団の母数の推定について述べるのであるが、§1及び§2では統計的推定の一般論からの結果で後に必要なものを摘録しておく。

§1　正規不偏推定値

説明を簡単ならしめるため、考える母集団分布は連続型（連続な密度函数をもつ）としておくが、以下に述べる議論は必要な修正を加えれば離散型分布の母集団にも適用されることは勿論である。

推定さるべき母数が一つの場合と二つの場合を考える（三つ以上の場合も二つの場合と平行に論じられるが吾々は今これを必要としない）

1.　推定さるべき未知母数 α が只一つの場合

母集団の密度函数を $f(x;\alpha)$ とし、この函数型は既知とする。未知母数 α の考察範囲はある区間 A とする。

この母集団から無作為に抽出された大きさ n の任意標本 $x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n$ から計算される統計量

$$\alpha^* = \alpha^*(x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n)$$

が以下に述べる条件 1°, 2° を満たすとき、これを α の正規推定値（Regular Estimate）という。

1°　変数変換

$$\begin{aligned}
\alpha^* &= \alpha^*(x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n) \\
\xi_1 &= \xi_1(x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n) \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\xi_{n-1} &= \xi_{n-1}(x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n)
\end{aligned} \tag{1.1}$$

が次の条件 (a), (b) を満たすように新しい変数 $\alpha^*, \xi_1, \cdots\cdots, \xi_{n-1}$ を選ぶことが出来る。

(a)　$\alpha^*(x_1, \cdots, x_n)$, $\xi_1(x_1, \cdots, x_n)$, $\cdots$, $\xi_{n-1}(x_1, \cdots, x_n)$ は到る処一意且連続な函数で、又殆んど到る処で

$$\frac{\partial \alpha^*}{\partial x_i}, \ \frac{\partial \xi_j}{\partial x_i}; \quad i = 1, 2, \cdots\cdots, n;\ j = 1, 2, \cdots\cdots, n-1$$

が存在して且連続である．

(b) 変換 (1.1) は殆んど到　で逆向きにも一意的である．

よって変換 (1.1) の Jacobian を

$$J=\frac{\partial(x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n)}{\partial(\alpha^*, \xi_1, \cdots\cdots \xi_{n-1})}$$

とすれば，これは殆んど到　で 0 でない．

$$f(x_1;\alpha)\cdots\cdots f(x_n;\alpha)\,dx_1\cdots\cdots dx_n$$
$$=f(x_1;\alpha)\cdots\cdots f(x_n;\alpha)\,|J|\,d\alpha^* d\xi_1\cdots d\xi_{n-1} \qquad (1.2)$$

であるが，今こゝで，α^*の周辺分布の密度を $g(\alpha^*;\alpha)$，α^* を固定したときの $\xi_1,\cdots\xi_{n-1}$ の条件附分布の密度を $h(\xi_1,\cdots\cdots,\xi_{n-1}|\alpha^*;\alpha)$ とすれば

$$f(x_1;\alpha)\qquad f(x_n;\alpha)\,dx_1\cdots\cdots dx_n \qquad (1.3)$$
$$=g(\alpha^*;\alpha)\,h(\xi_1,\cdots\cdots \xi_{n-1}|\alpha^*;\alpha)\,d\alpha^* d\xi_1\cdots d\xi_{n-1}$$

(1.2) と (1.3) から

$$f(x_1;\alpha)\cdots f(x_n;\alpha)|J|=g(\alpha^*;\alpha)h(\xi_1,\cdots\cdots\xi_{n-1}|\alpha^*;\alpha) \qquad (1.4)$$

(c) 殆んどすべての $(x_1,\cdots\cdots x_n)$ α^* $\xi_1,\cdots\cdots,\xi_{n-1}$ に対して区間 A の各点 α で

$$\frac{\partial f}{\partial\alpha},\quad \frac{\partial g}{\partial\alpha},\quad \frac{\partial h}{\partial\alpha},$$

が存在して，且つ，

$$\left|\frac{\partial f}{\partial\alpha}\right|<F_0(x),\ \left|\frac{\partial g}{\partial\alpha}\right|<G_0(\alpha^*),\ \left|\frac{\partial h}{\partial\alpha}\right|<H_0(\xi_1,\cdots,\xi_{n-1}|\alpha^*) \qquad (1.5)$$

こゝで

$$F_0(x),\ G_0(\alpha^*),\ \alpha^* G_0(\alpha^*)\ H_0(\xi_1,\cdots,\xi_{n-1}|\alpha^*)$$

は α に無関係で夫々 x, α^*, 及び ξ_1　，ξ_{n-1} についてそれらの全区間で積分可能である．

これは例えば，

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}\int_{-\infty}^{\infty} f(x;\alpha)\,dx=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial}{\partial\alpha}f(x;\alpha)\,dx$$

を保証する条件である．

以下考える推定値はすべて正則なものに限るのであるが特に色々

が必要なのは不偏推定値（*Unbiased Estimate*）である．これは

$$\int_{-\infty}^{\infty} \alpha^* g(\alpha^*;\alpha)\, d\alpha^* = \alpha \qquad (1.6)$$

がすべてのαについて成立つようなものである．

正則性條件から

$$\int_{-\infty}^{\infty} \alpha^* \frac{\partial g(\alpha^*;\alpha)}{\partial\alpha} \partial\alpha^* = 1 \qquad (1.7)$$

又勿論

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(\alpha^*;\alpha)\, d\alpha^* = 1$$

であるから

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial g(\alpha^*;\alpha)}{\partial\alpha}\, d\alpha^* = 0 \qquad (1.8)$$

（1.7）と（1.8）から

$$\int_{-\infty}^{\infty} (\alpha^* - \alpha)\cdot \frac{\partial g(\alpha^*;\alpha)}{\partial\alpha} \partial\alpha^* = 1$$

又は

$$\int_{-\infty}^{\infty} (\alpha^* - \alpha)\sqrt{g(\alpha^*;\alpha)}\cdot \frac{1}{\sqrt{g(\alpha^*;\alpha)}} \frac{\partial g(\alpha^*;\alpha)}{\partial\alpha} d\alpha^* = 1$$

として *Schiwarz* の不等式を用いると

$$1 \leqq D^2(\alpha^*)\cdot E\left(\frac{\partial \log g(\alpha^*;\alpha)}{\partial\alpha}\right)^2$$

よつて

$$D^2(\alpha^*) \geqq \frac{1}{E\left(\dfrac{\partial \log g(\alpha^*;\alpha)}{\partial\alpha}\right)^2} \qquad (1.9)$$

を得るが，更に（1.4）から

$$nE\left(\frac{\partial \log f(x;\alpha)}{\partial\alpha}\right)^2 = E\left(\frac{\partial \log g}{\partial\alpha}\right)^2 + E\left(\frac{\partial \log h}{\partial\alpha}\right)^2 \qquad (1.10)$$

であるから不偏推定値については

$$D^2(\alpha^*) \geqq \frac{1}{nE\left(\dfrac{\partial \log f}{\partial\alpha}\right)^2} \qquad (1.11)$$

を得る。

若し更に $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial f}{\partial\alpha}dx=0$ が積分記号下で積分出来るならば

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial^2 f}{\partial\alpha^2}dx=0$$

だから

$$E\left(\frac{\partial^2\log f}{\partial\alpha^2}\right)=E\left(-\frac{1}{f^2}\left(\frac{\partial f}{\partial\alpha}\right)^2+\frac{1}{f}\frac{\partial^2 f}{\partial\alpha^2}\right)=-E\left(\frac{\partial\log f}{\partial\alpha}\right)^2$$

であるから (1.11) は

$$D^2(\alpha^*)\geqq\frac{1}{-E\left(\frac{\partial^2\log f}{\partial\alpha^2}\right)} \tag{1.11'}$$

としてよい。

吾々は H. Cramér に従って、任意の不偏推定値 α^* の効率 (Efficiency) $e(\alpha^*)$ を

$$e(\alpha^*)=\frac{1}{D^2(\alpha^*)\cdot nE\left(\frac{\partial\log f}{\partial\alpha}\right)^2} \tag{1.12}$$

で定義し、特に $e(\alpha^*)=1$ のとき α^* を α の有効推定値 (Efficient Estimate) と名づける。

$D^2(\alpha^*)$ が存在しないとき、若し $n\to\infty$ のときに $D(\alpha^*)\backsim\frac{c}{\sqrt{n}}$ ならば

$$e_0(\alpha^*)=\frac{1}{c^2E\left(\frac{\partial\log f}{\partial\alpha}\right)^2} \tag{1.13}$$

によって α^* の漸近的効率 (Asymptotic Efficiency) を定義し、$e_0(\alpha^*)=1$ のとき α^* は α の漸近的有効推定値 (Asymptotically Efficient Estimate) という。

$nE\left(\frac{\partial\log f}{\partial\alpha}\right)^2$ を報知高 (amount of Information) と名づける、これは f の函数型が与えられる限り母数 α に関する情報の限度を与えたものである。

正規母集団

$$f(x;m)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}(x-m)^2}$$

のときは

$$\frac{\partial\log f}{\partial m}=x-m$$

であるから、mの報知高は

$$nE\left(\frac{\partial \log f}{\partial m}\right)^2 = n \qquad (1.14)$$

よって不偏推定値の分散の下限は

$$\frac{1}{n}$$

であるから　$\alpha^* = \bar{x}$　は有効推定値である.

$$f(x;\sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$$

のときは

$$\frac{\partial \log f}{\partial \sigma} = -\frac{1}{\alpha} + \frac{x^2}{\sigma^3}$$

$$E\left(\frac{\partial \log f}{\partial \alpha}\right)^2 = \frac{1}{\alpha^2} - \alpha\frac{1}{\alpha^4}E(x^2) + \frac{1}{\alpha^6}E(x^4)$$

$$= \frac{1}{\alpha^2}$$

であるから報知高は

$$\frac{2n}{\alpha^2} \qquad (1.15)$$

で又不偏推定値の分散の下限は

$$\frac{\sigma^2}{2n}$$

である. 今

$$s_0^2 = \frac{1}{n}\sum_{n=1}^{n} x_i^2$$

とすれば ns_0^2/σ^2は自由度nのχ^2分布に従うから

$$\frac{n^{\frac{n}{2}}}{2^{\frac{n-2}{2}}\sigma^n \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} e^{-\frac{ns_0^2}{2\sigma^2}} s_0^{n-1} ds_0$$

よって

$$\sigma^* = \sqrt{\frac{n}{2}}\,\frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)} s_0$$

はσの不偏推定値であるが、このときは

$$D^2(\sigma^*) = \left(\frac{n}{2}\,\frac{\Gamma^2\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma^2\left(\frac{n+1}{2}\right)} - 1\right)\sigma^2 = \frac{\sigma^2}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

よってσ^* はσの漸近的は有効推定値である.

II 推定すべき未知母数が２つの場合．

母集団の密度函数を $f(x;\alpha,\beta)$ としてfの函数型は既知とする．

大さnの任意標本 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ から計算された α, β の推定値 $\alpha^*(x_1, \cdots\cdots, x_n)$, $\beta^*(x_1, \cdots\cdots x_n)$ が次の條件1°, 2°を満たすとき，これを正則推定値という．

1°, $n-2$ 箇の変数 $\xi_1(x_1, \cdots\cdots, x_n) \cdots\cdots, \xi_{n-2}(x_1, \cdots\cdots x_n)$ を適当に選べば変換

$$\alpha^* = \alpha^*(x_1, \cdots\cdots\cdots\cdots, x_n)$$
$$\beta^* = \beta^*(x_1, \cdots\cdots\cdots\cdots, x_n)$$
$$\xi_1 = \xi_1(x_1 \cdots\cdots\cdots\cdots, x_n)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\xi_{n-2} = \xi_{n-2}(x_1, \cdots\cdots\cdots\cdots, x_n)$$

は到る処一意且連続で，又殆んど到処で

$$\frac{\partial \alpha^*}{\partial x_i}, \frac{\partial \beta^*}{\partial x_i}, \frac{\partial \xi_j}{\partial x_i}, \quad i=1,2 \cdots n \ ; \ j=1,2 \cdots, n-2$$

が存在して連続である．又変換（1.16）は殆んど到処で逆用きにも一意的である．

よって Jacobian

$$J = \frac{\partial(x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n)}{\partial(\alpha^*, \beta^*, \xi_1, \cdots\cdots \xi_{n-2})}$$

は殆んど到処で0にはならないから

$$\begin{aligned}
&\prod_{i=1}^{n} f(x_i;\alpha,\beta) \cdot dx_1 \cdots\cdots dx_n \\
&= \prod_{i=1}^{n} f(x_i;\alpha,\beta) \cdot |J| \, d\alpha^* d\beta^* d\xi_1 \cdots\cdots d\xi_{n-2} \qquad (1.17) \\
&\equiv g(\alpha^*, \beta^*; \alpha, \beta) \, h(\xi_1, \cdots\cdots, \xi_{n-2} | \alpha^*, \beta^*; \alpha, \beta) \, d\alpha^* d\beta^* d\xi_1 \cdots d\xi_{n-2}
\end{aligned}$$

但しこゝで $g(\alpha^*, \beta^*; \alpha, \beta)$ は α^*, β^* の同時分布の密度函数で，$h(\xi_1, \cdots\cdots \xi_{n-2} | \alpha^*, \beta^*; \alpha, \beta)$ は α^*, β^* を固定したときの $\xi_1 \cdots\cdots \xi_{n-2}$ の條件附分布の密度函数である．

2°, 殆んどすべての $x_1, x_2 \cdots\cdots x_n, \alpha^*, \beta^*, \xi_1, \cdots\cdots, \xi_{n-2}$ に対し

て考えるすべてのα, β に対して

$$\frac{\partial f}{\partial \alpha}; \frac{\partial f}{\partial \beta}; \frac{\partial g}{\partial \alpha}, \frac{\partial g}{\partial \beta}; \frac{\partial h}{\partial \alpha}, \frac{\partial h}{\partial \beta}$$

が存在して且つ

$$\left|\frac{\partial f}{\partial \alpha}\right| < F_1(x) \qquad \left|\frac{\partial f}{\partial \beta}\right| < F_2(x)$$

$$\left|\frac{\partial g}{\partial \alpha}\right| < G_1(\alpha^*, \beta^*) \qquad \left|\frac{\partial g}{\partial \beta}\right| < G_2(\alpha^*, \beta^*)$$

$$\left|\frac{\partial h}{\partial \alpha}\right| < H_1(\xi_1, \cdots \xi_{n-2} | \alpha^* \beta^*) \qquad \left|\frac{\partial h}{\partial \beta}\right| < H_2(\xi_1, \cdots \xi_{n-2} | \alpha^*, \beta^*)$$

であつて

$$F_1(x), \quad F_2(x)$$

$$G_1(\alpha^* \beta^*) \qquad G_2(\alpha^* \beta^*)$$

$$\alpha^* G_1 \quad \beta^* G_1 \quad , \quad \alpha^* G_2, \quad \beta^* G_2$$

$$H_1(\xi_1 \quad \xi_{n-2} | \alpha^* \beta^*), \quad H_2(\xi_1, \quad \xi_{n-2} | \alpha^*, \beta^*)$$

はα, βに無関係で、その変数の全空間で積分可能である。

この場合大切な結果は次の通りである。

α βの同時的不偏推定値α^*, β^* の集中度楕円（Ellipse Concentration）

$$\frac{1}{1-\rho^2}\left\{\frac{(u-\alpha)^2}{\sigma_1^2} - 2\rho\frac{(u-\alpha)(v-\beta)}{\sigma_1 \sigma_2} + \frac{(v-\beta)^2}{\sigma_2^2}\right\} = 4 \qquad (1,18)$$

$$\sigma_1^2 \equiv D^2(\alpha^*), \quad \sigma_2^2 \equiv D^2(\beta^*), \quad \sigma_1\sigma_2\rho \equiv E(\alpha^*-\alpha)(\beta^*-\beta)$$

はつねに定楕円

$$n\left[E\left(\frac{\partial \log f}{\partial \alpha}\right)^2 (u-\alpha)^2 + 2E\left(\frac{\partial \log f}{\partial \alpha}, \frac{\partial \log f}{\alpha\beta}\right)(u-\alpha)(v-\beta) + E\left(\frac{\partial \log f}{\alpha\beta}\right)^2 (v-\beta)^2\right] = 4 \qquad (1,19)$$

を其内部に含む

よつて

$$n\left[E\left(\frac{\partial \log f}{\partial \alpha}\right)^2 (u-\alpha)^2 + 2E\left(\frac{\partial \log f}{\partial \alpha}\frac{\partial \log f}{\partial \beta}\right)(u-\alpha)(v-\beta) + E\left(\frac{\partial \log f}{\partial \beta}\right)^2 (v-\beta)^2\right]$$

$$\geqq \frac{1}{1-\rho^2}\left[\frac{(u-\alpha)^2}{\sigma_1^2}-2\rho\frac{(u-\alpha)(v-\beta)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(v-\beta)^2}{\sigma_2^2}\right] \qquad (1.20)$$

よって面積を比較して

$$\Delta \equiv E\left(\frac{\partial \log f}{\partial \alpha}\right)^2 \cdot E\left(\frac{\partial \log f}{\partial \beta}\right)^2 - E^2\left(\frac{\partial \log f}{\partial \alpha}\,\frac{\partial \log f}{\partial \beta}\right)$$

とすれば

$$n^2\Delta \geqq \frac{1}{\sigma_1^2\sigma_2^2(1-\rho^2)}$$

であるが，α^*, β^*の効率を

$$e(\alpha^*, \beta^*) = \frac{1}{n^2\Delta\,\sigma_1^2\sigma_2^2(1-\rho^2)} \qquad (1.21)$$

で定義する．今度は（1.20）で等号の成立するとき $\alpha^*\beta^*$ はα, βの同時的有効推定値（Jointly Efficient Estimate）という

このときは勿論

$$e(\alpha^*, \beta^*) = 1$$

である．

今α_0^*, β_0^*をα, βの一組の同時的有効推定値とすれば，定義より，

$$D^2(\alpha_0^*) = \frac{1}{n\Delta}E\left(\frac{\partial \log f}{\partial \beta}\right)^2, \quad D^2(\beta_0^*) = \frac{1}{n\Delta}E\left(\frac{\partial \log f}{\partial \alpha}\right)^2$$
$$\rho(\alpha_0^*, \beta_0^*) = E\left(\frac{\partial \log f}{\partial \alpha}\,\frac{\partial \log f}{\partial \beta}\right)\Bigg/\sqrt{E\left(\frac{\partial \log f}{\partial \alpha}\right)^2 E\left(\frac{\partial \log f}{\partial \beta}\right)^2} \qquad (1.22)$$

よって

$$D^2(\alpha_0^*) = \frac{1}{1-\rho^2(\alpha_0^*, \beta_0^*)}\,\frac{1}{nE\left(\frac{\partial \log f}{\partial \alpha}\right)^2} \qquad (1.23)$$

（1.23）から判ることは$\rho(\alpha_0^*, \beta_0^*) \neq 0$なる限り，同時的有効推定値の分散は，例えば$\alpha$のみ未知母数である場合の有効推定値の分散より大である．

然らば一組の不偏推定値α^*, β^*をとってβ^*の精度はいくら悪くともよいから，α^*の精度をα_0^*のそれより良くすることが出来るかというにそれは不可能である．何者（1.20）は任意の不偏推定値に対して成り立つから

$$D^2(\alpha^*) \equiv \sigma_1^2 \geqq \frac{1}{n\Delta}E\left(\frac{\partial \log f}{\partial \beta}\right)^2 \equiv D^2(\alpha_0^*)$$

12—

であるから

以上では $x_1, \cdots\cdots, x_n$ を任意標本として話したのであるが $x_1, \cdots$ $\cdots\cdots, x_n$ の同時分布の密度函数が

$$f(x_1, \cdots\cdots, x_n ; \alpha),\ f(x_1, \cdots\cdots, x_n ; \alpha, \beta)$$

のときにも同様の理論が成立つ。

例えば $f(x_1, \cdots\cdots x_n, \alpha)$ のときは

$$D^2(\alpha^*) \geq \frac{1}{E\left(\frac{\partial \log f}{\partial \alpha}\right)^2} \tag{1.24}$$

となって n がなくなる丈である。

正規母集団

$$f(x ; m, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-m)^2}$$

のときは

$$\frac{\partial \log f}{\partial m} = \frac{1}{\sigma^2}(x-m)$$

$$\frac{\partial \log f}{\partial \sigma} = -\frac{1}{\sigma} - \frac{(x-m)^2}{\sigma^3}$$

よって

$$E\left(\frac{\partial \log f}{\partial m}\right)^2 = \frac{1}{\sigma}, \quad E\left(\frac{\partial \log f}{\partial \sigma}\right)^2 = \frac{2}{\sigma^2}$$

$$E\left(\frac{\partial \log f}{\partial m} \cdot \frac{\partial \log f}{\partial \sigma}\right) = 0$$

$$\Delta = \frac{2}{\sigma^4}$$

従ってこのときの報知高は

$$\frac{2n^2}{\sigma^4} \tag{1.25}$$

$$m^* = \bar{x} \qquad \sigma^* = \sqrt{\frac{n}{2}}\, \frac{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} s$$

$$s^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$$

とおくと

$$D^2(m^*) = \frac{\sigma^2}{n}, \quad D^2(\sigma^*) = \left(\frac{n-1}{2}\, \frac{\Gamma^2\left(\frac{n-1}{2}\right)}{\Gamma^2\left(\frac{n}{2}\right)} - 1\right)\sigma^2$$

$$= \frac{\sigma^2}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

$$\rho(m^*, \sigma^*) = 0$$

であるから $n \to \infty$ のとき

$$e(m^*, \sigma^*) \to 1$$

即ち，m^*, σ^* は m, σ の漸近的な有効推定値である。

§ 2. 最良線型不偏推定値と最小自乗法に関する A. Markoff の定理

母数 α の推定値 $\alpha^*(x_1, \cdots, x_n)$ で次の三条件を満たすものを，吾々は J. Neyman に従って，α の最良線型不偏推定値（The Best Linear Unbiased Estimate）と名づける．

(1)　$\alpha^*(x_1 \cdots, x_n)$ は任意標本 $x_1 \cdots, x_n$ の一次形式である．

(2)　$\alpha^*(x_1 \cdots, x_n)$ は α の不偏推定値である．即ち

$$E(\alpha^*) = \alpha$$

(3)　$\alpha^*(x_1 \cdots, x_n)$ は(1)及び(2)を満たすものゝ内で最小の分散をもつ．

このような推定値 $\alpha^*(x_1, \cdots, x_n)$ は計算が簡便である上に，n が充分大なるときは中心極限定理によって漸近的に正規分布に従うのでよく用いられるものである。

このような最良線型不偏推定値を求める方法を提供するものとして A. Markoff の定理がある。

定理 2.1（J. Neyman 及び F. N. David による拡張）

(i)　$x_1, x_2, \cdots, x_n$ は互に独立な確率変数とする．

(ii)　$x_1, x_2, \cdots, x_n$ の平均値は夫々約（$\leqq n$ の）個の未知定数 $\theta_1, \theta_2, \quad \theta_s$ の一次形式である．

$$E(x_i) \equiv m_i = a_{i1}\theta_1 + a_{i2}\theta_2 + \cdots + a_{is}\theta_s \quad i = 1, 2, \cdots n \tag{2.1}$$

こゝで係数 a_{ij} は既知定数である．

(iii)　係数行列

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1s} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2s} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{ns} \end{pmatrix} \tag{2.2}$$

の階数は s である、

(iv) 分散については

$$D^2(x_i) \equiv \sigma_i^2 = \frac{\sigma^2}{p_i}, \quad i=1, 2, \cdots\cdots, n \tag{2,3}$$

で，p_i は既知、σ^2 は未知の定数である.

以上の4条件の下で未知量

$$b_1\theta_1 + b_2\theta_2 + \cdots\cdots + b_s\theta_s \quad \text{但し } b_i \text{ は既知} \tag{2,4}$$

の最良線型不偏推定値 F は次のようにして求められる.

今.

$$S = \sum_{i=1}^{n} p_i (x_i - a_{i1}\theta_1 - a_{i2}\theta_2 \cdots\cdots - a_{is}\theta_s)^2 \tag{2.5}$$

として、こゝで $x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n$ は与えられたとして S を最小ならしめる $\theta_1, \theta_2, \cdots\cdots \theta_s$ の値を夫々

$$\theta_1^0(x_1, \cdots\cdots, x_n) \qquad , \theta_s^0(x_1, \cdots\cdots, x_n)$$

とすれば

$$F = b_1\theta_1^0 + b_2\theta_2^0 + \cdots\cdots\cdots + b_s\theta_s^0 \tag{2.6}$$

である。

更に S の最小値を S_0 とすれば

$$S_0 = \sum_{i=1}^{n} p_i (x_i - a_{i1}\theta_1^0 - a_{i2}\theta_2^0 - \cdots\cdots - a_{is}\theta_s^0)^2 \tag{2.7}$$

であるが

$$\frac{S_0}{n-s} \tag{2.8}$$

が，σ^2 の不偏推定値になる。

後に吾々が用いる便宜のためには，これをもう少し拡張して次の形に述べておく方が良い.

定理 2.2（増山による拡張）

(i) $x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n$ は平均値が夫々 $m_1, m_2 \cdots\cdots m_n$ で，その Variance - Covariance Matrix が

$$(\sigma^2 d_{ij}), \quad ij = 1, 2, \cdots\cdots n \tag{2,9}$$

なる Non-Singular な n 次元分布に従うものとする．但し，こゝで d_{ij} は既知で σ^2 は未知な定数とする.

(ii) 平均値 m_i，$i=1, 2, \cdots\cdots, n$ は夫々 $s(\leq n)$ 箇の未知定数 θ_1 $\theta_2 \cdots\cdots, \theta_s$ の一次形式で

$$m_i = a_{i1}\theta_1 + a_{i2}\theta_2 + \cdots\cdots + a_{is}\theta_s \quad , \quad i = 1, 2, \cdots m \quad (2.10)$$

こゝで係数 a_{ij} は既知定数である.

(iii) 係数行列 $A = (a_{ij})$ の階数は s である.

(iv) $(d_{ij})^{-1} = (D_{ij})$

以上の4条件の下で未知量(2.4)の最良線型不偏推定値(2.6)は次のように求められる.

$$S = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\Big(D_{ij}(x_i - \sum_{\alpha=1}^{s} a_{i\alpha}\theta_\alpha)(x_j - \sum_{\beta=1}^{s} a_{j\beta}\theta_\beta) \quad (2.11)$$

として, S を最小ならしめる θ_i の値を θ_i^0 としてこれを用いて(2.6)を作ればよい.

そして S の最小値を S_0 とするとき

$$\frac{S_0}{n-s}$$

が σ^2 の不偏推定値になる.

§ 3. 順序づけ統計量とその極限分布, 系統統計量

任意標本を $x_1, x_2, \cdots\cdots x_n$ とかきこれを大きさの順に並べた順序づけ統計量を小さい方から始めて $x(1), x(2) \cdots\cdots x(n)$ と書くことする.

考える母集団の確率分布は連続型として, その密度函数を $g(x)$ とする.

さて任意に与えられた実数

$$0 < \lambda < 1$$

に対して

$$\int_{-\infty}^{x_\lambda} g(t)\,dt = \lambda \qquad (3.1)$$

となる点 x_λ を母集団の λ-分点, 又は $100\lambda\%$ 点と名づける.

$\lambda = 0.5$ なら $\lambda_{0.5}$ は即ち中央値(Median)である.

簡単のために $n\lambda$ は整数でないとして,

$$Z_\lambda = x([n\lambda]+1) \qquad (3.2)$$

を標本の λ 分点と名づける, 但し $[n\lambda]$ は Gauss の記号である.

若し $g(x)$ が $x=x_\lambda$ の近傍で微分可能で更に

$$g(x_\lambda) \neq 0 \tag{3.3}$$

ならば、次の定理が成り立つ：

定理 3.1　統計量

$$\sqrt{\frac{n}{\lambda(1-\lambda)}}\cdot g(x_\lambda)\cdot(Z_\lambda - x_\lambda) \tag{3.4}$$

は $n\to\infty$ のとき漸近的に標準正規分布 $N(0,1)$ に従う．即ち $n\to\infty$ のとき Z_λ の極限分布の密度函数は

$$\sqrt{\frac{n}{2\pi\lambda(1-\lambda)}}\,g(x_\lambda)\exp\left\{-\frac{n}{2\lambda(1-\lambda)}g^2(x_\lambda)(z_\lambda - x_\lambda)^2\right\} \tag{3.5}$$

となる．

これを拡張して次の定理が成立つ

定理 3.2　(Frederick Mosteller)　k 箇の実数

$$0<\lambda_1<\lambda_2<\cdots\cdots<\lambda_k<1$$

が与えられたとき母集団の λ_i 分点を x_i とする．

$$\int_{-\infty}^{x_i} g(t)\,dt = \lambda_i \qquad i=1,2,\cdots\cdots,k \tag{3.6}$$

母集団の密度函数 $g(x)$ は $x=x_i$ の近傍で微分可能で更に

$$g_i = g(x_i) \neq 0 \qquad i=1,2,\cdots\cdots,k \tag{3.7}$$

とする．このとき

$$n_i = [n\lambda_i]+1 \qquad i=1,2,\cdots\cdots,k$$

とすれば，k 箇の順序づけ統計量 $x(n_1), x(n_2), \cdots\cdots, x(n_k)$ の同時分布は $n\to\infty$ のとき，平均が夫々 $x_1, x_2, \cdots\cdots, x_k$ でその Variance-Covariance Matrix が

$$\begin{pmatrix} \frac{\lambda_1(1-\lambda_1)}{n g_1^2} & \frac{\lambda_1(1-\lambda_2)}{n g_1 g_2} & \cdots\cdots & \frac{\lambda_1(1-\lambda_k)}{n g_1 g_k} \\ \frac{\lambda_1(1-\lambda_1)}{n g_1 g_2} & \frac{\lambda_2(1-\lambda_2)}{n g_2^2} & \cdots\cdots & \frac{\lambda_2(1-\lambda_k)}{n g_2 g_k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\lambda_1(1-\lambda_k)}{n g_1 g_k} & \frac{\lambda_2(1-\lambda_k)}{n g_2 g_k} & \cdots\cdots & \frac{\lambda_k(1-\lambda_k)}{n g_k^2} \end{pmatrix} \tag{3.8}$$

なる k 次元正規分布に漸近する．従って極限分布の密度は．

$$(2\pi)^{-\frac{k}{2}} g_1 \cdots g_k [\lambda_1(\lambda_2-\lambda_1)\cdots(1-\lambda_k)]^{-\frac{1}{2}} n^{\frac{k}{2}}$$

$$\exp\left[-\frac{n}{2}\left\{\sum_{i=1}^{k}\frac{\lambda_{i+1}-\lambda_{i-1}}{(\lambda_{i+1}-\lambda_i)(\lambda_i-\lambda_{i-1})} g_i^2 (x(n_i)-x_i)^2\right.\right.$$

$$\left.\left. -2\sum_{i=2}^{k}\frac{g_i g_{i-1}}{\lambda_i-\lambda_{i-1}}(x(n_i)-x_i)(x(n_{i-1})-x_{i-1})\right\}\right] \quad (3.9)$$

となる.

特に母集団が正規母集団 $N(m, \sigma)$ ならば

$$g(x)=(2\pi\sigma^2)^{-\frac{1}{2}}\exp\{-(x-m)^2/2\sigma^2\} \quad (3.10)$$

標準正規分布の密度函数を

$$f(x)\equiv(2\pi)^{-\frac{1}{2}}\exp\{-x^2/2\} \quad (3.11)$$

とおく. 標準正規母集団の λ_i分点を u_i その点の Ordinate を f_i とする即ち

$$\int_{-\infty}^{u_i} f(t)dt=\lambda_i$$

$$f(u_i)\equiv f_i \qquad i=1, 2, \cdots\cdots, k \quad (3.12)$$

(3.6) は $\displaystyle\int_{-\infty}^{\frac{x_i-m}{\sigma}} f(t)dt=\lambda_i$

と書直せるから (3.12) と比較して

$$x_i=m+u_i\sigma \qquad i=1, 2, \cdots\cdots, k \quad (3.13)$$

よって, この場合には, $x(n_1)$, $x(n_2)$ $\cdots\cdots$, $x(n_k)$ の極限分布の密度函数は,

$$h(x(n_1), \cdots\cdots, x(n_k); m, \sigma)\equiv$$

$$(2\pi\sigma^2)^{-\frac{k}{2}} f_1\cdots f_k [\lambda_1(\lambda_2-\lambda_1)\cdots(1-\lambda_k)]^{-\frac{1}{2}} n^{\frac{k}{2}}$$

$$\exp\left[-\frac{n}{2\sigma^2}\left\{\sum_{i=1}^{k}\frac{\lambda_{i+1}-\lambda_{i-1}}{(\lambda_{i+1}-\lambda_i)(\lambda_i-\lambda_{i-1})} f_i^2 (x(n_i)-m-u_i\sigma)^2\right.\right.$$

$$\left.\left. -2\sum_{i=2}^{k}\frac{f_i f_{i-1}}{\lambda_i-\lambda_{i-1}}(x(n_i)-m-u_i\sigma)(x(n_{i-1})-m-u_{i-1}\sigma)\right\}\right] \quad (3.14)$$

となる.

F. Mosteller は一般に順序づけ統計量 $x(1), x(2), \quad , x(n)$ の函数である統計量を系統統計量（Systematic Statistics ）と名づけた。吾々が以下で用いようというのは $x(n_1), x(n_2), \cdots\cdots, x(n_k)$ の函数としての系統統計量である。

§ 4. 系統統計量の効率

吾々は以下では大標本理論を考え、且つ母集団は正規母集団とするから $x(n_1), x(n_2) \cdots\cdots, x(n_k)$ の同時分布の密度はつねに（3.14）で与えられるものとする。

本節では系統統計量を用いて m, σ を推定する場合の効率を考えよう。先づ系統統計量を用いる場合の m, σ の報知高を求めよう。

1. σ が既知の場合

$$S = \sum_{i=1}^{k} \frac{\lambda_{i+1} - \lambda_{i-1}}{(\lambda_{i+1}-\lambda_i)(\lambda_i - \lambda_{i-1})} \delta_i^2 (x(n_i) - m - u_i \sigma)^2$$
$$- 2\sum_{i=2}^{k} \frac{f_i f_{i-1}}{\lambda_i - \lambda_{i-1}} (x(n_i) - m - u_i \sigma)(x(n_{i-1}) - m - u_{i-1}\sigma) \tag{4.1}$$

とおくと

$$\log h = -\frac{n}{2\sigma^2} S + (m\text{を含まぬ項})$$

であるから

$$-\frac{\partial^2 \log h}{\partial m^2} = \frac{n}{2\sigma^2}\frac{\partial^2 S}{\partial m^2} = \frac{n}{\sigma^2} K_1 \tag{4.2}$$

こゝで、K_1 は $\lambda_0 = 0$, $\lambda_{k+1} = 1$, $f_0 = f_{k+1} = 0$ として

$$K_1 = \sum_{i=1}^{k+1} \frac{(f_i - f_{i-1})^2}{\lambda_i - \lambda_{i-1}} \tag{4.3}$$

よって系統統計量を用いたときの m の推定に関する効率は

$$\eta_m = -E\left(\frac{\partial^2 \log h}{\partial m^2}\right) = K_1 \tag{4.4}$$

である。

2. m が既知の場合

この場合には、

$$\log h = -k \log \sigma - \frac{n}{2\sigma} S + (\sigma\text{を含まぬ項})$$

であるから

$$\frac{\partial^2 \log h}{\partial \sigma^2} = \frac{k}{\sigma^2} - \frac{3n}{\sigma^4} S + \frac{2n}{\sigma^3}\frac{\partial S}{\partial \alpha} - \frac{n}{2\sigma^2}\frac{\partial^2 S}{\partial \sigma^2}$$

ここで前と同様に $\lambda_0 = 0,\ \lambda_{k+1} = 1,\ f_0 = f_{k+1} = 0$ として

$$K_2 \equiv \sum_{i=1}^{k+1} \frac{(f_i u_i - f_{i-1} u_{i-1})^2}{\lambda_i - \lambda_{i-1}} \tag{4.5}$$

とおくと

$$\frac{\partial^2 S}{\partial \alpha^2} = K_2 \quad E\left(\frac{\partial S}{\partial \sigma}\right) = 0 \ ,\ E(S) = \frac{\sigma^2}{n} k$$

なることを用いる。σに関する情報量は

$$-E\left(\frac{\partial^2 \log h}{\partial \sigma^2}\right) = \frac{2k}{\sigma^2} - \frac{n}{\sigma^3} K_2 =$$

$$\frac{n}{\sigma^3} K_2 \left(1 + 2\ \frac{k}{n} K_2^{-1}\right) \tag{4.5}$$

であるが、kはnに比して小だから

$$\frac{k}{n} \fallingdotseq 0$$

よって

$$-E\left(\frac{\partial^2 \log h}{\partial \sigma^2}\right) \fallingdotseq \frac{n}{\sigma} K_2 \tag{4.5'}$$

従ってσに関する系統統計量の効率 η_σ は

$$\eta_\sigma = \frac{n}{\sigma^3} K_2 \Big/ \frac{2n}{\sigma} = \frac{1}{2} K_2 \tag{4.6}$$

(3) m、σ 共に未知の場合

このときは、

$$\log h = -n \log \sigma - \frac{n}{2\sigma} S + (m, \sigma\text{を含む項})$$

であるから

$$K_3 = \sum_{i=1}^{k+1} \frac{(f_i - f_{i-1})(f_i u_i - f_{i-1} u_{i-1})}{\lambda_i - \lambda_{i-1}} \tag{4.7}$$

$$\Delta \equiv K_1 K_2 - K_3^2 \tag{4.8}$$

とおくと、m, σ の同時推定について系統統計量の報知高は

$$E\left(\frac{\partial^2 \log h}{\partial m^2}\right) E\left(\frac{\partial^2 \log h}{\partial \sigma}\right) - E^2\left(\frac{\partial^2 \log h}{m \partial \sigma}\right)$$

$$= \frac{n^2}{\sigma^4}\Delta + -\frac{2nk}{\sigma^4} K_1 \tag{4.9}$$

よってこのときの系統統計量の効率 γ は

$$\gamma = \frac{n^2}{\sigma^4}\Delta - \frac{2nk}{\sigma^4} K_1 \Big/ \frac{2n^2}{\sigma^4}$$

$$= \frac{1}{2}\Delta + \frac{k}{n} K_1 \doteqdot \frac{1}{2}\Delta \tag{4.10}$$

§ 5. 系統統計量を用いた場合の正規母集団の平均値と標準偏差の最良線型不偏推定値

このとき基礎になる $x(n_1), x(n_2), \cdots, x(n_k)$ の分布密度は (3.14) の $h(x(n_1), \cdots, x(n_k); m, \sigma)$ で与えられる、よって m, σ の最良線型不偏推定値を求めるには A. Markoff の定理 2.2 を用いればよいが、このときは (2.11) の二次形式としては (4.1) の S をとればよい。

先ず m, σ の何れか一方が既知の場合を調べ、最后に m, σ 共に未知の場合を調べよう。

Case I. σ が既知の場合　　このとき m の最良線型不偏推定値を $\hat{m}_0$ とすれば、それは

$$\left.\frac{\partial S}{\partial m}\right|_{m=\hat{m}_0} = 0$$

から求められる、よって、

$$\hat{m}_0 K_1 = \sum_{i=1}^{k}\left(\frac{f_i - f_{i-1}}{\lambda_i - \lambda_{i-1}} - \frac{f_{i+1} - f_i}{\lambda_{i+1} - \lambda_i}\right) f_i (x(n_i) - u_i \sigma) \tag{5.1}$$

今ここで

$$X \equiv \sum_{i=1}^{k+1} \frac{(f_i - f_{i-1})(f_i x(n_i) - f_{i-1} x(n_{i-1}))}{\lambda_i - \lambda_{i-1}} \tag{5.2}$$

とおくと（5.1）は

$$\hat{m}_0 \cdot K_1 = X - \sigma \cdot K_3 \tag{5.1'}$$

とはるから

$$\hat{m}_0 = \frac{1}{K_1} X - \sigma \cdot \frac{K_3}{K_1} \tag{5.3}$$

$\hat{m}_0$ の分散 $D^2(\hat{m}_0)$ を計算すると

$$D^2(\hat{m}_0) = \frac{1}{K_1^2} D^2(X)$$

ところが

$$D^2(X) = K_1 \frac{\sigma^2}{n} \tag{5.4}$$

であるから

$$D^2(\hat{m}_0) = \frac{\sigma^2}{nK_1} \tag{5.5}$$

よってこの場合には、$\hat{m}_0$は系統統計量を用いる限り、有効推定値であることが判る。

Case II　mが既知の場合　　このときのσの最良線型不偏推定値を$\hat{\sigma}_0$とすれば、それは

$$\left.\frac{\partial S}{\partial \alpha}\right|_{\sigma = \hat{\sigma}_0} = 0$$

から求められる、よって

$$\hat{\sigma}_0 \cdot K_2 = \sum_{i=1}^{k} \left(\frac{f_i u_i - f_{i-1} u_{i-1}}{\lambda_i - \lambda_{i-1}} - \frac{f_{i+1} u_{i+1} - f_i u_i}{\lambda_{i+1} - \lambda_i} \right) f_i (x(n_i) - m) \tag{5.6}$$

こゝで

$$Y = \sum_{i=1}^{k+1} \frac{(f_i u_i - f_{i-1} u_{i-1})(f_i \cdot x(n_i) - f_{i-1} \cdot x(n_{i-1}))}{\lambda_i - \lambda_{i-1}} \tag{5.7}$$

とおくと（5.6）は

$$\hat{\sigma}_0 \cdot K_2 = Y - m \cdot K_3 \tag{5.6'}$$

とかけるから

$$\hat{\sigma}_0 = \frac{1}{K_2} Y - m \frac{K_3}{K_2} \tag{5.8}$$

よって

$$D^2(\hat{\sigma}_0) = \frac{1}{K_2^2} D^2(Y)$$

で

$$D^2(Y) = \frac{\sigma^2}{n} K_2 \tag{5.9}$$

であるから

$$D^2(\hat{\sigma}_0) = \frac{\sigma^2}{nK_2} \tag{5.10}$$

よって $\hat{\sigma}_0$ も示系統統計量を用いる限り σ の有効推定値と考えてよい。

Case III　m, σ 共に未知の場合　　このときの m, σ の最良線型不偏推定値を夫々 $\hat{m}$ $\hat{\sigma}$ とすれば、それは

$$\left.\frac{\partial S}{\partial m}\right|_{\substack{m=\hat{m}\\ \sigma=\hat{\sigma}}}=0 \qquad \left.\frac{\partial S}{\partial \sigma}\right|_{\substack{m=\hat{m}\\ \sigma=\hat{\sigma}}}=0$$

から求められる。(4.3),(4.5),(4.7),(5.2),(5.7) の記号を用いると、

$$\begin{aligned}\hat{m}\cdot K_1+\hat{\sigma}\cdot K_3&=X\\ \hat{m}\cdot K_3+\hat{\sigma}\cdot K_2&=Y\end{aligned} \tag{5.11}$$

となる。よって、

$$\begin{aligned}\hat{m}&=\frac{1}{\Delta}(K_2\cdot X-K_3\cdot Y)\\ \hat{\sigma}&=\frac{1}{\Delta}(-K_3\cdot X+K_1\cdot Y)\end{aligned} \tag{5.12}$$

$\hat{m}$、$\hat{\sigma}$ の分散、共変分散を計算しよう。

$$D^2(\hat{m})=\frac{1}{\Delta^2}(K_2^2\cdot D^2(X)-2K_2K_3\cdot C(XY)+K_3^2\cdot D^2(Y))$$
$$D^2(\hat{\sigma})=\frac{1}{\Delta^2}(K_3^2\cdot D^2(X)-2K_1K_3\cdot C(XY)+K_1^2\cdot D^2(Y))$$
$$C(\hat{m},\hat{\sigma})=\frac{1}{\Delta^2}(-K_2K_3\,D^2(X)+(K_1K_2+K_3^2)\cdot C(X\cdot Y)-K_1K_3\cdot D^2(Y))$$

であるから (5.4) (5.9) 及び

$$C(X,Y)=\frac{\sigma^2}{n}K_3 \tag{5.13}$$

を用いて

$$D^2(\hat{m})=\frac{\sigma^2}{n}\frac{K_2}{\Delta},\quad D^2(\hat{\sigma})=\frac{\sigma^2}{n}\frac{K_1}{\Delta},\quad C(\hat{m},\hat{\sigma})=-\frac{\sigma^2}{n}\frac{K_3}{\Delta} \tag{5.14}$$

よって

$$D^2(\hat{m})D^2(\hat{\sigma})-C^2(\hat{m},\hat{\sigma})=\frac{\sigma^4}{n^2}\frac{1}{\Delta} \tag{5.15}$$

よって、$\hat{m}, \hat{\sigma}$ も示系統統計量を用いる限り、m, σ の同時的な有効推定値と考えてよいことが判る。

特に n_i の間に

$$n_i+n_{k-i+1}=n$$

又は λ_i でいえば

$$\lambda_i+\lambda_{k-i+1}=1$$

なる関係があるとき $x(n_1)$ 　　$,x(n_k)$ は対称配置（Symmetric Spacing）であるというが、このときは、

$$u_i + u_{k-i+1} = 0$$

であるから

$$k_3 = 0 \tag{3.17}$$

で、このときは

$$D^2(\hat{m}) = \frac{\sigma^2}{nK_1} \qquad D^2(\hat{\sigma}) = \frac{\sigma^2}{nK_2}$$

となって Case I, II に一致する、これは Mosteller 及び山内が主として考えた場合である。

§ 6. 正規母集団の平均値及び標準偏差を推定するための最良配置の決定

吾々は §5 で $\lambda_1, \lambda_2, \cdots\cdots, \lambda_k$ が与えられる限り、$\hat{m}_0$, $\hat{\sigma}_0$ 及び $\hat{m}$, $\hat{\sigma}$ は有効推定値であることを知ったのであるが、λ_i を適当に取ることによって、それらの効率を更に高めることができる。それらの最大効率を与えるような $\lambda_1, \lambda_2, \cdots\cdots, \lambda_k$ を最良配置（Optimum Spacing）と名づける。

本節では Optimum Spacing の決定について述べる。

Case I　σ が既知の場合　　　このときの最良配置は、

$$\eta_m = K_1$$

を最大ならしむるものである。

$$\frac{df_i}{du_i} = -u_i f_i, \quad \frac{d\lambda_i}{du_i} = f_i \qquad i = 1, 2, \cdots\cdots, k$$

を用いて、K_1 を u_i で偏微分すると

$$\frac{\partial K_1}{\partial u_i} = f_i \left(\frac{f_{i+1} - f_i}{\lambda_{i+1} - \lambda_i} - \frac{f_i - f_{i-1}}{\lambda_i - \lambda_{i-1}} \right) \left(2u_i + \frac{f_i - f_{i-1}}{\lambda_i - \lambda_{i-1}} - \frac{f_{i+1} - f_i}{\lambda_{i+1} - \lambda_i} \right)$$

$$i = 1, 2, \cdots\cdots, k$$

よって最良配置の条件として

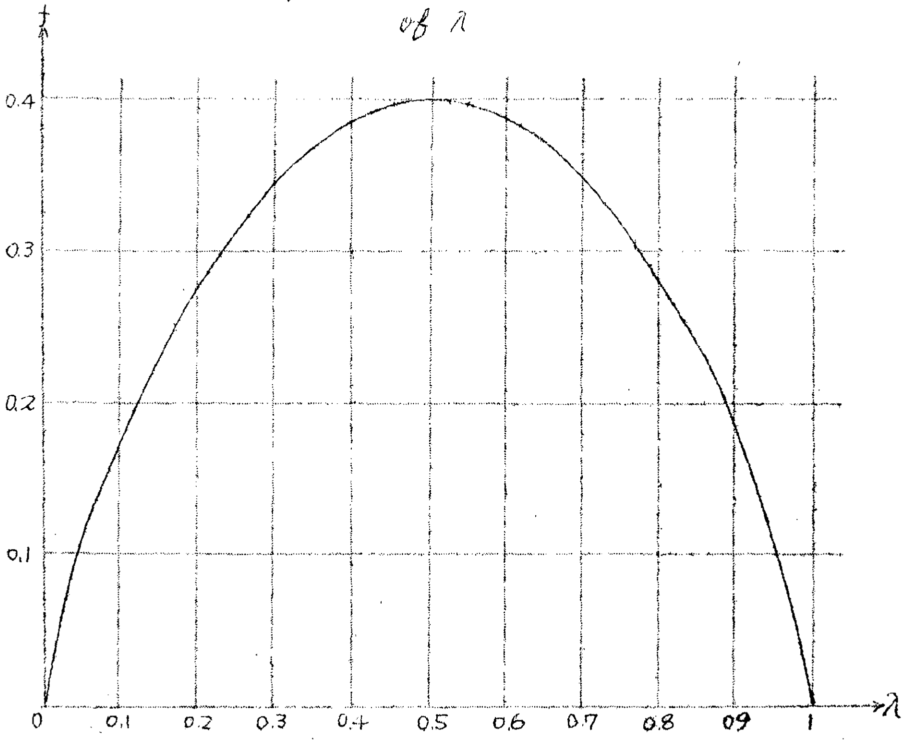
$$\frac{f_i - f_{i-1}}{\lambda_i - \lambda_{i-1}} = \frac{f_{i-1} - f_i}{\lambda_{i+1} - \lambda_i}, \qquad i = 1, 2, \cdots\cdots, k \tag{6.1}$$

$$\lambda u_i + \frac{f_i - f_{i-1}}{\lambda_i - \lambda_{i-1}} + \frac{f_{i+1} - f_i}{\lambda_{i+1} - \lambda_i} = 0, \quad i=1, 2, \cdots\cdots k \qquad (6.2)$$

を得るが、f を λ の函数と考えると　の第6.1図から見るように、これは上方に凸であるから、f_{i-1}, f_i, f_{i+1} の何れか二が一致しない限り (6.1) は成立しないので、吾々は (6.2) 丈を考えればよい。

$k \geq 2$ のとき (6.2) なる條件を満たす u_1, u_2　　, u_k は原点に関して対象、即ち

Fig 6.1 Graph of The Ordinate f us a Function of λ



$$u_i + u_{k-i+1} = 0$$

なることを予想しているが、その証明は未だ出来ていない。

そこで吾々は対称配置(6.3)を假定して $k = 1, 2, 3,$　　$, 10$ に対して (6.2) を数値的に解いて $\hat{m}_0$ の最高効率 (η_m の最大値) を計算して次の第6.1表を得た。

等確率配置（$\lambda_{i+1}-\lambda_i=\lambda_i-\lambda_{i-1}$）及び$\lambda_i=(i-\frac{1}{2})/k$なる配置に対する$\eta_m$を最良配置の$\eta_m$と比較したのが才6.2表である。

才6.1表　$\hat{\eta}_0$の最高効率を与える対称配置

	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$	$k=5$	$k=6$	$k=7$	$k=8$	$k=9$	$k=10$
λ_1	0,500	0.270	0.163	0.107	0.074	0.055	0.040	0.031	0.024	0.020
u_1	0.000	-0.613	-0.982	-1.243	-1.447	-1.598	-1.751	-1.866	-1.977	-2.054
	λ_2	0.730	0.500	0.351	0.255	0.195	0.147	0.115	0.092	0.076
	u_2	0.613	0.000	-0.383	-0.659	-0.860	-1.049	-1.200	-1.329	-1.433
		λ_3	0.837	0.649	0.500	0.395	0.308	0.247	0.202	0.167
		u_3	0.982	0.383	0.000	-0.266	-0.502	-0.684	-0.834	-0.966
			λ_4	0.893	0.745	0.605	0.500	0.412	0.343	0.288
			u_4	1.242	0.659	0.266	0.000	-0.222	-0.404	-0.559
				λ_5	0.926	0.805	0.642	0.588	0.500	0.427
				u_5	1.447	0.860	0.502	0.222	0.000	-0.184
					λ_6	0.945	0.853	0.753	0.657	0.573
					u_6	1.598	1.049	0.684	0.404	0.184
						λ_7	0.960	0.885	0.798	0.712
						u_7	1.751	1.200	0.834	0.559
							λ_8	0.969	0.908	0.833
							u_8	1.866	1.329	0.966
								λ_9	0.976	0.924
								u_9	1.977	1.433
									λ_{10}	0.980
									u_{10}	2,054
K_1	0.6366	0.8097	0,8800	0.9342	0.9420	0.9559	0.9654	0.9722	0.9771	0.9808
$\frac{1}{2}K_2$	0	0.3303	0.5326	0.6566	0.7392	0.7902	0.8516	0.8620	0.8858	0.9016
K_3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\frac{1}{2}\Delta$	0	0.267	0.469	0.614	0.696	0.754	0.822	0.838	0.866	0.884

第6.2表. 種々の配置に対する $\hat{m}_0$ の効率の比較

	最良配置	等確率配置	$\lambda_i=\frac{i-\frac{1}{2}}{k}$
$k=1$	0.6366	0.6366	0.637
$k=2$	0.8097	0.7926	0.808
$k=3$	0.8800	0.8606	0.878
$k=4$	0.9342	0.8969	0.913
$k=5$	0.9420	0.9172	0.937
$k=6$	0.9559	0.9352	0.948
$k=7$	0.9654	0.9450	0.957
$k=8$	0.9722	0.9521	0.963
$k=9$	0.9771	0.591	0.969
$k=10$	0.9808	0.9634	0.973

又最良配置に対する $\hat{m}_0$ の計算式を示したものが第6.3表である。

Case II m が既知の場合. このときは

$$\eta_\sigma=\frac{1}{2}K_2$$

を最大ならしめる配置を求めればよい。

Case I の場合と同様 K_2 を u_i で偏微分して.

$$\frac{\partial K_2}{\partial u_i}=f_i\left(\frac{f_{i+1}u_{i+1}-f_iu_i}{\lambda_{i+1}-\lambda_i}-\frac{f_iu_i-f_{i-1}u_{i-1}}{\lambda_i-\lambda_{i-1}}\right)$$

$$\left(2u_i^2-2+\frac{f_iu_i-f_{i-1}u_{i-1}}{\lambda_i-\lambda_{i-1}}+\frac{f_{i+1}u_{i+1}-f_iu_i}{\lambda_{i+1}-\lambda_i}\right)$$

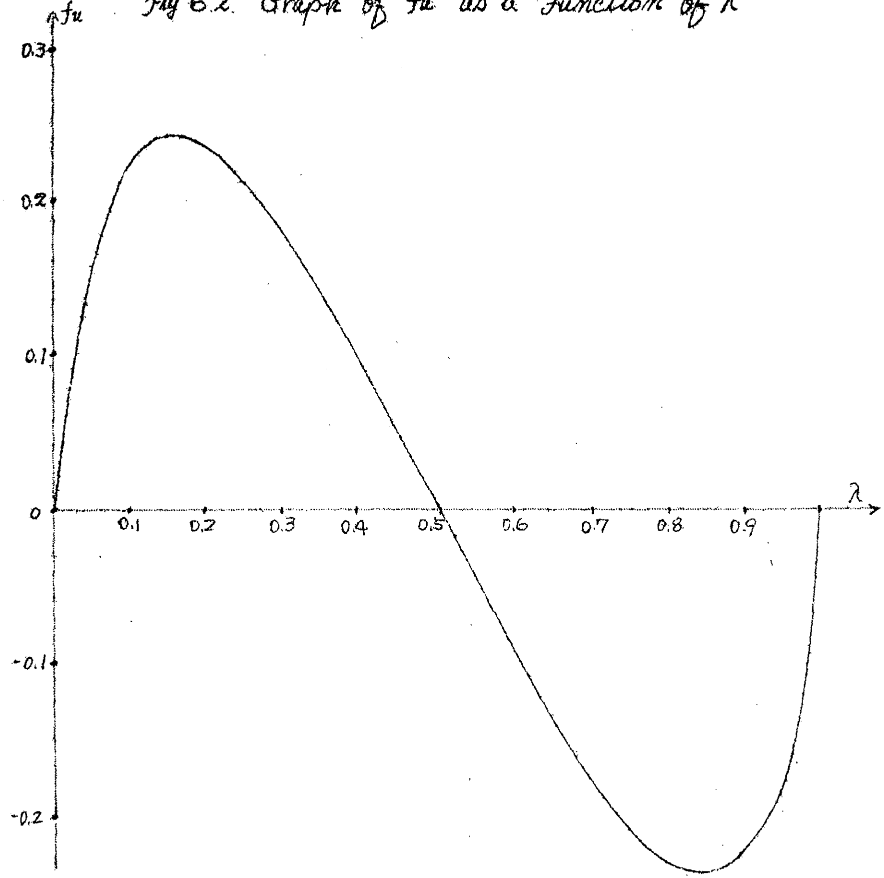
$$i=1,2,\cdots\cdots k$$

これから最良配置の条件として次式を得る

$$\frac{f_iu_i-f_{i-1}u_{i-1}}{\lambda_i-\lambda_{i-1}}=\frac{f_{i+1}u_{i+1}-f_iu_i}{\lambda_{i+1}-\lambda_i}\qquad i=1,2,\cdots k \tag{6.4}$$

$$2u_i^2\quad 2+\frac{f_iu_i-f_{i-1}u_{i-1}}{\lambda_i-\lambda_{i-1}}+\frac{f_{i+1}u_{i+1}-f_iu_i}{\lambda_{i+1}-\lambda_i}=0\qquad i=1,2,\cdots\cdots k \tag{6.5}$$

Fig 6.2. Graph of fu as a Function of λ



第5.4表 $\hat{\sigma}_0$ の最高相対効率とその為の最良配置

	$k=1$	$k=2$		$k=3$	$k=4$
λ_1	0.058	0.069	0.903	0.029	0.025
u_1	-1.572	-1.483	-1.299	-1.896	-1.960
λ_2		0.931	0.981	0.136	0.136
u_2		1.483	2.054	-1.098	-1.098
λ_3				0.815	0.864
u_3				0.896	1.098
λ_4					0.975
u_4					1.960
λ'	0.942		0.019	0.185	
u'	1.572		-2.054	-0.896	
λ_2'			0.097	0.864	
u_2'			-1.299	1.098	
λ_3'				0.971	
u_3'				1.896	
λ_4'					
u_4'					
$\frac{1}{2}K_2$	0.3040	0.653	0.390*	0.657	0.825

註＊　これは $k=2$ のときの(5.8)の非対称な解であるが、それは最良配置ではない。

Table 6.3 The Expression Of The Best Linear Unbiased Estimate $\hat{m}_0$ For The Optimum Spacing

$k=1$ $\quad x(0.500\cdot n)$

$k=2$ $\quad \frac{1}{2}\left(x(0.270\cdot n)+x(0.730\cdot n)\right)$

$k=3$ $\quad 0.297\left(x(0.163\cdot n)+x(0.837\cdot n)\right)+0.407\cdot x(0.500\cdot n)$

$k=4$ $\quad 0.197(x(0.107\cdot n)+x(0.893\cdot n))$
$\qquad + 0.303(x(0.351\cdot n)+x(0.649\cdot n))$

$k=5$ $\quad 0.133(x(0.074\cdot n)+x(0.926\cdot n))+0.233(x(0.255\cdot n)$
$\qquad +x(0.745\cdot n))+0.269\cdot x(0.500\cdot n)$

$k=6$ $\quad 0.099(x(0.055\cdot n)+x(0.945\cdot n))+0.181(x(0.195\cdot n)$
$\qquad +x(0.805\cdot n))+0.220(x(0.395\cdot n)+x(0.605\cdot n))$

$k=7$ $\quad 0.071(x(0.040\cdot n)+x(0.960\cdot n))+0.140(x(0.147\cdot n)+x(0.853\cdot n))$
$\qquad +0.186(x(0.308\cdot n)+x(0.692\cdot n))+0.203\cdot x(0.500\cdot n)$

$k=8$ $\quad 0.049(x(0.031\cdot n)+x(0.969\cdot n))+0.111(x(0.115\cdot n)+x(0.885\cdot n))$
$\qquad +0.155(x(0.247\cdot n)+x(0.753\cdot n))+0.178(x(0.412\cdot n)+x(0.588\cdot n))$

$k=9$ $\quad 0.044(x(0.024\cdot n)+x(0.976\cdot n))+0.091(x(0.092\cdot n)+x(0.908\cdot n))$
$\qquad +0.130(x(0.202\cdot n)+x(0.798\cdot n))+0.155(x(0.343\cdot n)+x(0.657\cdot n))$
$\qquad +0.163\cdot x(0.500\cdot n)$

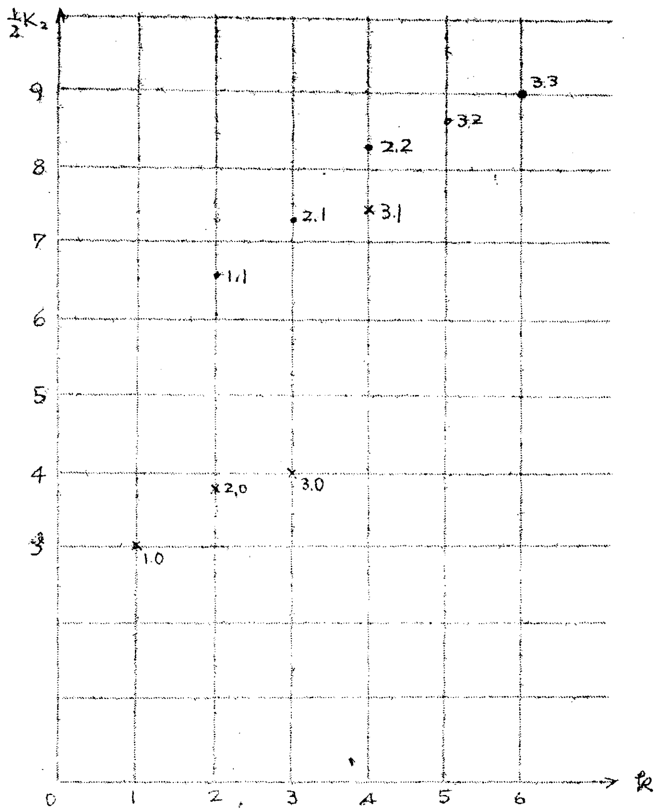
$k=10$ $\quad 0.036(x(0.020\cdot n)+x(0.980\cdot n))+0.075(x(0.076\cdot n)+$
$\qquad x(0.924\cdot n))+0.109(x(0.167\cdot n)+x(0.833\cdot n))$
$\qquad +0.133(x(0.288\cdot n)+x(0.712\cdot n))+0.147(x(0.427\cdot n)$
$\qquad +x(0.573\cdot n))$

但しこゝで n は Sample Sige である。

今度は f_u を λ の函数と考えるとそのグラフは上の第6.2図のようになる。

k が偶数のときは対称配置を仮定すれば、(6.5)のみ考えればよい、尤も k が偶数のときでも(6.5)は対称でない解をもつが次の第6.4表で見るようにそれは最大効率は与えない。

$k=1,2,3,4$ に対して(6.5)を解いて最良配置を求め、それに対応する $\frac{1}{2}K_2$ の最大値を求めたのが第6.4表であり、これと等確率配置及び $\lambda_i=(i-1/2)/k$ なる配置とその効率を比較したのが第6.5表で、最良配置のときの $\hat{\mu}$ の計算式を示したのが第6.6表である。



第6.4表 $\hat{r}_0$の最高効率を与える配置

	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$
λ_1	0.058　0.942	0.069, 0.903*, 0.019*	0.029, 0.185	0.025
u_1	-1.572　1.572	-1.483, 1.299, -2.054	-1.896　-0.896	-1.960
	λ_2	0.931　0.481, 0.097	0.136　0.864	0.136
	u_2	1.483, 2.054, -1.299	-1.098　1.098	-1.098
		λ_3	0.815　0.971	0.864
		λ_3	0.896　1.896	1.098
			λ_4	0.975
			u_4	1.960
$\frac{1}{2}K_2$	0.3040	0.653　0.374	0.657	0.825
K_1	0.246	0.512　0.347	0.756	0.933
K_3	0.387	0　0.481	0.235	0
$\frac{1}{2}\Delta$	0	0.334　0.014	0.469	0.770

第6.4表の註　*. **) は Symmetric ではない (5.7) の解であるが
これは上に見るように Max. Efficiency ではない。

第6.5表 $\hat{\mu}_0$ の相対効率の比較

k	最良配置	等確率配置	$\lambda_i =$
1	0.3040	0.000	0.000
2	0.653	0.221	0.413
3	0.657	0.368	0.526
4	0.825	0.563	0.619

第6.6表　最良配置の場合の $\hat{\sigma}_0$

$k=1$	$0.636\,\lvert x(n_1)-m\rvert$
$k=2$	$0.674\,(x(n_2)-x(n_1))$
$k=3$	$0.065m-0.164x(n_1)-0.293x(n_2)+0.388x(n_3)$ $-0.065m-0.388x(n_1)+0.293x(n_2)+0.164x(n_3)$
$k=4$	$0.202(x(n_4)-x(n_1))+0.236(x(n_3)-x(n_2))$

Case III m, σ 共に未知の場合　　このときは

$$\eta=\frac{1}{2}\Delta=\frac{1}{2}(K_1K_2-K_3^2)$$

を最大ならしめる配置を求めなくてはならない。

Δ を u_i で偏微分して

$$\frac{\partial K_1}{\partial u_i}\cdot K_2+K_1\cdot\frac{\partial K_2}{\partial u_i}=2K_3\frac{\partial K_3}{\partial u_i}\quad, i=1,2,\cdots\cdots k$$

この条件を満たす配置を求めることは困難である。

初めから対称配置に限れば $K_3=0$ であるから

$$K_1\cdot\frac{\partial K_2}{\partial u_i}+K_2\cdot\frac{\partial K_1}{\partial u_i}=0\qquad i=1,2,\cdots\cdots k \tag{6.5}$$

となるが、これも Nummerical に解くことは簡単ではない。

特に $k=2$ とすれば、この場合

$$K_1 = 2\frac{f_1^2}{\lambda_1}, \quad K_2 = 2\frac{f_1^2 u_1^2}{\lambda_1(1-2\lambda_1)}$$

であるから

$$\eta = 2\frac{f_1^4 u_1^2}{\lambda_1^2(1-2\lambda_1)}$$

で (6.6) は

$$2u_1 - \frac{1}{u_1} + \frac{f_1}{\lambda_1} - \frac{f_1}{1-2\lambda_1} = 0 \qquad (6.7)$$

となる．これを数値的に解いて

$\lambda_1 = 0.134$, $u_1 = -1.10768$, $f_1 = 0.21601$

$\lambda_2 = 0.866$ $u_2 = 1.10768$, $f_2 = 0.21601$

$\eta = \frac{1}{2}\Delta = 0.4066$

を得る．

第２章　假説検定論

§７　線型假説の検定

本節では次の§８で必要な事柄を準備しておく。

今 n 箇の正規母集団 $N(m_i, \sigma)$ $i=1,2,3,\cdots\cdots,n$ があつて、それらの準備偏差は共通であるが未知とする。母平均 m_i は $s(<n)$ 箇の未知定数 $\theta_1,\theta_2,\cdots\cdots,\theta_s$ の一次形式である。即ち既知定数 a_{ij} を係数として、

$$m_i = a_{i1}\theta_1 + a_{i2}\theta_2 + \cdots\cdots + a_{is}\theta_s \ , \quad i=1,2,3,\cdots\cdots,n \tag{7.1}$$

と表はされるものとする。

このとき統計的仮説 H:

$$\left.\begin{array}{l} b_{11}\theta_1 + b_{12}\theta_2 + \cdots\cdots + b_{1s}\theta_s = B_1^0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ b_{r1}\theta_1 + b_{r2}\theta_2 + \cdots\cdots + b_{rs}\theta_s = B_r^0 \end{array}\right\} (0<r\leqq s) \tag{7.2}$$

を線型仮説（*Linear Hypothesis*）と名づける。但し（7.2）で係数 b_{ij} 及び B_i^0 は既知の定数である。

線型仮説（7.2）を各母集団から無作為に抽出された標本 $x_1 x_2\cdots x_n$ にもとづいて検定しようというのである。

先づ（7.2）の左辺の r 箇の一次形式は一次独立と考えてよいから例えば $\theta_1,\theta_2,\cdots\cdots\theta_r$ に関してこれを解くと、

$$\theta_i = C_{i1}B_1^0 + \cdots\cdots + C_{ir}B_r^0 + C_{ir+1}\theta_{r+1} + \cdots\cdots + C_{is}\theta_s \tag{7.3}$$

$$i=1,2,\cdots\cdots r$$

こゝで勿論 C_{ij} は既知の定数である。（7.3）を（7.1）に代入して、

$$m_i = d_{i1}B_1^0 + \cdots\cdots + d_{ir}B_r^0 + d_{ir+1}\theta_{r+1} + \cdots\cdots + d_{is}\theta_s \tag{7.4}$$

$$i=1,2,3,\cdots\cdots,n$$

こゝでも係数 d_{ij} は既知の定数である。

よつて一般性を失うことなく、線型仮説とは

$$H_0: \ \theta_1=\theta_1^0, \quad \theta_2=\theta_2^0 \quad \theta_r=\theta_r^0 \tag{7.5}$$

$$0<r\leqq s$$

であると考えてよい。

$x_1, x_2, \quad\quad, x_n$ の同時分布の密度は

$$(2\pi\sigma^2)^{-\frac{n}{2}} \exp - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^{n} (x_i - a_{i1}\theta_1 - a_{i2}\theta_2 - \cdots\cdots - a_{is}\theta_s)^2$$

であるが、今

$$S = \sum_{i=1}^{n} (x_i - a_{i1}\theta_1 - a_{i2}\theta_2 - \cdots\cdots\cdots - a_{is}\theta_s)^2 \tag{7.6}$$

とおく、$\theta_1, \cdots\cdots, \theta_s$ の最尤推定値を $\hat{\theta}_1 \cdots\cdots, \hat{\theta}_s$ とすれば S の最小値

$$S_0 = \sum_{i=1}^{n} (x_i - a_{i1}\hat{\theta}_1 - a_{i2}\hat{\theta}_2 - \cdots\cdots\cdots - a_{is}\hat{\theta}_s)^2 \tag{7.7}$$

と $\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2 \quad , \hat{\theta}_s$ は統計的に独立であって勿論 $\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2 \quad , \hat{\theta}_s$ の同時分布は s 次元正規分布であるが、$\frac{1}{\sigma^2} S_0$ は自由度 $(n-s)$ の χ^2 分布に従う。これは仮説の如何に拘らずつねに成立つのである。

次に仮説 H_0 が正しいとすれば、このときの $x_1, x_2, \quad , x_n$ の分布密度は

$$(2\pi\sigma^2)^{-\frac{n}{2}} \exp - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^{n} (x_i - a_{i1}\theta_1^0 - \cdots\cdots - a_{ir}\theta_r^0 - a_{ir+1}\theta_{r+1} - \cdots - a_{is}\theta_s)^2$$

となり、このときの $\theta_{r+1} \cdots\cdots \theta_s$ の最尤推定値を夫々 $\hat{\theta}_{r+1}^* \cdots\cdots \hat{\theta}_s^*$ とする。

$$S' = \sum_{i=1}^{n} (x_i - a_{i1}\theta_1^0 - \cdots\cdots - a_{ir}\theta_r^0 - a_{ir+1}\theta_{r+1} - \cdots\cdots - a_{is}\theta_s)^2 \tag{7.8}$$

とおくと、S' の最小値

$$S_0' = \sum_{i=1}^{n} (x_i - a_{i1}\theta_1^0 - \cdots\cdots - a_{ir}\theta_r^0 - a_{ir+1}\hat{\theta}_{r+1}^* - \cdots\cdots - a_{is}\hat{\theta}_s^*)^2 \tag{7.9}$$

と $\hat{\theta}_{r+1}^* \cdots\cdots \hat{\theta}_s^*$ とは独立で $\frac{1}{\sigma^2} S_0'$ は自由度 $(n-s-r)$ の χ^2 分布に従う

よって若し仮説 H_0 が正しいならば

$$S_0' - S_0$$

は S_0 とは独立であって $\frac{1}{\sigma^2}(S_0' - S_0)$ は自由度 r の χ^2 分布に従う。

即ち仮説 H_0 の下では

$$F_{n-s}^{r} = \frac{n-s}{r} \frac{S_0' - S_0}{S_0} \tag{7.10}$$

なる統計量は自由度が $(r, n-s)$ なる Snedecor の F 分布に従うのである。

線型仮説（7.5）を検定するためには、統計量（7.10）を用いることが最強力な検定方式であるということも知られている。

以上では、$x_1, x_2, \dots, x_n$ は互に独立としておいたのであるが、$x_1, x_2, \dots, x_n$ の同時分布が Non-Singular な n 次元正規分布に従うときも同様のことが成立つのである。

§8　S統計量を用いた場合の正規母集団に関する統計的仮説の検定

考える母集団は正規母集団 $N(m, \sigma)$ として、最適の順序づけ統計量 $x(n_1), x(n_2), \dots, x(n_k)$ を用いたときの母数 m, σ に関する統計的仮説の検定について考えよう。

正規母集団 $N(m, \sigma)$ のときの $x(n_1), x(n_2), \dots, x(n_k)$ の極限分布の密度は（3.15）によって与えられる。再録すれば

$$
\begin{aligned}
h(x(n_1), x(n_2), \dots, x(n_k)) = {} & (2\pi)^{-\frac{k}{2}} f_1 \cdots f_k \sigma^{-k} \big[\lambda_1(\lambda_2-\lambda_1) \cdots \\
& (\lambda_k-\lambda_{k-1})(1-\lambda_k)\big]^{-\frac{1}{2}} n^{\frac{k}{2}} \\
\times \exp\Big[-\frac{n}{2\sigma^2}\Big\{ & \sum_{i=1}^{k} \frac{\lambda_{i+1}-\lambda_{i-1}}{(\lambda_{i+1}-\lambda_i)(\lambda_i-\lambda_{i-1})} f_i^2 (x(n_i)-m-u_i\sigma)^2 \\
& -2\sum_{i=2}^{k} \frac{f_i f_{i-1}}{\lambda_i-\lambda_{i-1}} (x(n_i)-m-u_i\sigma)(x(n_{i-1})-m-u_{i-1}\sigma)\Big\}\Big]
\end{aligned}
\tag{8.1}
$$

Case I　先づ Student 仮説

$$H_1;\quad m = m_0 \tag{8.2}$$

の検定から考えよう。

$$
\begin{aligned}
S = {} & \sum_{i=1}^{k} \frac{\lambda_{i+1}-\lambda_{i-1}}{(\lambda_{i+1}-\lambda_i)(\lambda_i-\lambda_{i-1})} f_i^2 (x(n_i)-m-u_i\sigma)^2 \\
& -2\sum_{i=2}^{k} \frac{f_i f_{i-1}}{\lambda_i-\lambda_{i-1}} (x(n_i)-m-u_i\sigma)(x(n_{i-1})-m-u_{i-1}\sigma)
\end{aligned}
\tag{8.3}
$$

とおいて

$$
\left.\frac{\partial S}{\partial m}\right|_{\substack{m=\hat{m} \\ \sigma=\hat{\sigma}}} = 0 \qquad \left.\frac{\partial S}{\partial \sigma}\right|_{\substack{m=\hat{m} \\ \sigma=\hat{\sigma}}} = 0
$$

$$K_1\cdot\hat{m}+K_3\cdot\hat{\sigma}=\sum_{i=1}^{k+1}\frac{(f_i-f_{i-1})(f_i\cdot x(n_i)-f_{i-1}\cdot x(n_{i-1}))}{\lambda_i-\lambda_{i-1}} \tag{8.4}$$

$$K_3\cdot\hat{m}+K_2\cdot\hat{\sigma}=\sum_{i=1}^{k+1}\frac{(f_iu_i-f_{i-1}u_{i-1})(f_i\,x(n_i)-f_{i-1}\,x(n_{i-1}))}{\lambda_i-\lambda_{i-1}}$$

よつて $\hat{m},\hat{\sigma}$ を定めると、これは(4.17)で与えられる。このときの S の最小値を S_0 とすれば

$$S_0=\sum_{i=1}^{k}\frac{\lambda_{i+1}-\lambda_{i-1}}{(\lambda_{i+1}-\lambda_i)(\lambda_i-\lambda_{i-1})}f_i^2\cdot(x(n_i)-\hat{m}-u_i\hat{\sigma})^2$$

$$-2\sum_{i=2}^{k}\frac{f_if_{i-1}}{\lambda_i-\lambda_{i-1}}\cdot(x(n_i)-\hat{m}-u_i\hat{\sigma})(x(n_{i-1})-\hat{m}-u_i\hat{\sigma})$$

$$=\sum_{i=1}^{k+1}\frac{(f_ix(n_i)-f_{i-1}x(n_{i-1}))^2}{\lambda_i-\lambda_{i-1}}-\hat{m}(K_1\cdot\hat{m}+K_3\cdot\hat{\sigma})$$

$$-\hat{\sigma}(K_3\cdot\hat{m}+K_2\cdot\hat{\sigma})$$

$$=\sum_{i=1}^{k+1}\frac{(f_i\cdot x(n_i)-f_{i-1}\cdot x(n_{i-1}))^2}{\lambda_i-\lambda_{i-1}}-K_1\hat{m}^2-2K_3\hat{m}\hat{\sigma}-K_2\hat{\sigma}^2 \tag{8.5}$$

であつて、これは $\hat{m},\hat{\sigma}$ とは独立で、且つ $\frac{1}{\sigma^2}S_0$ は自由 $(k-2)$ の χ^2 分布に従う。このことは仮説 H_1 とは無関係に成り立つことである。

仮説 H_1 が正しいときは

$$S'=\sum_{i=1}^{k}\frac{\lambda_{i+1}-\lambda_{i-1}}{(\lambda_{i+1}-\lambda_i)(\lambda_i-\lambda_{i-1})}f_i^2(x(n_i)-m_0-u_i\sigma)^2$$

$$-2\sum_{i=i}^{k}\frac{f_if_{i-1}}{\lambda_i-\lambda_{i-1}}(x(n_i)-m_0-u_i\sigma)(x(n_{i-1})-m_0-u_{i-1}\sigma) \tag{8.6}$$

とおいて

$$\left.\frac{\partial S'}{\partial\sigma}\right|_{\sigma=\hat{\sigma}^*}=0$$

即ち

$$K_2\cdot\hat{\sigma}^*+K_3\cdot m_0=\sum_{i=1}^{k+1}\frac{(f_iu_i-f_{i-1}u_{i-1})(f_i\cdot x(n_i)-f_{i-1}\cdot x(n_{i-1}))}{\lambda_i-\lambda_{i-1}} \tag{8.7}$$

によつて、$\hat{\sigma}^*$ を定めれば、S' の最小値 S_0' は

$$S_0' = \sum_{i=1}^{k} \frac{\lambda_{i+1} - \lambda_{i-1}}{(\lambda_{i+1}-\lambda_i)(\lambda_i - \lambda_{i-1})} f_i^2 (x(n_i) - m_0 - u_i \hat{\sigma}^*)^2$$

$$- 2 \sum_{i=2}^{k} \frac{f_i f_{i-1}}{\lambda_i - \lambda_{i-1}} (x(n_i) - m_0 - u_i \hat{\sigma}^*)(x(n_{i-1}) - m_0 - u_{i-1} \hat{\sigma}^*)$$

$$= \sum_{i=1}^{k+1} \frac{\{f_i x(n_i) - f_{i-1} x(n_{i-1})\}^2}{\lambda_i - \lambda_{i-1}} - 2m_0 \cdot (K_1 \cdot \hat{m} + K_3 \cdot \hat{\sigma})$$

$$- \frac{\{K_3 (\hat{m} - m_0) + K_1 \cdot \hat{\sigma}\}^2}{K_2} + m_0^2 \cdot K_1 \qquad (8.8)$$

でこれは $\hat{\sigma}^*$ と独立で $\frac{1}{\sigma^2} S_0'$ は自由度（$k-1$）の χ^2 分布に従うが、更に §７の一般論に従って $S_0' - S_0$ は S_0 と独立で、$\frac{1}{\sigma^2}(S_0' - S_0)$ は自由度 1 の χ^2 分布に従う

$$S_0' - S_0 = \frac{\Delta}{K_2} (\hat{m} - m_0)^2 \qquad (8.9)$$

であるから，仮説 H_1 が正しいならば

$$t = \sqrt{k-2} \cdot \sqrt{\frac{S_0' - S_0}{S_0}} = \sqrt{\frac{(k-2) \cdot \Delta}{K_2}} \; \frac{\hat{m} - m_0}{\sqrt{S_0}} \qquad (8.10)$$

は自由度（$k-2$）の Student の t－分布に従う．

特に $\lambda_1, \lambda_2, \cdots\cdots \lambda_k$ の配置が対称ならば $K_3 = 0$ であるから

$$t = \sqrt{(k-2) \cdot K_1} \; \frac{\hat{m} - m_0}{\sqrt{S_0}} \qquad (8.11)$$

となる．

Case II　次には一般化された Student 仮説の検定について考えよう。

今、s 箇の正規母集団 $N(m_\alpha, \sigma)$　$\alpha = 1, 2, 3, \cdots\cdots s$ があって、母標準偏差 σ は共通であるが未知とする．このとき，各母集団から一定の大さ n の標本を抽出して、大さの順に並べて

$$x^{(\alpha)}(1), x^{(\alpha)}(2), \cdots\cdots\cdots\cdots, x^{(\alpha)}(n) \quad \alpha = 1, 2, 3, \cdots\cdots, s$$

とする．n は充分大であるとして．

$$\frac{n_i}{n} = \lambda_i \qquad i = 1, 2, \cdots\cdots, k$$

として，

$$x^{(\alpha)}(n_1), x^{(\alpha)}(n_2) \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots, x^{(\alpha)}(n_k)$$

を用いるものとする。

検定すべき仮説は母平均の均一性

$$H_2: \quad m_1 = m_2 = \qquad\qquad = m_s \tag{8.12}$$

である．

このときは

$$S = \sum_{\alpha=1}^{s}\left\{\sum_{i=1}^{k}\frac{\lambda_{i+1}-\lambda_{i-1}}{(\lambda_{i+1}-\lambda_i)(\lambda_i-\lambda_{i-1})}f_i^2(x^{(\alpha)}(n_i)-m_\alpha-u_i\sigma)^2\right.$$

$$\left.-\sum_{i=2}^{k}\frac{f_i f_{i-1}}{\lambda_i-\lambda_{i-1}}(x^{(\alpha)}(n_i)-m_\alpha-u_i\sigma)(x^{(\alpha)}(n_{i-1})-m_\alpha-u_{i-1}\sigma)\right\} \tag{8.13}$$

として

$$\left.\frac{\partial S}{\partial m_\alpha}\right|_{\substack{m_1=\hat{m}_1\\ \cdots\cdots\\ m_s=\hat{m}_s\\ \sigma=\hat{\sigma}}} = 0 \quad \alpha=1,2,\cdots,s, \quad \left.\frac{\partial S}{\partial \sigma}\right|_{\substack{m_1=\hat{m}_1\\ \cdots\cdots\\ m_s=\hat{m}_s\\ \sigma=\hat{\sigma}}} = 0$$

即ち

$$\left.\begin{array}{l} K_1\cdot\hat{m}_1 \qquad\qquad\qquad + K_3\cdot\hat{\sigma} = X_1 \\ \qquad K_1\cdot\hat{m}_2 \qquad\quad + K_3\cdot\hat{\sigma} = X_2 \\ \qquad\qquad \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \qquad\qquad\qquad K_1\cdot\hat{m}_s + K_2\hat{\sigma} = X_s \\ K_3\cdot\hat{m}_1 + K_3\cdot\hat{m}_2 + \cdots\cdots + K_3\cdot\hat{m}_s + S\cdot K_2\hat{\sigma} = Y_1+Y_2+\cdots+Y_s \end{array}\right\} \tag{8.14}$$

但し、ここで

$$X_\alpha = \sum_{i=1}^{k+1}\frac{(f_i-f_{i-1})(f_i\cdot x^{(\alpha)}(n_i)-f_{i-1}\cdot x^{(\alpha)}(n_{i-1}))}{\lambda_i-\lambda_{i-1}} \qquad \alpha=1,2,\cdots s$$

$$Y_\alpha = \sum_{i=1}^{k+1}\frac{(f_i u_i-f_{i-1}u_{i-1})(f_i x^{(\alpha)}(n_i)-f_{i-1}x^{(\alpha)}(n_{i-1}))}{\lambda_i-\lambda_{i-1}}$$

(8.14)によつて定められた $\hat{m}_\alpha$・$\hat{\sigma}$ を用いると

$$S_0 = \sum_{\alpha=1}^{s}\left\{\sum_{i=1}^{k}\frac{\lambda_{i+1}-\lambda_{i-1}}{(\lambda_{i+1}-\lambda_i)(\lambda_i-\lambda_{i-1})}f_i^2(x^{(\alpha)}(n_i)-\hat{m}_\alpha-u_i\hat{\sigma})^2\right.$$

$$\left.-2\sum^{k}\frac{f_i f_{i-1}}{\lambda_i-\lambda_{i-1}}(x^{(\alpha)}(n_i)-\hat{m}_\alpha-u_i\hat{\sigma})(x^{(\alpha)}(n_{i-1})-\hat{m}_\alpha-u_{i-1}\hat{\sigma})\right\} \tag{8.15}$$

は $\hat{m}_\alpha$, $\hat{\sigma}$ と独立で，$\frac{1}{\sigma^2}S_0$ は自由度（$sk-s-1$）の χ^2 分布に従う。このことは仮説 H_2 には無関係に成り立つことである．

仮説 H_2 が正しいときには

$$m_1 = m_2 = m_3 = \cdots\cdots = m_s = m$$

として、

$$S' = \sum_{\alpha=1}^{s}\left\{\sum_{i=1}^{k}\frac{\lambda_{i+1}-\lambda_{i-1}}{(\lambda_{i+1}-\lambda_i)(\lambda_i-\lambda_{i-1})}f_i^2(x^{(\alpha)}(n_i)-m-u_i\sigma)^2\right.$$

$$\left.-2\sum_{i=2}^{k}\frac{f_i f_{i-1}}{\lambda_i-\lambda_{i-1}}(x^{(\alpha)}(n_i)-m-u_i\sigma)(x^{(\alpha)}(n_{i-1})-m-u_{i-1}\sigma)\right\} \qquad (8.16)$$

として

$$\left.\frac{\partial S'}{\partial m}\right|_{\substack{m=\hat{m}^*\\ \sigma=\hat{\sigma}^*}} = 0 \qquad \left.\frac{\partial S'}{\partial \sigma}\right|_{\substack{m=\hat{m}^*\\ \sigma=\hat{\sigma}^*}} = 0 .$$

即ち

$$\left.\begin{aligned} sK_1\cdot\hat{m}^* + sK_3\cdot\hat{\sigma}^* &= X_1+\cdots\cdots+X_s\\ sK_3\cdot\hat{m}^* + s\cdot K_2\cdot\hat{\sigma}^* &= Y_1+\cdots\cdots+Y_s\end{aligned}\right\} \qquad (8.17)$$

で、$\hat{m}^*$, $\hat{\sigma}^*$ を定めると

$$S_0' = \sum_{\alpha=1}^{s}\left\{\sum_{i=1}^{k}\frac{\lambda_{i+1}-\lambda_{i-1}}{(\lambda_{i+1}-\lambda_i)(\lambda_i-\lambda_{i-1})}f_i^2\cdot(x^{(\alpha)}(n_i)-\hat{m}^*-u_i\hat{\sigma}^*)^2\right.$$

$$\left.-2\sum_{i=2}^{k}\frac{f_i f_{i-1}}{\lambda_i-\lambda_{i-1}}(x^{(\alpha)}(n_i)-\hat{m}^*-u_i\hat{\sigma}^*)(x^{(\alpha)}(n_{i-1})-\hat{m}^*-u_{i-1}\hat{\sigma}^*)\right\} \cdot (8.18)$$

は、$\hat{m}^*$ $\hat{\sigma}^*$ と独立であって、$\frac{1}{\sigma}S_0'$ は自由度（$sk-2$）の χ^2 分布に従い、更に $S_0'-S_0$ は S_0 と独立であって $\frac{1}{\sigma}(S_0'-S_0)$ は自由度（$s-1$）の χ^2 分布に従うから

$$F_{sk-s-1}^{s-1} \equiv \frac{sk-s-1}{s-1}\,\frac{S_0'-S_0}{S_0} \qquad (8.18)$$

は自由度（$s-1$, $sk-s-1$）の Smedecor の F 一分布に従う、特に $s=2$ とすれば

$$t \equiv \sqrt{2k-3}\,\sqrt{\frac{S_0'-S_0}{S_0}} \qquad (8.19)$$

は自由度（$2k-3$）の Student の t 一分布に従うことが判る。

$S=2$ のとき（8.14）,（8.17）をかくと、

$$\left.\begin{aligned} K_1\cdot\hat{m}_1 \qquad\qquad &+K_3\cdot\hat{\sigma} = X_1\\ K_1\cdot\hat{m}_2 \quad &+K_3\cdot\hat{\sigma} = X_2\\ K_3(\hat{m}_1+\hat{m}_2) + 2K_2\cdot\hat{\sigma} &= Y_1+Y_2\end{aligned}\right\} \qquad (8.14)$$

$$\left.\begin{aligned} K_1\cdot\hat{m} + K_3\cdot\hat{\gamma}^* &= \tfrac{1}{2}(X_3+X_2) \\ K_3\cdot\hat{m}^* + K_2\cdot\hat{\gamma}^* &= \tfrac{1}{2}(Y_1+Y_2) \end{aligned}\right\} \tag{8.17'}$$

これから直ちに

$$\hat{m}^* = \frac{1}{2}(\hat{m}_1 + \hat{m}_2), \quad \hat{\gamma}^* = \hat{\gamma} \tag{8.20}$$

よって、

$$Z_\alpha \equiv \sum_{i=1}^{k+1} \frac{(f_i\cdot X^{(\alpha)}(m_i) - f_{i-1}\cdot X^{(\alpha)}(m_{i-1}))^2}{\lambda_i - \lambda_{i-1}}, \quad \alpha = 1, \alpha.$$

とおくと

$$\begin{aligned} S_0' &= Z_1 + Z_2 - 2(K_1\cdot\hat{m}^{*2} + 2K_3\hat{m}^*\hat{\gamma}^* + K_2\cdot\hat{\gamma}^{*2}) \\ &= Z_1 + Z_2 - \frac{1}{2}K_1(\hat{m}_1+\hat{m}_2)^2 - 2K_3\cdot(\hat{m}_1+\hat{m}_2)\hat{\gamma} - 2K_2\hat{\gamma}^2 \end{aligned} \tag{8.21}$$

又同様にして

$$S_0 = \sum_{\alpha=1} (Z_\alpha - \hat{m}_\alpha X_\alpha - \hat{\gamma}\, Y_\alpha) \tag{8.22}$$

(8.20), (8.21), (8.22) より、

$$S_0' - S_0 = \frac{K_1}{2}(\hat{m}_1 - \hat{m}_2)^2 \tag{8.23}$$

よって (8.19) は

$$t = \sqrt{\frac{2k-3}{2}K_1}\,\frac{(\hat{m}_1 - \hat{m}_2)}{\sqrt{S_0}} \tag{8.24}$$

§ 9. 検定力函数

本節では (8.10) 又は (8.24) なる検定の検定力について考えよう。

又、Z は $N(0,1)$ に従い w は自由度 f の χ^2 分布に従って Z と w が互に独立のとき

$$t = \frac{Z+\delta}{\sqrt{w/f}} \tag{9.1}$$

の分布は所謂 Non-Central なt分布であって、その密度は

$$\frac{\left(\frac{f}{2}\right)^{\frac{f}{2}} e^{-\frac{\delta^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}\,\Gamma\left(\frac{f}{2}\right)} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}(f+\nu+1)\right)}{\nu!} (\delta t)^\nu \left(\frac{2}{f+t^2}\right)^{\frac{f+\nu+1}{2}} \tag{9.2}$$

で与えられるがこの無限級数は項別に積分可能であるから

$$P(-t_\alpha \leqq t \leqq t_\alpha) = e^{-\frac{\delta^2}{2}} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{\delta^2}{2}\right)^\nu}{\nu!} I\left(\frac{\nu+1}{2}, \frac{f}{2}, \frac{t_\alpha^2}{f+t_\alpha^2}\right) \qquad (9.3)$$

但しこゝで $I\left(\frac{\nu+1}{2}, \frac{f}{2}, \frac{t_\alpha^2}{f+t_\alpha^2}\right)$ は K. Pearsin の Incomplete Beta－函数である．

（8.10）で考えると、仮説 H_1 が正しければ $\boldsymbol{t}$ の分布は自由度 $(k-2)$ の Student の t－分布であるが、今、H_1 のある対立仮説 H_1' ：$m = m'\ (\neq m_0)$ が正しいとすれば

$$\sqrt{\frac{\Delta}{K_2}}(\hat{m} - m_0) = \sqrt{\frac{\Delta}{K_2}}(\hat{m} - m') + \sqrt{\frac{\Delta}{K_2}}(m' - m_0)$$

として，

$$\delta \equiv \sqrt{\frac{\Delta}{K_2}} \frac{m' - m_0}{\sigma} \qquad (9.4)$$

とすれば

$$\boldsymbol{t} = \frac{\sqrt{\frac{\Delta}{K_2}} \frac{(\hat{m} - \hat{m}')}{\sigma} - \sqrt{\frac{\Delta}{K_2}} \frac{(m' - m_0)}{\sigma}}{\sqrt{\frac{S_0}{(k-2)\sigma}}} \qquad (9.5)$$

は自由度 $(k-2)$ の Non-Central な t－分布に従う．よって（8.10）なる検定の検定力は

$$P(|\boldsymbol{t}| \geqq t_\alpha) = 1 - P(|\boldsymbol{t}| \leqq t_\alpha)$$

$$= 1 - e^{-\frac{\delta^2}{2}} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{\delta^2}{2}\right)^\nu}{\nu!} I\left(\frac{\nu+1}{2}, \frac{k+2}{2}, \frac{t_\alpha^2}{k-2+t_\alpha^2}\right) \qquad (9.6)$$

これはよく知られたように δ の増加函数である。

このことから直ちに判ることは、最強力な検定を与える $\lambda_1, \lambda_2, \cdots\cdots \lambda_k$ の配置は $\frac{\Delta}{K_2}$ 従って対称配置なら K_1 を最大ならしめるようなものである。

註及び参照文献

(1) 例えば，R. A. Fisher : On the Mathematiocal Foundations of Theoretical Statistics, Philosophical Transactions of the Royal Soicty of London. Seues A, Vel 222 pp 309-368 1922

R. A. Fisher : Theory of Statistical Estimation, Proceedings of the Cambridge philosophecal Society. Vol XXII Pt 5. pp. 700-725 1925

H. Cramér : Mathematical Methods of Statistics Chapts 32, 33

(2) H. Cramér : loc cit. Chapt 32

(3) Frederick Mosteller : On Some Useful "Inefficient" Statistics Annals of Mathematical Statistics, Vel XVII No 4 December, 1946 pp 377-408

(4) 山内二郎：順序づけ統計量を利用した「平均値と標準偏差の推定の計算」について，統計数理研究 Vol 3 No 1~2 pp 52~57 (1949)

(5) これについては太沢清：集団の生理一刺戟一反応現象の統計的解析一：生物の集団と環境，岩波科文献抄 23，pp 24-40 及びその引用文献参照

(6) Columbia University : Statistical Research Group 編 : Selected Techniques of Statistical Analysis for Scientific and Industrial Research and Production and Management Engineering の Chapt 11. By Milton Friedman ; Planning an Experiment For Estimationg The Mean and Standard Deviation of a Nrmal Distribution From Observations on The Cumulative Distribution (pp 341-352) を参照せる。

(7) この参照については，H Cramér, loc cit, Chapt 32, を見よ

(8) この証明の道すじは次の通り (1.11) の対数をとって，これの α，β について全微分をとって，両辺を平方し，この各辺に (1.10) の各辺を乗じて積分すれば

$$n\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\partial \log f}{\partial \alpha}d\alpha+\frac{\partial \log f}{\partial \beta}d\beta\right)^2 f\,dx \geqq \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\partial \log g}{\partial \alpha}d\alpha + \frac{\partial \log g}{\partial \beta}d\beta\right)^2 g\,d\alpha^* d\beta^* \qquad (1)$$

こゝで等号が成立つのは

$$\frac{\partial h}{\partial \alpha}=\frac{\partial h}{\partial \beta}=0$$

即ち

$$h(\xi_1, \cdots\cdots, \xi_{n-1} \mid \alpha^*, \beta^*; \alpha, \beta)$$

が α, β に無関係のときに限る

(1)で $d\alpha, d\beta$ を不定元 u, v でおきかえると

$$n\left[E\left(\frac{\partial \log f}{\partial \alpha}\right)^2 u^2+2E\left(\frac{\partial \log f}{\partial \alpha}\frac{\partial \log f}{\partial \beta}\right)uv+E\left(\frac{\partial \log f}{\partial \beta}\right)^2 v^2\right]$$

$$\geqq E\left(\frac{\partial \log g}{\partial \alpha}\right)^2 u^2+2E\left(\frac{\partial \log g}{\partial \alpha}\frac{\partial \log g}{\partial \beta}\right)uv+E\left(\frac{\partial \log g}{\partial \beta}\right)^2 v^2 \qquad (2)$$

さて、α^*, β^* は夫々 α, β の不偏推定値であるから

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\alpha^* g(\alpha^*, \beta^*; \alpha\beta)\,d\alpha^* d\beta^*=\alpha \qquad (3)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\beta^* g(\alpha^*\beta^*; \alpha, \beta)\,d\alpha^* d\beta^*=\beta \qquad (4)$$

$g(\alpha^*, \beta^*; \alpha, \beta)$ は $\alpha^*\beta^*$ の同時分布の密度函数であるから勿論

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g(\alpha^*\beta^*; \alpha, \beta)\,d\alpha^* d\beta^*=1 \qquad (5)$$

(3)(4)の全微分をとると正則性条件から

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\alpha^*\left(\frac{\partial \log g}{\partial \alpha}d\alpha-\frac{\partial \log g}{\partial \beta}d\beta\right)g\,d\alpha^* d\beta^*=d\alpha \qquad (6)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\beta^*\left(\frac{\partial \log g}{\partial \alpha}d\alpha-\frac{\partial \log g}{\partial \beta}d\beta\right)g\,d\alpha^* d\beta^*=d\beta \qquad (7)$$

が全ての $d\alpha, d\beta$ に対して同時に成立つ。$d\alpha, d\beta$ を夫々 u, v とし、(6)、(7) に夫々不定元 ξ, η をかけて加えて

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}[\xi(\alpha^*-\alpha)+\eta(\beta^*-\beta)]\left(\frac{\partial \log g}{\partial \alpha}u-\frac{\partial \log g}{\partial \beta}v\right)g\,d\alpha^* d\beta^* = (\xi u+\eta v) \qquad (8)$$

(8)は Schwarz の不等式を用いて．

$$(\xi u+\eta v)^2 \leqq \left[\xi^2 E(\alpha^*-\alpha)^2+2\xi\eta E(\alpha^*-\alpha)(\beta^*-\beta)+\eta^2 E(\beta^*-\beta)^2\right]$$

$$\times\left[E\left(\frac{\partial\log g}{\partial\alpha}\right)^2 u^2+2E\left(\frac{\partial\log g}{\partial\alpha}\frac{\partial\log g}{\partial\beta}\right)uv+E\left(\frac{\partial\log g}{\partial\beta}\right)^2 v^2\right] \quad (9)$$

(9)で等号が成立つのは

$$\frac{\partial\log g}{\partial\alpha}d\alpha-\frac{\partial\log g}{\partial\beta}d\beta=\xi(\alpha^*-\alpha)+\eta(\beta^*-\beta)$$

のときに限る．

ここで次の代数的な補促定理を証明しよう．

補促定理 A, B は共に2次の positive-definite な対称行列として二つの二次形式 $A(\xi,\eta)$, $B(u,v)$ について不等式

$$A(\xi,\eta)B(u,v) \geqq (\xi u+\eta v)^2 \quad (10)$$

が任意の ξ,η,u,v について成立つならば

$$A(\xi,\eta) \geqq B^{-1}(\xi,\eta) \quad (11)$$

である．

証明、適当な直交変換

$$u=p_{11}u'+p_{12}v' \quad v=p_{21}u'+p_{22}v' \quad (12)$$

で，$B(u,v)$ を対角線型に変換する．B の固有値を $\lambda_1>0$ $\lambda_2>0$ として

$$A(\xi,\eta)\cdot(\lambda_1 u'^2+\lambda_2 v'^2) \geqq \{(p_{11}u'+p_{12}v')\xi+(p_{21}u'+p_{22}v')\eta\}^2 \quad (12)$$

(12)を u', v' についての二次形式と考えて整理すると，

$$\{\lambda_1 A(\xi,\eta)-(p_{11}\xi+p_{21}\eta)^2\}u'^2-2(p_{11}\xi+p_{21}\eta)(p_{12}\xi+p_{22}\eta)u'v'$$
$$+\{\lambda_2 A(\xi,\eta)-(p_{12}\xi+p_{22}\eta)^2\}v'^2 \geqq 0$$

つまり、行列．

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 A(\xi,\eta)-(p_{11}\xi+p_{21}\eta)^2 & -(p_{11}\xi+p_{21}\eta)(p_{12}\xi+p_{22}\eta) \\ -(p_{11}\xi+p_{21}\eta)(p_{12}\xi+p_{22}\eta) & \lambda_2 A(\xi,\eta)-(p_{12}\xi+p_{22}\eta)^2 \end{vmatrix}$$

は任意の ξ,η について positive-definite である．よって．

$$A(\xi,\eta) \geqq \frac{1}{\lambda_1}(p_{11}\xi+p_{21}\eta)^2+\frac{1}{\lambda_2}(p_{12}\xi+p_{22}\eta)^2$$

即ち

$$A(\xi,\eta) \geqq \left(\frac{p_{11}^2}{\lambda_1}-\frac{p_{12}^2}{\lambda_2}\right)\xi^2-2\left(\frac{p_{11}p_{21}}{\lambda_1}-\frac{p_{12}p_{22}}{\lambda_2}\right)\xi\eta$$
$$+\left(\frac{p_{21}^2}{\lambda_1}-\frac{p_{22}^2}{\lambda_2}\right)\eta^2 \quad (13)$$

この右辺の二次形式の行列は

$$\begin{bmatrix} \frac{p_{11}^2}{\lambda_1}+\frac{p_{12}^2}{\lambda_2} & \frac{p_{11}p_{12}}{\lambda_1}+\frac{p_{12}p_{22}}{\lambda_2} \\ \frac{p_{11}p_{21}}{\lambda_1}+\frac{p_{12}p_{22}}{\lambda_2} & \frac{p_{21}^2}{\lambda_1}+\frac{p_{22}^2}{\lambda_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\lambda_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\lambda_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{11} & p_{21} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix} \left[\begin{bmatrix} p_{11} & p_{21} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} B \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix} \right]^{-1} \begin{bmatrix} p_{11} & p_{21} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} = B^{-1}$$

よって

$$A(\xi,\eta) \geqq B^{-1}(\xi,\eta)$$

この補助定理を(9)に適用して

$$\frac{1}{1-\rho^2}\left(\frac{u^2}{\sigma_1^2}-2\rho\frac{uv}{\sigma_1\sigma_2}-\frac{v^2}{\sigma_2^2}\right) \leqq E\left(\frac{\partial \log g}{\partial\alpha}\right)^2 u^2+2E\left(\frac{\partial \log g}{\partial\alpha}\frac{\partial \log g}{\partial\beta}\right)uv + E\left(\frac{\partial \log g}{\partial\beta}\right)^2 v^2 \qquad (14)$$

(14)と(2)から(1.14)が出る。

(9) F. N. Daird and J. Neyman: Extemseim of the Markoff Theorem on Least Squares. Statistical Research Memoirs Vol. 1. p. 105

J. Ogawa: Note on the Markoff's Theorem on Least Squares. Osaka Mathematical Journal Vol 2 No. 2 November. 1950

(10) H. Cramér loc cit p. 368

(11)

(12)　(5.3)の下でK_1を計算するには次のようにすればよい。

(5.3)より、

$$2u_i f_i + \frac{f_i^2 - f_i f_{i-1}}{\lambda_i - \lambda_{i-1}} - \frac{f_{i+1} f_i - f_i^2}{\lambda_{i+1} - \lambda_i} = 0$$

$$2u_{i+1} f_{i-1} + \frac{f_{i-1}^2 - f_{i-1} f_{i-2}}{\lambda_{i-1} - \lambda_{i-2}} + \frac{f_i f_{i-1} - f_{i-1}^2}{\lambda_i - \lambda_{i-1}} = 0$$

から

$$2u_i f_i - 2u_{i-1} f_{i-1} + \frac{(f_i - f_{i-1})^2}{\lambda_i - \lambda_{i-1}} + \frac{f_{i+1} f_i - f_i^2}{\lambda_{i+1} - \lambda_i} - \frac{f_{i-1}^2 - f_{i-1} f_{i-2}}{\lambda_{i-1} - \lambda_{i-2}} = 0$$

これを　$i = 1, 2, 3, \cdots, k+1$　について加えると

$$K_1 = \frac{f_k^2}{1 - \lambda_k}$$

第3章　応　用

本章では第1、2章で述べた理論の応用について述べる。

§10　投量死亡率曲線（Dosage Mortality Curve）

或る特性（characteristic）の母集団分布の型は判っているが、一つ一つの個体の特性値は原理的に観測不能であって、ただ累積度数しか観測出来ないという型の問題がある。

その典型的な例は毒物の動物に対する致死効果を見る場合である。

或る毒物の動物に対する致死量（Lethal Dose）とは、それより強ければその動物は死ぬが、それより弱ければ死なないという限界に於ける毒物の強さのことである。致死量には勿論個体差があって各動物毎に変動するが、過去の研究に依れば毒物の強さを、その濃度cの自然対数$x = \log c$で測るならば、致死量の母集団分布が正規分布をなすことは一般的に認められている。

即ち考える動物に関する致死量の母集団で致死量が$x - \frac{1}{2}dx$と、$x + \frac{1}{2}dx$の間にある確率は

$$(2\pi\sigma^2)^{-1/2}\exp\left\{-(x-m)^2/2\sigma^2\right\}dx \tag{10.1}$$

で与えられる。

ここで曲線

$$y = \int_{-\infty}^{x}(2\pi\sigma^2)^{-1/2}\exp\left\{-(x-m)^2/2\sigma^2\right\}dx \tag{10.2}$$

を投量死亡率曲線又は投量反応率曲線（Dosage Response Curve）と名づける。母平均mをその毒物の半数致死量といいLD_{50}とかく。

或毒物の或種類の動物に対する致死効果を知るということは、それに対する投量死亡率曲線（10.2）を知るということであって、結局LD_{50}のm及び標準偏差σを知ればよいのである。

（10.2）を書直すと、

$$y = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\frac{x-m}{\sigma}}\exp -\frac{t^2}{2}dt$$

となるから、今

$$\alpha \equiv -m/\sigma \ , \quad \beta \equiv 1/\sigma \tag{10.4}$$

とおくと

$$y = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\alpha+\beta x} \exp -\frac{t^2}{2} dt$$

母数 m, σ の代りに α, β を知つても曲線を描くことが出来る。

今何匹かの動物を用いて実験して、その個々の動物の致死量を知ることが出来るならば良く知られた普通の推定理論によつて、m, σ を推定すればよいのであるが、個々の動物の致死量というものは、原理的に観測不可能である。何者、今一定の強さ x の毒物を投与するならばその致死量が x 以下である動物は皆死んでしまうからである。又一匹の動物にその強さの弱いものから段々に強い毒物を投与して行くという方法でも、その累積効果の機構が明らかでない限り矢張り致死量は判らない。

同様の事情は物理的実験で、例えば Radú の Proximity Fuze の Sensitivity を測定する場合にも生ずることが Milton Friedman によつて指摘された。

このような場合の実験は普通次のような行はれる。供試動物の数を毒物の強さの水準 $x_1, x_2, \text{------}, x_k$ に対して夫々 $n_1, n_2 \text{----}, n_k$ とする。各水準における生残数を夫々 $s_1, s_2 \text{-----} s_k$、従つて死亡数は夫々 $n_1-s_1, n_2-s_2 \text{----} n_k-s_k$ であるとする。

死亡水準における母集団の死亡率は

$$P_i = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\alpha+\beta x_i} \exp -\frac{t^2}{2} dt \ , \quad i = 1, 2, \text{-----} k \tag{10.6}$$

母集団生残率は、

$$Q_i \equiv 1 - P_i = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\alpha+\beta x_i}^{\infty} \exp -\frac{t^2}{2} dt \quad i = 1, 2, \quad , k \tag{10.7}$$

であるから i 水準で s_i 匹生残る確率は

$$\binom{n_i}{s_i} P_i^{\,n_i - s_i} Q_i^{\,s_i} \quad i = 1, 2, \text{------} k$$

である。

こゝで吾々は各毒物水準における供試動物数 n_i が充分大として大標本理論を考えよう。

標本死亡率

$$p_i=\frac{n_i-s_i}{n_i} \qquad i=1,2,\cdots\cdots,k$$

は母集団死亡率 P_i の観測値であって，n_i が充分大なら漸近的に

$$N\left(P_i\sqrt{\frac{P_iQ_i}{n_i}}\right) \quad i=1,2,\qquad ,k$$

に従うことは良く知られている．

今変換

$$P_i=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\frac{y_i-m}{\sigma}}\exp-\frac{t^2}{2}dt \qquad i=1,2,\cdots\cdots k \qquad (10.8)$$

$$Z_i\equiv\frac{y_i-m}{\sigma} \qquad i=1,2,\cdots\cdots\cdots k \qquad (10.9)$$

によって新変数 Z_i を導入すると，$n_i\to\infty$ のとき，Z_i の極限分布の密度は

$$\sqrt{\frac{n_i}{2\pi P_iQ_i}}f_i\cdot\exp\left\{-\frac{nf_i^2}{2P_iQ_i}(Z_i-\alpha-\beta x_i)^2\right\} \qquad (10.10)$$

となる．但し，$\qquad i=1,2,\cdots\cdots\cdots,k$

$$f_i\equiv\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp-\frac{1}{2}(\alpha+\beta x_i)^2 \qquad i=1,2,\cdots\cdots k \qquad (10.11)$$

毒物の各水準の実験が全く独立なら，$Z_1Z_2\cdots\cdots Z_k$ の同時分布の密度は

$$\prod_{i=1}^{k}\sqrt{\frac{n_i}{2\pi P_iQ_i}}\cdot f_i\times\exp-\frac{1}{2}S \qquad (10.12)$$

但し，

$$S\equiv\sum_{i=1}^{k}\frac{\lambda_if_i^2}{P_iQ_i}(Z_i-\alpha-\beta x_i)^2 \qquad (10.13)$$

となる．

こいで (10.13) で P_i, Q_i は (10.6)(10.7) から見るように未知母数 α,β を含むから，第1章と全く同様にして，α,β を推定するわけには行かない．

考1．平均値で考えると $E(p_i)=P_i$ だから $E(y_i)=x_i$ となるべきだから (10.9) は

$$E(Z_i)=\frac{x_i-m}{\sigma}=\alpha+\beta x_i \qquad i=1,2,\cdots\cdots k$$

となる．つまり、Z_iの平均値はx-Z平面上の一直線上にある．よってこれも一種の直線の当嵌めと考えることが出来るが、その各点でで分散が異なるのである．

よって(x_i, Z_i), $i=1,2,\cdots\cdots,k$を平面上にプロットしてそれにFree Handで直線を当はめて、α,βの近似値α_1,β_1を求める．

$$Z_i-\alpha-\beta x_i = Z_i-\alpha_1-\beta_1 x_i-(\alpha-\alpha_1)-(\beta-\beta_1)x_i$$

であるから

$$Z_i' \equiv Z_i-\alpha_1-\beta_1 x_i \qquad i=1,2,\cdots\cdots,k$$

$$\alpha' \equiv \alpha-\alpha_1\ ,\ \beta' \equiv \beta-\beta_1$$

として(10.13)の代りに

$$P_i' = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\alpha_1-\beta_1 x_i} \exp -\frac{t^2}{2}\,dt \qquad i=1,2,\cdots\cdots,k$$

$$Q_i' = 1-P_i'$$

として

$$S' = \sum_{i=1}^{k} \frac{n_i f_i'^2}{P_i' Q_i'}\,(Z_i'-\alpha'-\beta' x_i)^2 \tag{10.14}$$

これからA. Markoffの定理によってα',β'の最良線型不偏推定値$\hat{\alpha}',\hat{\beta}'$を求めて$\alpha,\beta$の推定値として

$$\hat{\alpha} = \alpha_1+\hat{\alpha}' \quad , \quad \hat{\beta} = \beta_1+\hat{\beta}' \tag{10.15}$$

をとる．そうして(10.15)の$\hat{\alpha},\hat{\beta}$をα_1,β_1の代りに用いて上と同様の方法を繰返して行って、α,βの推定値を求めるというのが、Fisher-Bliss の方法なのである．

若し、α,βの推定値$\hat{\alpha},\hat{\beta}$が求まるならば

$$\hat{m} = -\hat{\alpha}/\hat{\beta} \quad , \quad \hat{\sigma} = 1/\hat{\beta} \tag{10.16}$$

で、m,σの推定値とするならば、大標本のときはこれらは漸近的に不偏で

$$D^2(\hat{m}) = \sigma^2 D^2(\hat{\alpha}) + 2\sigma^2 m C(\hat{\alpha},\hat{\beta}) + \sigma^2 m^2 D^2(\hat{\beta})$$
$$= \sigma^2\{D^2(\hat{\alpha}) + 2mC(\hat{\alpha},\hat{\beta}) + m^2 D^2(\hat{\beta})\}$$
$$D^2(\hat{\sigma}) = \sigma^2 D^2(\hat{\beta})$$

仮りに$\hat{\alpha},\hat{\beta}$として(10.15)をとれば

$$H_1=\sum_{i=1}^{k} n_i f_i'^2/R_i'Q_i' \qquad H_2=\sum_{i=1}^{k} n_i f_i'^2 x_i^2/P_i'Q_i'$$
$$H_3=\sum_{i=1}^{k} n_i f_i'^2 x_i/P_i'Q_i'$$

とおくと、

$$D^2(\hat{\alpha}) \doteqdot H_2/(H_1H_2-H_3^2)$$
$$D^2(\hat{\beta})=H_1/(H_1H_2-H_3^2)$$
$$C(\hat{\alpha},\hat{\beta})=-H_3/(H_1H_2-H_3^2)$$

よって、

$$D^2(\hat{m})=\frac{1}{H_1H_2-H_3^2}(m^2H_1-2mH_3+H_2)$$
$$\doteqdot\frac{1}{H_1H_2-H_3^2}\sum_{i=1}^{k} n_i f_i'^2(m-x_i)^2/R_i'Q_i' \qquad (10.17)$$
$$D^2(\hat{\sigma})=\frac{\sigma^2}{H_1H_2-H_3^2} \quad H_1=\frac{\sigma^2}{H_1H_2-H_3^2}\sum_{i=1}^{k} n_i f_i'^2/R_i'Q_i'$$

次に二種類の動物に対して同一毒物の又は一種類の動物に対して二種類の毒物の致死効果を調べる場合にその投量死亡率曲線を夫々

$$y_\nu=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_\nu}\int_{-\infty}^{x_i}\exp\left\{-(t-m_\nu)^2/2\sigma_\nu^2\right\}dt \qquad \nu=1,2 \qquad (10.18)$$

として標本死亡率を $P_i^{(\nu)}$ 又は

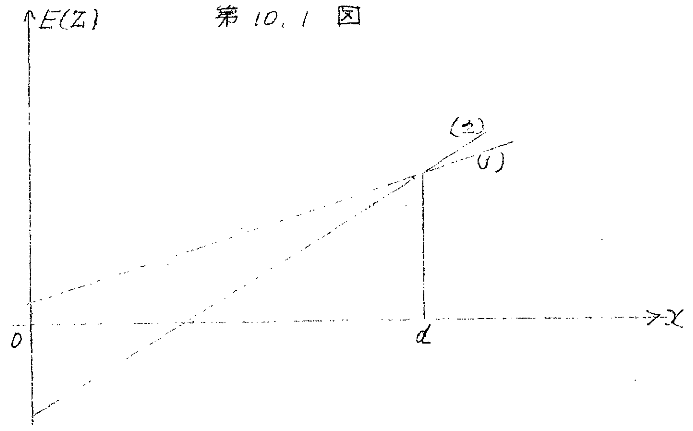
$$P_i^{(\nu)}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\frac{y_i^{(\nu)}-m_\nu}{\sigma_\nu}}\exp-\frac{t^2}{2}dt \qquad i=1,2,\cdots\cdots k$$
$$Z_i^{(\nu)}=(y_i^{(\nu)}-m_\nu)/\sigma_\nu$$

とするとき理論的には $\sigma_1=\sigma_2$ であると考えられる．それは

$$E(Z_i^{(\nu)})=\frac{x_i-m_\nu}{\sigma_\nu} \qquad \nu=1,2.$$

なる二直線が若し交はれば、ある点 $x=d$ を境にして、その前後で致死効果の逆転をきたすからである．

第10.1図



実際のデーターについて $\rho_1=\rho_2$ 即ち仮説

$$H_5:\ \beta_1^{(1)}=\beta_2^{(2)}$$

を検定するには(10.14)のS'を用いて対2章 §8 の試験を適用すればよい。