1 統計数理的數量化の問題

―― 定性的(質的)なるものの數量化に就いての覚書 ――

所員 林 知己夫

統計調査に於ては調査項目に関しても調査の綜合的科学的企画運営のためにも種々定性的なものを数量化し其等の関係を数理的に把握し集団或は個々の性質を決定しなければならない。このためある性質をあらはす比率を以て示すこともあるし、問題、質問をつくり此に対する答を量化し、その得点数を以て示すこともある。此の後者については種々の専門家の研究が必要であり、特に統計数数方面からの研究もかくべからざるものである。此について一般的にのべることはその研究範囲の尨大であり且又未開の領域が多いためまずこゝでは不可能に近い。然し此等の問題はきわめて肝要なものであつて、單に抽象論ではかたのつき得ぬ事柄である。此の解決には思ひつき発見は何者でもない、要は此を血肉化するにあるのである。

以下に於ては統計数理的立場からみて、興味あり今後の研究を俟つ事大であると思ふいくつかの方法を呈示し、批判し、併せて我々の行ったいくつかの研究を記し、参考に資したいと思ふ。

これは文部省科学試験研究費による研究の一部である。

—目　　次—

第一章 序論

定性的なものを数量化しようとするこころみは相当むかしから考察されていた。しかしその様なこころみに於いては数量化が多く機械的であり、任意的であり、方法論的にみる時全く科学性が見受けられるものが少かった。ために定性的なものの数量化と云うものは単なる便宜的なものに過ぎず、単純な機械主義的なものに見られていたのである。

然し乍ら定性的なものを数量化し、理論体系の中にとり入れ、社会人間現象を科学的にとりあつかうべき必要は次第に高まってきたのである。ここに数量化というものが従来の機械的なものから遠ざかり新な観点からみなおされ、合理的な方法によって行われねばならぬ様になって来たのである。

たとうるに経済学に於ても、静態的な記述法則から予測の問題へと中心がうつる傾向がきざしたのは当然の結果として態度、欲望、心理という様な要素を理論体系の中に明確な形でとり入れねばならぬと云う上述の如き反省が行われつゝある。古くは

Knight の "Risk, Uncertainty and Profit" (1921) にあらわれているその傾向は遥く Reynes にも見られ

O. Morgenstern "Wirtschaftsprognose"

K. Menger "Moral, Wille und Weltgestallung"

Myrdal "Das politische Element in der national Ökonomischen

Doktrinbildung"

山田雄三氏の所論

に強い形であらわれている。又此の事は最近目についた George Katona の論文

Contribution of Psychological Data to Economic Analysis (Journal of the American Statistical Association 1947)

に於ても見られる所であり彼は意見，期待の社会調査を経済現象の解析にとり入れ、現象解釋の問題に寄與あらしめようとしてその必要を強調している。この傾向は我国に於てもさかんになりつゝある。然し此等には経済現象にはかゝる定性的なものの考察が必要であり、その方が Dominant であり、其の様な立場から分析せねばならぬと云う事を強調しているに止り、かゝるものを変数として Parameter として理論を展開するに資するところがなかったと思われる。

又近時社会学、心理学方面に於て定性的なもの、例えば人間環境式は歴史的なものに関する種々の事象、其等の中における人間の行動、態度、意見、心理、意欲、欲望、期待、乃至はそれらの強度（Intensity）と言う様なものを数量化することに依って社会人間現象に metric を導入し、複雑な力動的な現象の構造の解析過程に如上のものを変数として又 Parameter としてとり入れ、ここに数理を用いて操作してゆき、其等の間の関係を明確にみちびき出し、かくて有用な結論を得ようとするこころみがさかんになりつゝある。此は此の種の学問が単なる記述的法則を求めることなく現象の予測と言う事を法則の核心とするに至るならば当然の所であろうと思う。

以上の状況を反映してその研究成果も調査法理論と関聯して次第に多くなりつゝあるが、此等についていまだ理論的、実際的研究は少いと言へるであろう。L. L. Thurstone の態度測定（Attitude measurement)—— 態度の favourable, Unfavourable の尺度を決定する—— Louis Guttman の Scale Analysis, Intensity Analysis（複雑な想像の中一次元的と考えられるものを剔出するに適した方法であり、此を用い一次元的なものについての尺度を決定する）、pairid Comparison の方法（次元のことなるものをある別の立場から一次元的なものとして尺度化する）、Von neumen morgenstern の Theory of Games and Economic Behaviour にある考え方、或は我々の行った仮釋放の問題に関する数量化の方法（仮釋放の成否の判定にもっとも有効な確率論的数量化の方法）等々は此の系列に属するものであろう。

〔註〕

なお、Moreno の Sociometry の考え方（彼の主著"Who shall survive?" 1949 にある）はまだ数量化の具体的方法を述べるに到っていないが、数量化の糸口がよく分析せられてある点は興味深い。此からやがては大いなる社会力学（勿論確率論的意味）の数量化の研究が生れることであろう。

此等の研究、其についての批判乃至は新しい方法を順次のべてゆかうと思う。

此等の成果はすべて満足すべきものであろうか。私は否と答へざるを得ない。何となればすべてが統計数理的な立場から十分なものでないからである。現在の所に於ては分理的立場に立つとき、数量化の方法、現象解析の方法、分析結果の綜合の方法は確率論に根をおく統計数理的方法によるのが最もよいと考えられるからである。

然し旧来の方法は新に新しい観点からみなほされ、或は発展せられるべきものとして考察に値すると共に其は或は又新しい発展への何等かの示唆をあたへるであろうかと思う。

あたりまえの事かもしれないが此の前に数量化と言う事をどう考えて

いるかをあらためて一寸のべておこう。

我々がある対象に対してある事に関する *Proposition* を得ようとするとき、此を科学的に明確たらしめるために数量化を行うのであって、数量化はあくまでも相対的なものであり、絶対的意味をもつものではない。数量は全く我々に対して機能的な意味しかもち得ないのであると言うことである。

参考文献

数量化についての一般的文献としては有名な *Guilford* (J.P.) *Psychometric Methods 1936 Mcgraw Hill* がある。此の外最近米国では *Studies in Social Psychology in World War II Princeton University Press 1949* と言う4冊本が出版されているそうで我々の立場からもなかなか興味がありそうだが残念乍ら未見である。

ことに4冊目

Measurment and Prediction

と云うのは特に面白そうだ。

第二章 Reliability と Validity とに関する特殊問題 I

定性的なものを数量化するにはまづその定性的なるものとは如何なるものであるかと言うことを理論的に概念的に明確に規定しておき、その規定されたものをしらべるために広い意味の調査乃至はテストを行い、その結果を量的把握する必要がおこってくる。どの様に調査、テスト結果を綜合して、定性的な性質を十全に数量化すればよいであろうか。

〔註〕

定性的なものの量化の伝統的方法は J. P. Guilford Psychometric Methods 1936, Macgraw Hill に詳しい。

此の一般論は今後の研究課題であるが、まづ第一に考えるべきことは数量化されたものが定性的な性質をよく表現しているものでなくてはならない。即ち、数量化は Validity,（妥当性） Reliability（信頼性） Objectivity（客観性）, Reproducibility（再現性）, Consistency（無矛盾性）あるものでなくてはならない。

Validity とはそれが知ろうとする性質を十分にあらわしていると云う事、Reliability とはそれが誤差を伴わぬこと、Objectitivity とはそれが客観性をもつと言うこと、Reproducibility とはそれがよく定性的な性質を再現できると言うこと、Consistency とはそれが適性的な世界と矛盾しないものであると言う事を言うのである。

数量化が Validity あるものでなくてはならぬと言うことはまづ第一條件である。測定しようと欲するものを測定していると言うこと、此によって始めて数量は、科学的にして有用な行動の規準を我々にあた

えることが出来る。此がみたされざる限り数量化は冗談に過ぎないと言わざるを得ない。

例えば、所謂学力試験は Validily あるものと言えるであろうか。成績と言うものは何に対する評価（数量化）であるか。此等は全く任意的なものであり、単なる便宜的、因習的なものにすぎないと思われる。人間の活動能力、人間精神の発達、教育効果を測定する Validily あるものとの保証は果してあたえられてあるであろうか、深く反省しなければならない。

従って従来比較的計量容易と目されていた調査、テストに於ても此の点重大な問題が潜むでいるのである、まして複雑なダイナミックなものの数量化に関してはより面倒な問題があるのは言う迄もない所である。

Validity 以外の性質の測定方法に関しても現在迄の所察は十分行われているとは言い難い。いくらか、伝統的な方法によって考察がほどこされているが全く不満足なものであり、新に統計数量的な観点から formulate されゆかなければならないと思う。

以上の様な一般論はさておき、ここでは所謂 Reliability と言うものについて二三考えたことを記してみよう。主として所謂 Reliability の係数と言われていることについての批判である。此の係数は何を物語っているのであろうか。

"所謂 Reliability の測定について"

§1.　Test の問題の作成にあたって其等のものが Validity ある、Reliability あるものであると言うことは絶対必要なことであろう。

Reliability あるテストとはそのテストによって同一想像乃至は個人を何回測定しても常に同一の結果が得られる様なもの、即ち測定の誤差を伴わない様なものを言うのである。Validity あるテストは其のテストが丁度測定しようとする所のものを測定する事ができる様なものを云うのである。

此の様な定義からもわかる様に此の二つの性質を何等かの形でそなえて居らねばならない――――完全にでなくてもよいがある信頼度である形で満足されている事が証明されて居られねばない。――事は明瞭であろう。それではどの様な方法で確かめられるであろうか。ここでは Reliability について考えてゆくことにしよう。

§2.　Reliability をしらべるのに通常
Spearman　Brown の公式

$$\gamma_{nn} = \frac{2\gamma_{\frac{n}{2}\frac{n}{2}}}{1+\gamma_{\frac{n}{2}\frac{n}{2}}}$$

又 Richardson and Kuder の公式

$$\gamma'_{nn} = \frac{n}{n-1} \times \frac{\sigma_t^2 - \sum_{i=1}^{n} p_i q_i}{\sigma_t^2}$$

が用いられている。此は如何なる意義をもつものであるかを統計学的に考えてみることにする。その前に記号の説明をしておく。

n個の問題を提出したと考える。これをある group（かりにT.G.と名づける）――このgroupは常に一定としておく、大さN人――に対してテストを行ったとする。今このn個の問題の中$\frac{n}{2}$個の問題群を二つにつくるものと考える。かうして二つの問題群のT.G.に対する相関係数をつくるとする。此が$r_{\frac{n}{2}\frac{n}{2}}$である。$r_{nn}$は$n$なる長さのテストの自己関聯係数と名づけられるものである。此はReliabilityを示す一つの指標である。次にうつる。

σ_t^2 はテストの点数を標識とした場合T.G.に関する分散である。なおテストはn題あり、各題は出来れば1，出来なければ0なる点数をあたえられるものとする。

P_i は T.G.に於てiなる問題が出来たものの比率 $q_i=1-P_i$ を示している。

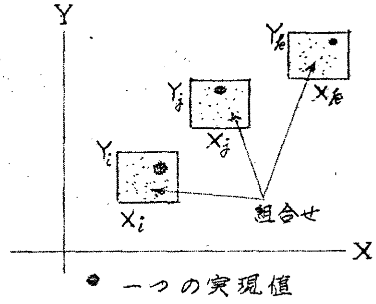
次にこの統計的ないみを考えてゆこう。

§3. Spearman Brown の公式について

n個の問題群を考える、此をT.G. group に対してテストする時常に一定の値をもつであろうか。もしもてば全くReliabilityあることになるのである。もしもたなければその各点数が一回毎に変って来る筈である。そのテストに対して各人の点数は一定の分布をもつことであろう。

今この任意の二つのテスト結果の組を（$X_i\ Y_i$）$i=1,\cdots N$とあわす。XYは何回も行ったすべてのテスト結果の組合せをとるものとする。（但し$X_i\ Y_i$は独立と考える）此の様に考えてくると（X_i, Y_i）を標識とするもの（抽出確率は同一）の母集団を考えることが出来る。この様な母集団についての相関係数が高いときReliability

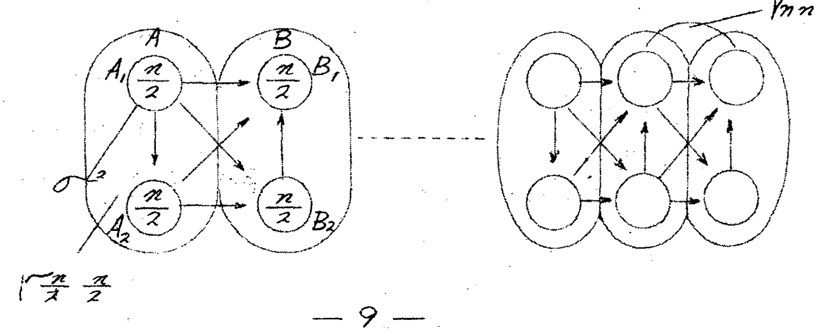
が大であると云い得るのであろう。——— 嚴密にはテスト Score の分布が正規分布でなければならないが ——— Spearman-Brown の公式は此の線に沿って考えられたものである。



此の様に Reliability を字義通りしらべたいと思うならば同一問題を同一個人についてテストを行えばよいと考えられるのであるが、此では前の履歴効果がのこり眞に我々の得たいと思うものを得ることが出来ない。そのために問題を任意に二つに分けて此の様なものをつくったのである。此の公式は統計的にいかなる意味をもつのであろうか。

$\frac{n}{2}$ なる長さの問題について $r_{\frac{n}{2}\frac{n}{2}}$ を出したとする。(同時に $\frac{n}{2}$ なる問題についての分散が計算される。)此の様に考える時、n 個の問題を出題した時の r_{nn} は如何に求められるであろうか。

Brown の公式では $r_{\frac{n}{2}\frac{n}{2}}$ が(一つの Sample の値が)Population の値としてすりかへられているのである。この公式が一般的意味を持つなら、即ち $\frac{n}{2}$ なる長さの問題の分散が等しく相関係数がすべて $r_{\frac{n}{2}\frac{n}{2}}$ である様な問題の Group を考えるのである。此の様な任意の問題(長さ $\frac{n}{2}$)が二つ合されたものが n 個の問題であると考えるのである。(n 個の問題を $\frac{n}{2}$ と分割して $r_{\frac{n}{2}\frac{n}{2}}$ を計算したのであるから!)。



此のとき　A, B なる長さ n の相関係数 r_{nn} は

$$r_{nn}=\frac{E(A_1+A_2-\overline{A_1}+\overline{A_2})(B_1+B_2-\overline{B_1}-\overline{B})}{\sigma_{A_1+A_2}\ \sigma_{B_1+B_2}}$$

$$=\frac{4\,r_{\frac{n}{2}\frac{n}{2}}\,\sigma^2}{2\left(1+r_{\frac{n}{2}\frac{n}{2}}\right)\sigma^2}=\frac{2\,r_{\frac{n}{2}\frac{n}{2}}}{1+r_{\frac{n}{2}\frac{n}{2}}}$$

となるのである。

もう一度此の公式の意味をもつ條件をくりかへしておこう。(1) n 個なる問題は (2) の條件をみたす $\frac{n}{2}$ 個の問題群の和として考えられる事 (2)其等二つの $\frac{n}{2}$ 個の問題の T. G. を通しての分散は夫々すべての *trial* を通して常に一定であり、且相関係数 $r_{\frac{n}{2}\frac{n}{2}}$ も亦すべての *trial* を通し常に一定であること（*error* の程度が完全に測定されていると云う事）である。

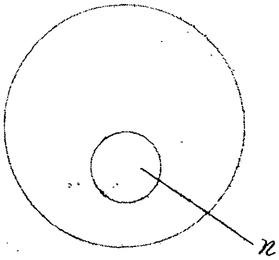
此の時はたしかに n個の問題の *Reliability* は計算されるが果して此でよいであろうか。

(2) の條件はみたされることはなく $\frac{n}{2}$ の問題の *Split* の仕方でも変ってくることがわかることであり（*Reliability* すくない方の問題が一方にかたまったり平均したりする等の事により）又同一問題を個人に何回もくりかえしテストしてみた時、その間の相関係数、分散の等しいと云う事は全くの架空的なことであり、理論的にも許容せられるものであるとは考えられない。此の点疑問なきを得ない所である。当流儀で最初に述べた *Reliability* は測定せられるであろうか？　最初に述べた *Reliability* は抑々測定せられるものであろうか。

此の問題は一応そのまゝにして次の公式の解説にうつろう。

§4. Richardson and Kuder の公式

問題 Source



n 個の問題

此の公式の立場は前と全く異りその Reliability の意味する所も大いに異って居るのである。

「ある知ろうとすること」を調査する必要な諸問題を考える。此の各に等しい抽出確率をあたえて問題 Source 母集団を考える。(近似的に無限母集団) これから n 個の問題群を抽出して此に操作を加えたもの、即ち一つの問題群母集団を考える。此の標識は T.G. group を通しての得点の Pattern である。此の公式は T.G. Group を通して得た此等問題群の中の得点 Pattern に於て i, j なる問題の T.G. 各に関する相関を ρ_{ij} とし言わば $\left(\frac{1}{2}n(n-1)\right)^{-1}\Sigma\rho_{ij}$ が高い事を Reliability あると云う事を根本思想として持っているのである。即ち問題の内部相関(i 問題出来るものは J 問題も出来る等ということ)の平均が高い事を Reliability あると云っているのである。さて此の式の誘導及びその制限を考えてみよう。n 個の問題をテストした時此の分散を σ_F^2 とする。さて Reliability 係数 γ として全体のちらばり方 σ_F 一定の下に於ける一種の ρ_{ij} の平均

$$\gamma = \frac{\frac{n}{n-1} E \sum_{i \neq j} \rho_{ij}\sigma_i\sigma_j}{\sigma_F^2}$$

を考えることにしよう。此の γ は

$-1 \leqq \gamma \leqq 1$ の間にある。因に $\rho_{ij} = 1$ とするならば

$\sigma_i = \sigma_j = \sqrt{pq}$ となるのである。したがって

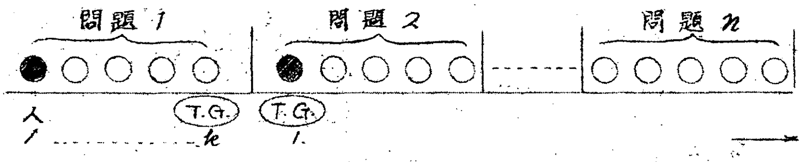
$\sigma_F^2 = n^2 pq$

故に $$\frac{n(n-1)\frac{n}{n-1}pq}{n^2 pq} = 1$$

となるのである。

但し σ_i, σ_j は i 問, j 問の T.G. を通しての分散 $p_i q_i$, $p_j q_j$ を示すものとする。さて母集団を制限し σ_t 一定であるもの丈に限って話をすすめることにしよう。

さて、



の図式をみて Systematic Sampling の考えをつかうならば

$$\sigma_{\bar{y}}^2 = \frac{\sum \sigma_i^2}{n^2} + \frac{1}{n^2} \sum\sum \rho_{ij}\, \sigma_i\, \sigma_j$$

となる。

$$n^2 \sigma_{\bar{y}}^2 = \sigma_t^2 \quad \text{であるから}$$

$$\sigma_t^2 = \sum_{i=1}^{n} p_i q_i + \sum_{i \neq j}\sum \rho_{ij}\, \sigma_i\, \sigma_j$$

となる。さて $\sum\sum \rho_{ij}\sigma_i\sigma_j$, $\sum p_i q_i$ なる Value の母集団のあたいを知ることが我々の知りたい γ を求めることになるのである。

n 個のサムプルから母集団のそれらの偏りのない推定をつくるとするならば

$\sum p_i q_i$ の推定は $\sum p_i' q_i'$

$\sum \rho_{ij}\sigma_i\sigma_j$ 〃 $\sum \rho_{ij}' \sigma_i' \sigma_j'$

となる。さて我々の場合 γ の推定は

$$r = \frac{\frac{n}{n-1} \sum \rho_{ij} \sigma_i \sigma_j}{\sigma_t^2}$$

であるから結局

$$\sigma_t^2 = \sum p_i' q_i' + r \frac{n-1}{n} \sigma_t^2$$

$$r = \frac{n}{n-1} \frac{1}{\sigma_t^2} \left(\sigma_t^2 - \sum p_i' q_i' \right)$$

を得るのである。

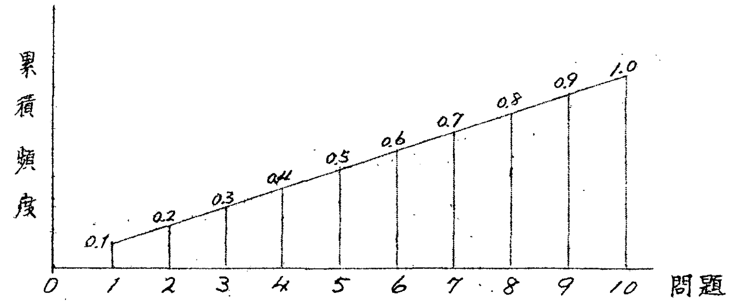
即ち　此処で述べられた r は問題群より抽き出された n 個の問題の Sample から全問題群の云はゞ Reliability の推定をあたえているものと考えられるのである。なお全問題群の大さ即ち n 個である場合も同様その係数は Reliability の程度をあたえていると考えてよい。

此の r の意味は Brown の公式の意味するものと全く異っているのである。Brown の公式で Reliability 1 であるものであっても（最初に述べた定義 Reliability ）この公式では Reliability 1 とならぬのである。こゝで 1 となる時は T.G. が満点か〇点かの二つの group にわかれねばならないのである！此は定義の Reliability とはその考が異るものある事は注目すべき所である。即ちこ r は前のいみの Reliability と出来不出来の二つに分れる（出来るものは出来、出来ぬものは出来ぬ）程度即ち問題に難易性の存在する程度をも混合した形であらはしていることになるのである。

例をあげておこう、

Sample を 100, 定義の意味の Reliability は 1 としよう。

問題は 1 から 10 まであり、その累積頻度が



によってあたえられるとしよう。

その時このものの平均は 5.5 σ_t^2 は 8.25, $\Sigma pq=1.65$ となり、$\gamma = 0.89$ となる!

二つの係数のいみする所が全く異り本§の係数は問題の難易が Reliability にきいてきているのであり、真の意味の Reliability に対する目安としての係数としては疑いなきを得ない。

§5. Sampling 理論の立場から見た Validity と Reliability.

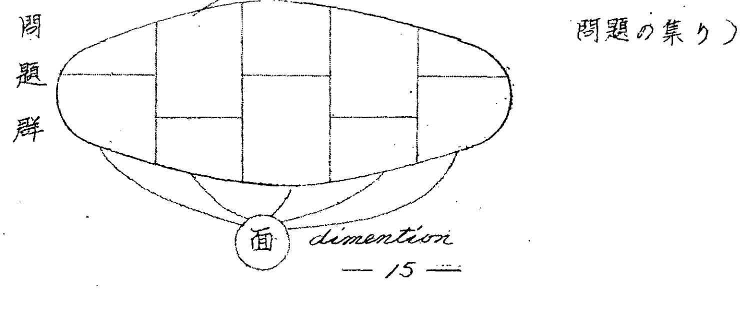
§3, §4, で述べた二つの公式では Reliability をあらはす係数としては充分でないと思われるのである。こゝでは Sampling 理論の立場から二つのものをどう表現出来るかを考え新しい係数をつくり、それをしらべる方法をうちたてるよすがとしよう。

『調査しようとする内容』を完全に調べるに必要な問題のすべてのあつまり —— 此丈しらべれば完全に充分であるとの! —— を考えよう。しかしすべての問題を調査する事は実際的に不可能で

ある。此からしかるべき問題を抽出しテスト問題を構成するときいかなる信頼度が確率論的に保証せられるであろうか各問題に等しい抽出確率をあたえて母集団を構成しよう。さて問題群にはいろいろの dimention のものが含まれているからまづその dimention を分けてみよう。即ちしらべるべき面を分けて此の面を調べるには、此の種の問題が必要であるという事を考えてその立場から問題群を分類し同一の dimention をもつ問題を集めて層をつくるのである。その問題の標識はある人にテストしたとき、反応する点数であるとしよう。

此の様に同一 dimention に属するもの丶みをあつめて層をつくることがまず必要な事である。かうする事に依って調査すべき dimention も明確になるし、テストの点数と云うもの丶内的な意味も明らかになるからである。

同一 dimention に属している問題群を以てテストを構成したときその各問題の点数の合計というものは大いに意味があるのであり、此が尺度値と了解せられてよいものである。dimention が異る問題群がテストにあるとき両者の点数の合計は深い意味をもたなくなるのである。dimention の異るもの丶綜合は更に高い立場、内的な立場、テストは何の為に行きそれによってどの様な有用の基準をあたえられるかと云うことを反省する立場からなされねばならぬのである。此が正当に行はれぬときテストは Validity を失うのである。此はさておき本題に戻り、順次に説明してゆこう。



次に以上の様にして得られた各層の中をさらに層に分けよう。その問題をある人 A にテストした時、それが常に同一の点を示す（あるいは分散が小）ものと、大きな分散を示す層とに分けよう。さて各層のウエイトがあらかじめ前に述べた様な立場からきまっているものと考える。その時各層から問題を n_i 丈抽出し、ある人 A にテストし、そのウエイトつき合計点あるいは平均 $\bar{x}$ をもとめ、全問題に対する我々の真に知ろうとする平均点数 $\bar{X}$ を推定する事を考えよう。此の事がつまりテストの意義であり、ねらいである事は直に首肯し得られることであろう。

この様なテストによる合計点 x は問題の出し方によってうごくことであろう。しかし $E(\bar{x}) = \bar{X}$ となるとき、その様なテストは *Validity* あるテストであると云えるであろう。即ち $\bar{x}$ が $\bar{X}$ の偏りのない推定値となっている時、そのテストを *Validity* あるテストと云えるであろう。

出題である面が等閑に附されるならばその様な問題が *Validity* なき事は当然であろう。

ある面が調べにくいからと云ってその種の問題をぬかすならばテストは *Validity* ないものとなって了うのである。*Validity* あるテストを行うためにはさきに述べた様に問題群の *dimention* 分けを完全に行いそのすべての *dimention* からテスト問題を選び且つ前述の意味で正しいウエイトがつけられねばならぬであろう。

次に $\bar{x}$ の分散を考えるのである。

此の分散は二つの部分に分けて考えられる。即ち一つは層に含まれている問題の難易によって生ずる分散、他の一つは各問題の反応の浮動性（*error*, *mistake* 等）によって生ずる分散である。（後者が所謂此処で最初に述べた *Reliability* をあらわす！）

今簡単のため一つの層を固定し *Sample* の平均 $\bar{z}$ の分散を

かいてみるならば（m個出題）

$$\sigma_{\bar{z}}^2 = \frac{\sigma_1^2}{m} + \frac{\sigma_2^2}{m}$$

となるのである。　σ_1^2は難易による分散

σ_2^2は浮動性による分散

である。此からわかる様に出題の数によって$\sigma_{\bar{z}}^2$の大さは左右されるのである。この$\sigma_{\bar{z}}^2$　或は又$\bar{z}$の分散が真の意味でReliabilityをあたえるものと云はねばならないのである。$\bar{x}$の分散を左右するのは主として出題数であることに注意しなければならない。それでは出題数を如何にするか、此は

$\sigma_{\bar{z}}$の大さによって（通常のSampling理論の様に）決定せらるべきものであろうと思う。

次に層のあいだの事を考えてみなければならない。各層に問題をいかにふりわけるべきか。σ_1, σ_2の小さい層では問題数がすくなくてもよいであろうし、σ_1, σ_2の大きい層即ち難易性に大いに差があり、浮動性の大きい層（dimention）では数多い問題を出さなければ全体の$\sigma_{\bar{z}}$は小さくならぬのである。即ちいろいろな層を合せたテスト問題による平均$\bar{x}$の分散$\sigma_{\bar{x}}$が小にならぬのである。

i層の中の平均$\bar{x}_i$、ウエイトをp_iとすると推定は

$\bar{x} = \sum p_i \bar{x}_i$　によってあたえられるから

$$\sigma_{\bar{x}}^2 = \sum p_i^2 \sigma_{\bar{x}_i}^2$$

となる。

$\sigma_{\bar{x}_i}^2$　は　$\bar{x}_i$の分散

$\sigma_{\bar{x}}^2$ は $\bar{x}$ の分散

である。

此を考えれば $\sigma_{\bar{x}}^2$ は P_i と $\sigma_{\bar{x}_i}$ の大さに関係しているからこの様には単純には云へぬが P_i $\sigma_{\bar{x}_i}$ の大さ、ウエイトと分散によってきまる事を考えて普通のサムプリングの問題の様に各層への問題が決定されねばならない。

以上の様に考えると

Validity は推定の *umbiased* 性

Reliability は推定の分散の大さ

によって測られることになるのである。

此の二つは準備調査によって充分推定され出題を *Sampling* の考えを用いて ——— 此処に示した図示のみではない！——— 規整するならば二つのものは §3, §4 に述べたものよりさらに合理化されることであろう。

参　考　文　献

此の種の *Reliability* をかいてある文献としては

J. P. Guilford　Fundamental Statistics in Psychology and Education (1942) Mcgraw Hill,

D. C. Adkins　Constructions and Analysis of Achievement Test 1947

があげられる。

第三章 ValidityとReliabilityとに関する特殊問題 II

此処では又一つの特殊問題、所謂多岐選擇方式テストにおけるデタラメ回答について考えてみようと思う。現在客観性があると言はれている此の種のテストが流行している以上見逃せぬ問題であろう。

此に関して考えたことをのべてみよう。なお以下のIIIは国立教育研究所員島津一夫氏との協同研究になるものである。

"Multiple choice 式テストに於けるデタラメ回答について I"

此の方式のTest ではTest 問題を眞面目に考えずRandom に○印をつける事によって相当の成績をあげうる事が考えられる。此の全体に及ぼす程度はどの位であろうか。例をあげて検討してみよう。

Multiple choice の選択肢は5で問題数は60とする。

Random に5つの肢から一つを選んで○をつけるとすると正しい答に○のつく確率は $\frac{1}{5}$ となる。此が60題あるとすると正しい答の出る確率分布は

$$g(r)=\binom{60}{r}\left(\frac{1}{5}\right)^{r}\left(\frac{4}{5}\right)^{60-r}$$

となる。rは正答の数。此の分布の

平均 12.0

標準偏差 3.1 となる。此の分布は理論上からいっても normal 分布に近いので At Random に○をつけたとき、その中

0.14 %のものは	21点以上に	
2.3 %以上のものは	18	〃
15.9	15	〃
50	12	〃

となることになる。

此と同様な状況がX年のYなるテストにあった。此の実際のテストの結果は

平　均	22.4
標準偏差	6.6

であった。 at Random のみ回答との比較は興味ある。さて

次に60題の中 l 題は実力で行い（それは全部正答とする）あとは at Random に○をつけるとするとどうなるか。

l題の実力のものがl題をやり、あとは at Random に○をつけたとするときそのようなものゝZ%のものが$\varphi(l)$点以上の点をとるとするとき$\varphi(l)$は次の式によってあたえられる。

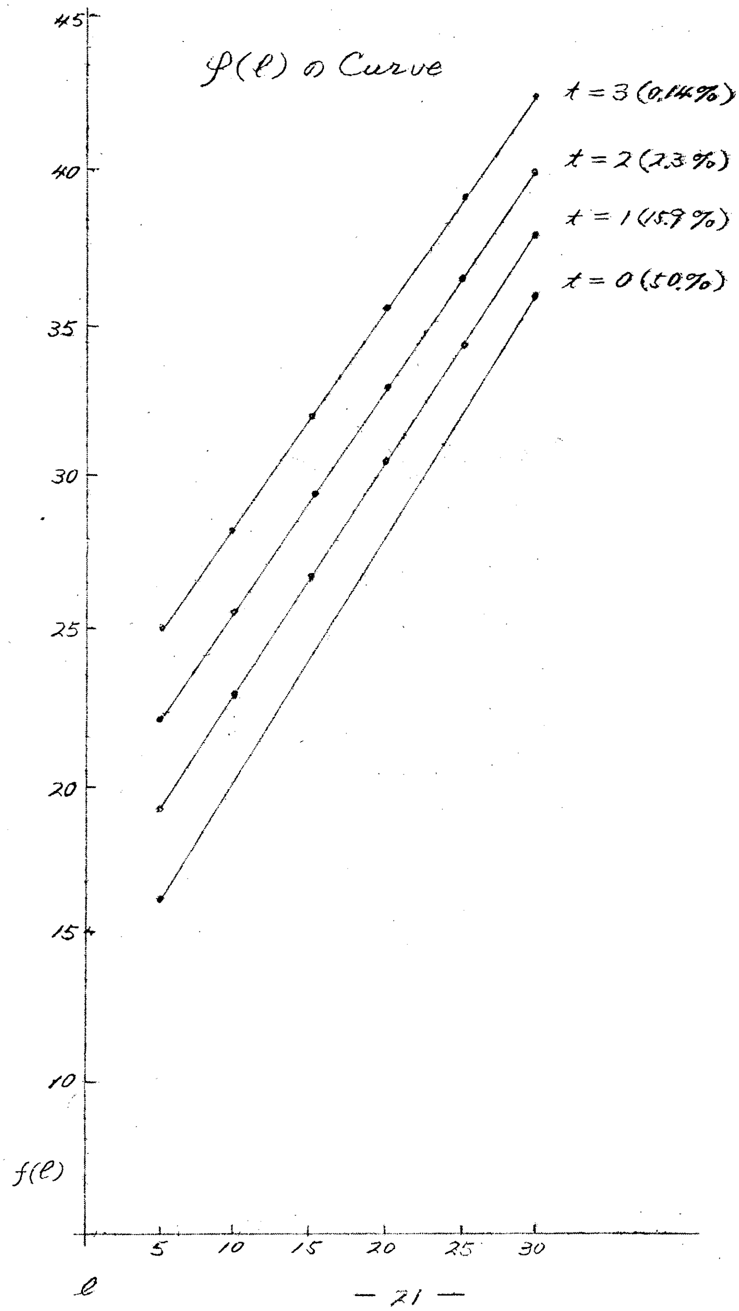
$$\varphi(l) = l + \frac{1}{5}(60-l) + t\sqrt{(60-l)\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{4}{5}}$$

なお t は Z の 函数であり

Z = 50% なら	$t = 0$	
Z = 16% なら	$t = 1$	
= 2.3 〃	$t = 2$	
= 0.14 〃	$t = 3$	となる

$$\left(Z = \frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^t e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt \right)$$

この $f(\ell)$ と t と ℓ との関係は次に示すとおりである。



此の様にするとき

実力20題のもゝ中15%は31題以上の成績をあげうると言うことになる。実際のテスト結果とにらみあはせるとき十分考えねばならぬ所であろう。

又デタラメ回答者のあるときある集団の平均をサムプリングによって推定するなどと言うとき、*mean Square Error* を考えねばならぬが、相当の注意が必要になってくる。此は今別にはのべない。

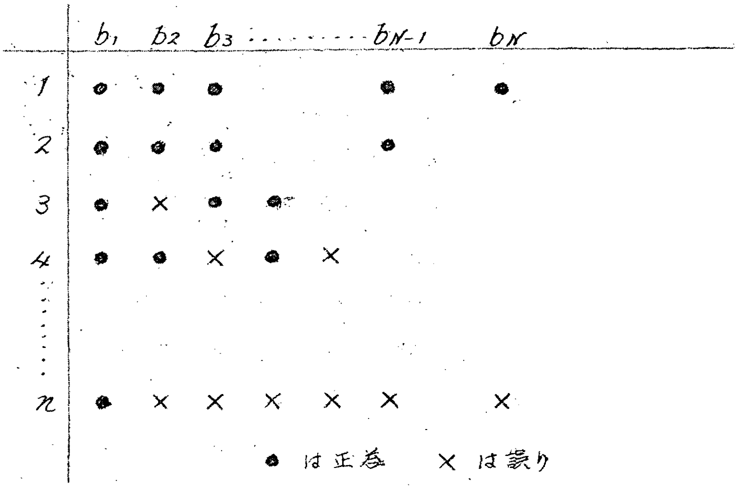
"*Multiple choice* 式 *Test* 問題における デタラメ解答について II"

Multiple choice 式 *Test* 問題におけるデタラメ解答は結果に大きな影響を与えるものであり、注意を要すべきことはさきにのべた通りである。從って何等かの方法によってデタラメ解答を識別し、これを出来うる限り除外しなければならないことは言うまでもない。以下統計的意味において、信頼度を保証し得るという立場に立ってデタラメ解答を識別し、これを出来うる限り除外する一方法をのべてみよう。この方法の特色は問題群を一次元的なものとなし、さらに配列を易しいものから難しいものへの順にして解答の *random* 性を発見するにある。

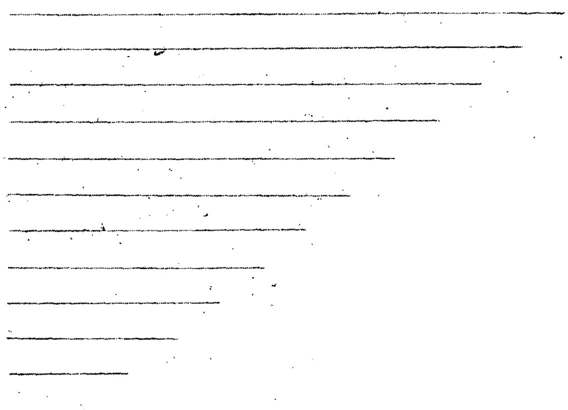
§ 問題の選定とその配列法

まづ問題を精選し、その配列を考慮しなければならない（統計的立場から！）。このため *Pre-test* においてこのため *Pre-test* を行って問題を選定し、それから難しい順に配列することが必要である。いま *Pre-test* において n 人の *random sample*（本調査を企画する時の対象たる *population* からの）N 個の問題を与えたとする。これを $a_1, \cdots, a_n$ とする。a_i で正解を得たものを n_i 人とする。そこで $\frac{n_i}{n}$ の大きさの順に問題

を配列するものとする。このようにすれば問題は第一次の意味で難しさの順 $b_1, \cdots\cdots b_N$, にならんだことになる。しかしこれ丈ではまだ不十分である。つぎに、n人を成績のよいものの順にならべて次の様な図を作ってみる。



もし問題が眞に難しさの順にならべ、かつ一次元的なものであれば下の図のような模様を呈することであろう。



しかし実際は問題は難しさの順にならんで居らず、且つ一次元的性質をもつものばかりでないであろうから得点の Pattern は錯雑していることであろう。我々としては検定を用いある保証された信頼度の下で難しさの順にならび且つ一次元的な問題を選出する様にしなければならない。つまり出来うる限り上図の様な理想型の美しい pattern を得るようにしなければならない。（これが発見法の鍵である）

さきの図で問題 b_1 を固定し縦にながめるとき、もし問題が適当ならば、●●●●●××××× という様な系列になっている筈である。しかし実際は●●●●×××●●××××●●×××となっているであろう。この●×との系列が Random に出現していないということをもって，いいかえれば一定の傾向をもつということ、問題選定の規準としてみよう。もし系列の配列が Random であるならば Poor の方の Sample にも難しい問題ができることであり、Good の方の Sample にも易しい問題ができぬことがあり、これがいりまじっているのでは、問題の難易度はできるできないの判定点たる總点数に対して一概に決定出来ぬことになり、これから結論されることは、問題が n 人の Sample に対してむずかしさの順にならんでいるのでないか、或いはこの問題が全く次元のことなるものであるかのいずれかである。したがって規準の意味は明らかであろう。なおこの様な規準を用いて random 性が否定されないときは、その問題は除外し一次元的なもの丈を残すことにする。除外されたものは前群と別に取扱い、その中で又一次元的なものをみつけ出すことを行ってゆくことにする。最初の問題から一次元的な問題群をいくつか構成する手続を繰返す。次元のことなるものは全く別個にとりあつかわねばならないことは注意しておかう。われわれは同一次元のものに対してだけ内部操作によって（調査結果の組合せ、分析、總合）種々の客観的結果をうるのであるが、次元のことなるものに対しは主観的たらざるをえない（しかしこの主観を多くの人々に対して総合する——即ち一つの

社会判断を作る —— 方法には *Louis Guttman* の *paired comparison* なるすぐれた論文はあるがいまこゝではのべない。)

それでは規準を検定する方法は何であるか、つぎにその二つをのべてみよう。

(i) 系列に一定の傾向を認める方法

まず下向の傾向について話をすゝめてみよう。(難しい問題、高得点のものに出来、低得点のものにはできないという傾向をみつけること)

$X_1, \cdots\cdots, X_n$ をある数値の系列とする。

$X_1 \longrightarrow X_n$ に下向きの傾向があるか。

X_i と X_k とをくらべ、$i < k$ なる i, k について行う。$i<k$ ならば $X_i < X_k$ であるような数を T とする。これをすべての $i<k$ なる i, k について行う。$(i=1, \cdots n \quad k=2 \cdots n)$ このような比較の総数は $\frac{n}{2}(n-1)$ である。

$X_1, \cdots\cdots X_n$ が *random* に配列されている。即ち

$$P_r(X_i > X_k) = \frac{1}{2}$$ と考えて総計量 T の分布函数をつくる。

このようにしてできた分布から計算し検定に必要な数値表即ちそれに関する $T \leqq \bar{T}$ の表をつぎにかゝげておこう。

これは H.B. Mann の論文によるものである。

(*Non-parametric Tests against Trend; Econometrica 1945*)

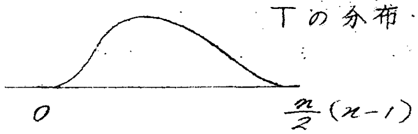


Table X

Probability of obtaining a permutation with $T \leqq \bar{T}$

Permutations of n variables

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
3	167	500	833																			
4	042	167	375	625	833	958																
5	008	042	117	242	408	592	758	883	958	992												
6	001	008	028	068	136	235	360	500	500	640	765	864	932	972	992	999						
7	000	001	005	015	035	058	119	119	281	386	500	500	614	719	809	881	932	965	985	995	999	
8	000	000	001	003	007	016	031	054	089	138	199	274	360	452								
9	000	000	000	000	001	003	006	012	022	038	060	090	130	179	238	306	381	460				
10	000	000	000	000	000	000	001	002	005	008	014	023	036	054	078	108	146	190	242	300	364	431
P(c)	000	000	000	000	001	001	002	004	006	010	016	025	037	054	076	105	142	186	237	296	360	429

X Tabular values should be divided by 1000.

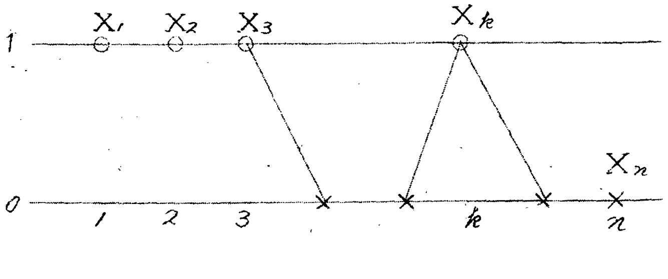
$$P(c) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{-c} e^{-x^2/2} dx$$

$$C = \left(\frac{n(n-1)}{4} - T - \frac{1}{2} \right) \Big/ \sqrt{\frac{2n^3+3n^2-5n}{72}}$$

When $n > 10$

この表はもし $Pr\{X_i > X_k\} = \frac{1}{2}$ ならば $\bar{T}$ より小さな T を得る確率を示すものである。即ち、この上向きの数が少なければ random という仮説は、ある信頼度を以て棄却され下向きの傾向が認められることが結論される。

我々の場合



X_i が1の時 $X_i \longrightarrow X_{i+1}$ を上向き　$X_i \searrow X_{i+1}$ を下向き

X_i が0の時 $X_i \longrightarrow X_{i+1}$ を下向き　$X_i \nearrow X_{i+1}$ を上向きと定義することにしよう

上のような系列で$X_i < X_k$ ($i < k$)の数をかぞえ表をみるとき信頼度90%あるいは95%で*random*性が棄却され下向きの傾向をもつということがいえることになる。得点の高いものから低いものに順々にならべた系列に下向きの傾向があるということはその問題が一次元的性質をもつことを示すものである。

しかしこの検定のみでは未だ不十分である。この検定によつて下向きの傾向なしといわれたものでも我々の目的にそつた下向きの傾向を示すものがありうる。――― それほど上の検定は厳しすぎるものである。――― これは我々の場合の上向き下向きの定義の不十分さに由来するものであるがこれは如何ともすることができない。従つて次に示すような(ii)検定を用いることが必要になつてくる。それではどんな場合(i)の検定がうまくゆかないか。

●●●●×××の様な時、明らかに下向きの傾向を示すが、$T=6$, $n=7$で下向きの傾向は認められなくなる。これは唯単にTの数だけを問題にした検定法の欠陥であるといえよう。しかし厳しいものであるから仮説が棄却されなかつたものについて次の検定法を用い、我々の目的に添つたものをひろいあげねばならない。なお上向きの傾向のものについても同様の議論が成立する（唯言葉をかえるだけでよい）問題が真に一次元的であり易しさの順にならんで居れば問題b_iのiの大きくなるにつれてTの値は上向き *random* 下向きの値を示すことであろう。この*random*が上述の様に問題なのであるがこの検定法はとにかく一定の傾向をもつのをまずあきらかにする方法

である。

(ii) 二つの標識の出現が random であるかどうかを検定する方法（run の検定）二つの標識を ●× とする。●× の系列を ●● ××× ●● × ●●●● とする。●× の数を n とする。●の数を n_1, × の数を n_2 とする $n_1+n_2=n$

i 個の同一標識がならび、この前と後には異なる文字がならんでいるとき、それを長さ i の run とよぶ。上の例では

$$n_1=8,\quad n_2=4$$

run の数 $\left\{\begin{array}{l} \text{● について 3（長さ2のもの二個, 4のもの一個）} \\ \text{× について 2（長さ3のもの一個, 1のもの一個）} \end{array}\right\}$ 5である

n_1, n_2 を知った上でその配列が random であるかどうかを知るためには run の数がその index となるであろう、即ち run の数が少ければ一般にその出現は random でないといえる。たとえば ●●●●●●●●● ×××× と出れば勿論 random でないといゝたいところであろう。このことを検定論の立場から云わねばならぬ。このため n_1, n_2 を知った時その出現が random とするならば run の数 u は如何なる分布をもつか算出しなければならない。

これは組合せの理論から簡単に計算出来る。この分布を用い u を知るとき、ある信頼度で標識出現の random 性の棄却を行うことができる。我々の場合にあてはめれば、正解答、誤りの出現（高得点のものから順に低得点のものへとならべた系列における）が random であることを棄却することができる。この分布の表は

Tables for testing randomness of grouping in a sequence of alternatives, By F. S. Swed & C. Eisenhart.

(Annals of mathematical Statistics 1943. Vol. XIV, No1)

に示されてある。この表は n_1, n_2 を知った時 run の数 u' に対して $Pr\{u \leqq u'\}$ を与えたものであるから，実際の系列から u' を計算し有意水準をきめて検定を行えばよい。この検定法は高得点のものから低得点のものへ順にならべられた系列で ●× の出現が systematic であることを発見しようとするものである。したがってこの検定を用いると，(高) ●●●●××××●●●● (低) というようなものも systematic の domain に入ってくることになる。この時は我々の目的にそわないから(i) を用いた後(ii)を用うる主旨にそって ●●●● ×××の様なものだけひろいあげる様に注意しなければならない。これによって(i)の終りにのべた"random"が救われることになる。

なお、仮説が棄却されぬとき問題は一次元的であるとはいえなくなるものと考えてよい。

こゝで問題の選定法を要約すると。

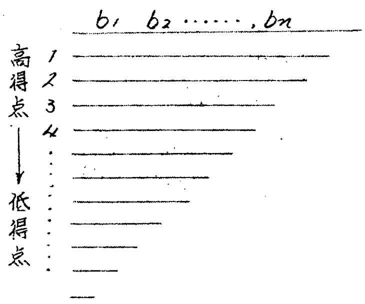
まず各問題を難易順にならべ、つぎに高得点者から低得点者の順にならべ正，誤解答の pattern をつくる。しかる後、検定(i)(ii) を用い一次元的でないものを除外する。(除外したとき，点数をつけなおし pattern をつくりかえる)その後、再び又検定(i)(ii) を用いて check を行う。この様にしてゆけば、$\frac{n_i}{n}$ の順にならび且つ一次元的とみとめられる問題群をうることになる。

除外されたものはその中で同様の手続をくりかえし一次元的な問題群をつくる。しかしこれらを同一にしてはいけない。

(注)　検定法で(i)(ii)の順を逆にしてもさしつかえないがその時は検定する対象もまた逆になる。

§2. デタラメ解答の発見法

§1のようにして問題は systematic に配列されたことになる。真面目に解答すれば



左のような系統だった美しい pattern をうるであろう。(これは ideal type であるが §1 の結果ほゞこれに近いものを得るであろう。)

解答がデタラメであるものは

b_1　b_2　b_3　b_4　　b_{n-1}　b_n

●　×　×　●………×　●

のような系統だたぬ系列をくりかえすであろう。これは「systematic な配列」のワナにかゝった random の姿であろう。しかもこの systematic の配列は予知できぬと思われるし、予知できてもこれをのりこえる方法は考えられない。それならばデタラメ解答は如何なる立場で見出されるか random は random によって報いられるのである。これには run の検定を用いればよい。即ち正解答の出現が random であるか否かを見出す run の検定を用いればよいのである。 b_1, ……, b_n のものについて run の検定を用いてもよいが、さいしよに × 印のついた後の系列について run の検定を用いるのが effective であろうと思われる。何故ならばこれによれば出来るところまで正しく解答し、後は random に解答するというものまで発見出来るからである。(この様なものはやさしい問題から手をつけると思われるので問題に対して ――――

●××●×………●×●のような pattern をえがくであろう)

systematic な解答者は ●●●● ××××●●●● の様な *pattern* がありうると考えられるが実際は問題は難しさの順に配列されているから *run* の少いということは ●●●●●● ××××の様な系列であることをましていると考えられることを注意しておこう。

§3. この方法 成否は §1 にかかっているのであるから問題の一次元化難易の順の配列には特種の考察が必要でありなお多くの研究を必要とすると思われる。この方法の主旨は毒を以て毒を制するという所にある。以上の方法の欠点は勿論第二種の誤差を無視しているところにあるが *Test* 構成の点からみてこれを問題にすべきところは少いであろうと思う。

"多岐選擇肢式テスト問題におけるデタラメ回答についての一実験 Ⅲ"

§1. テストを作成しようとする時、*Test Item* の所謂 *discriminative power* については多くの場合に、*Item* の *good-poor Analysis* をするのが常である。しかしこれだけではまだ個々の *Item* に十分な *discuminative power* をもたせて、テストの目的に対して純粋な一次元的な性質をもたせることができるかどうか疑問である。*good-poor Analysis* によってもなお洩れているものがあるとすればそれをどんな方法でみつけだすかが問題になる。つぎに上のような手続によって残された一次元的な問題によってテストした時、しかもその問題が殆んど選擇肢法をとっている場合、解答の中からデタラメにやったものをみつけ出すことができるかどうか、ということをとりあげる。

第一の問題はテスト作成に際しての参考資料を与え、

第二の問題はデタラメ解答を発見する方法に関聯する。

以上の二つの点についての理論的な考察についてはすでに研究資料I（昭和24年9月教研）および研究資料II（昭和24年10月教研）において述べた。

こゝではこれらについての一実験についての経過をのべてみよう。

別紙の如きテスト問題、即ち

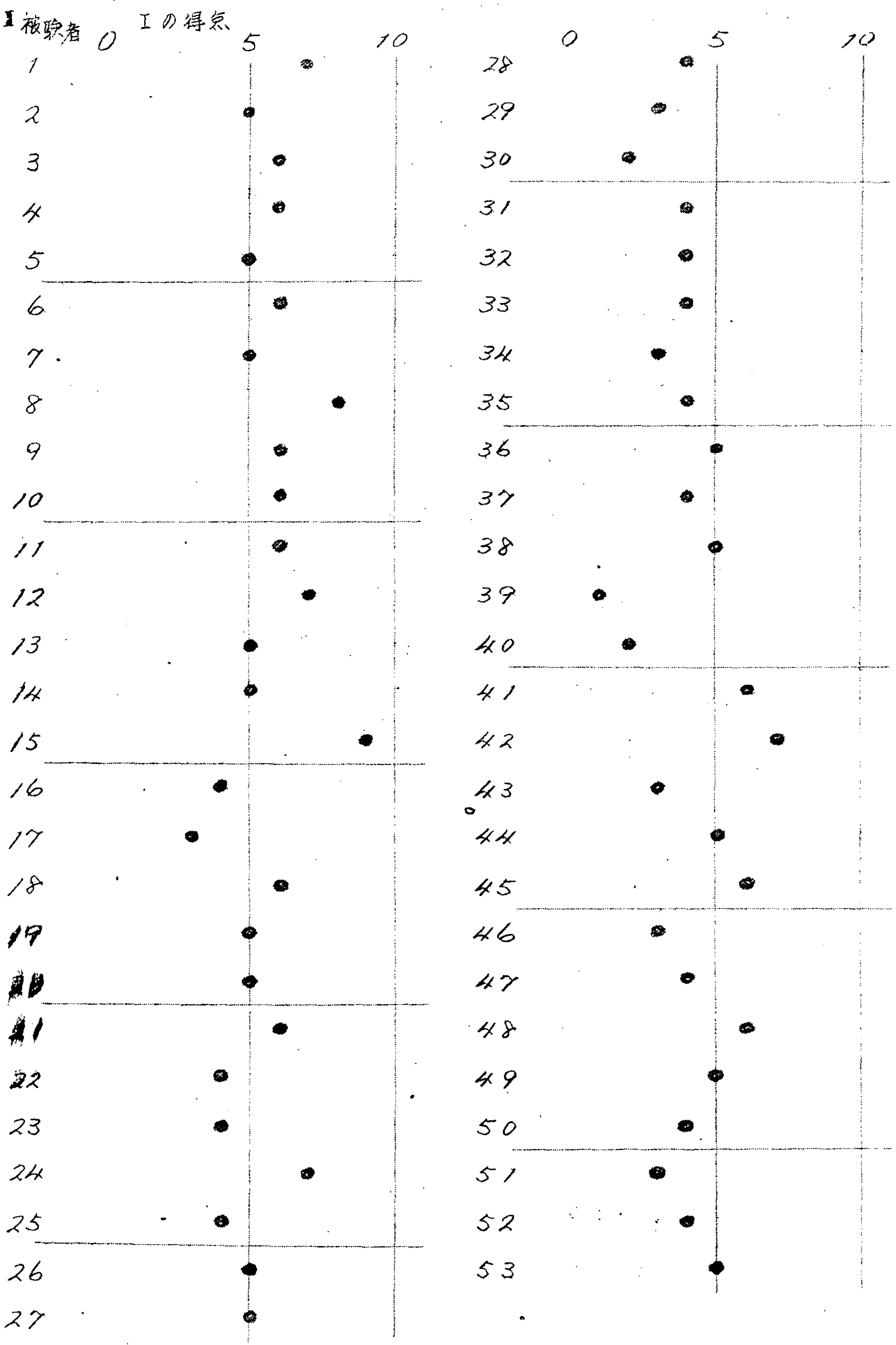
I	Completion	10題
II	Block	10題
III	Letter Grouping	20題
IV	Random Sentence	20題

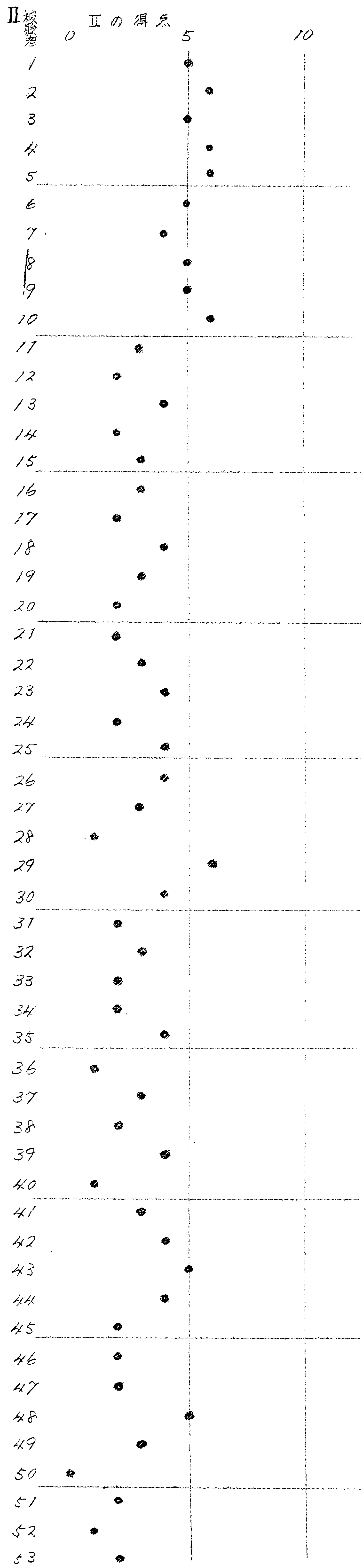
の如き構成のものを、某縣某新制高校三年生53名につぎのような時間配分で課した。

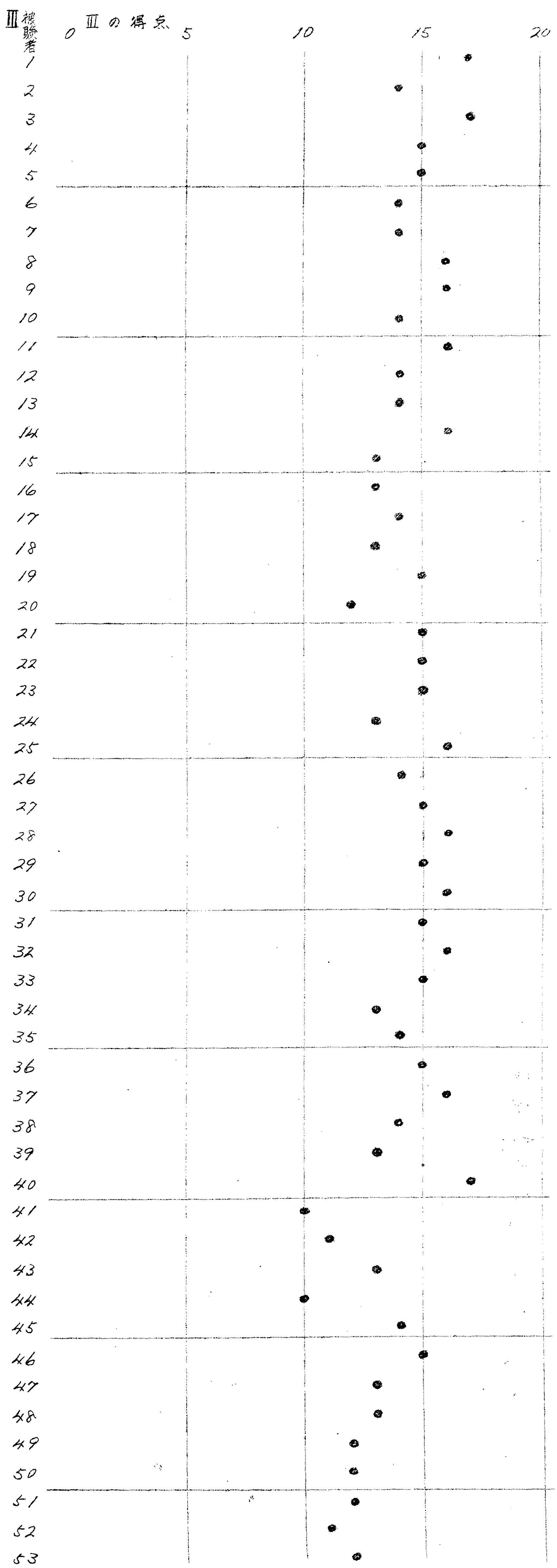
I	15分
II	20分
III	30分
IV	30分

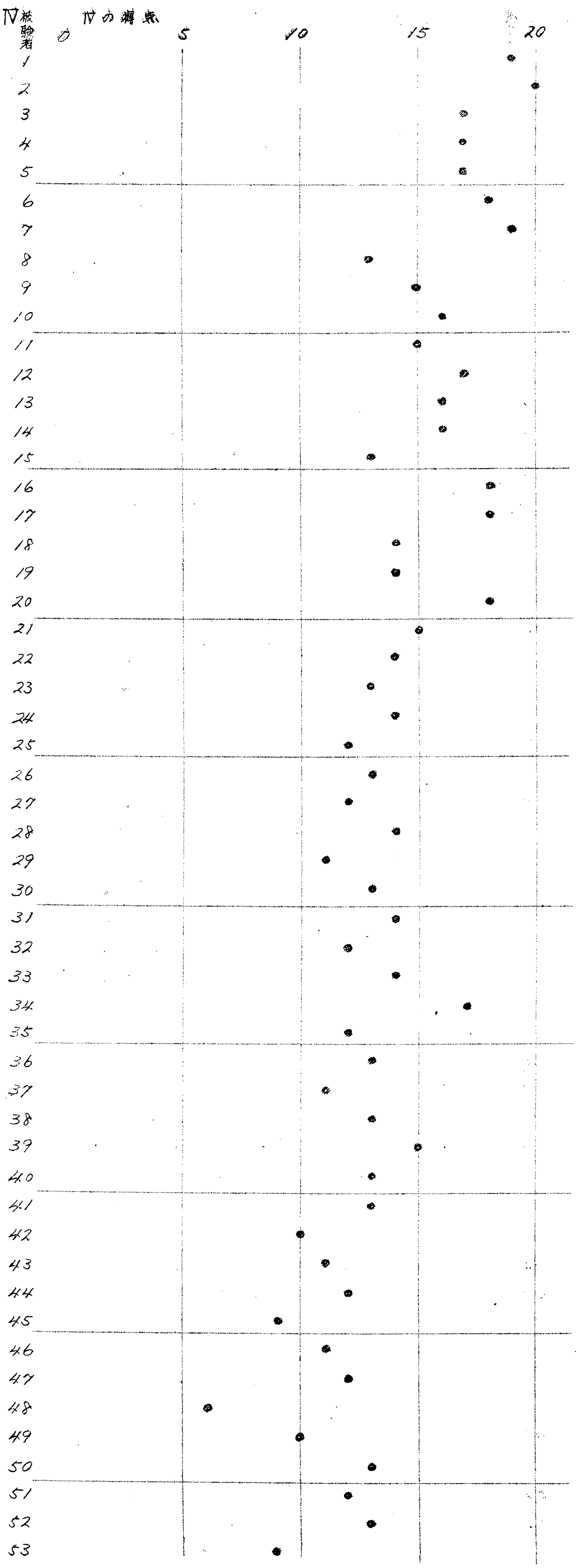
§2.

まず、各問題が一次元的なものであるかどうかをみるために、被験者全部を総得点順にならべコーネル尺度法（後述）の考えを用いてみた。此の結果は次ぎに示す通りである。


I 被験者
Iの得点
0
5
10

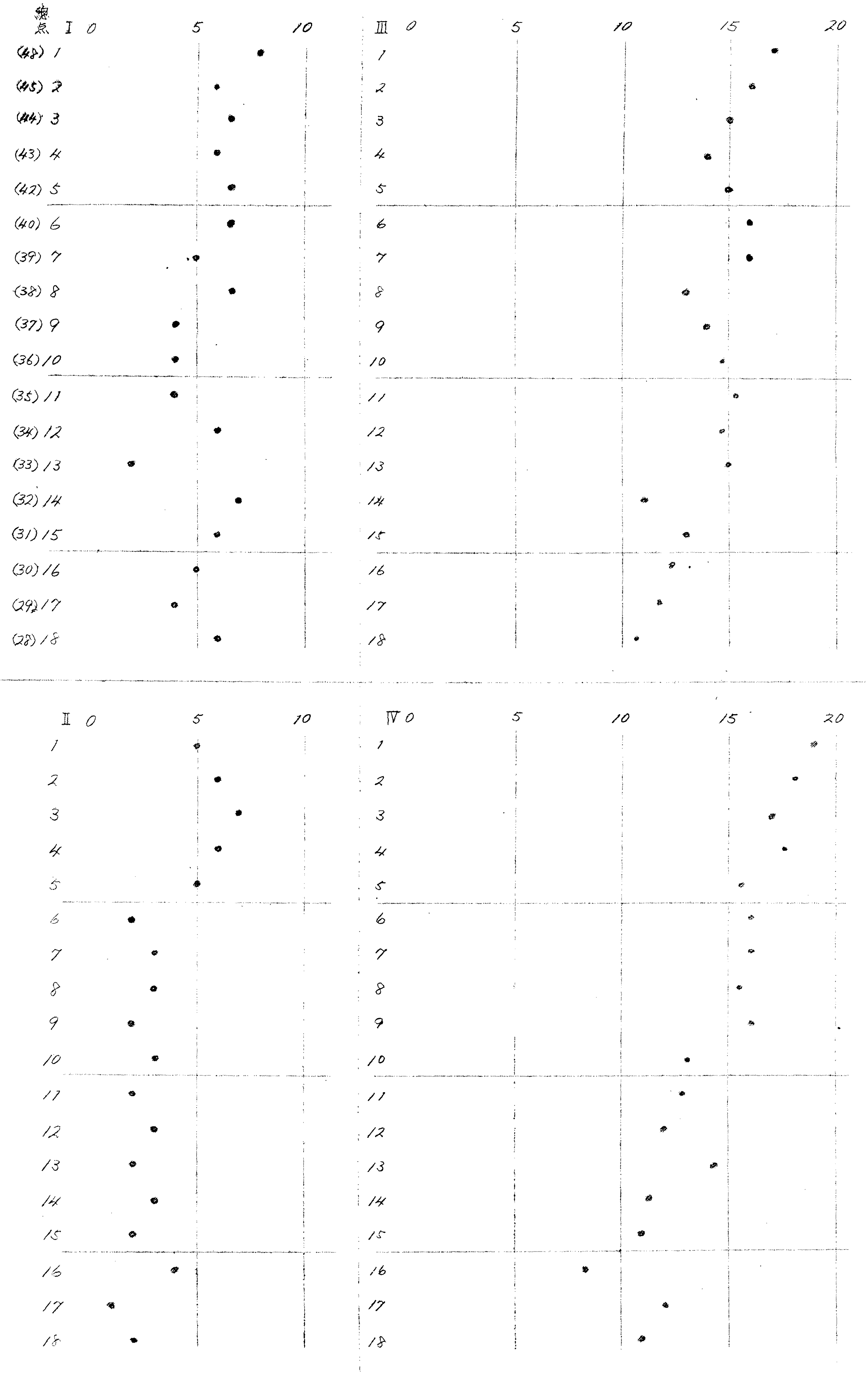

II 被験者
IIの得点
0
5
10
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30 31 32 33 34 35 36 37 38 39 40 41 42 43 44 45 46 47 48 49 50 51 52 53


III 被験者
IIIの得点
0
5
10
15
20
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30 31 32 33 34 35 36 37 38 39 40 41 42 43 44 45 46 47 48 49 50 51 52 53



IV 被験者
IVの得点
0
5
10
15
20
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14
15
16
17
18
19
20
21
22
23
24
25
26
27
28
29
30
31
32
33
34
35
36
37
38
39
40
41
42
43
44
45
46
47
48
49
50
51
52
53

同總点数の者を集めての問題毎の点数



これらをみると、各問題は一次元的なものとみなし得ないものと思われる。もし條件をゆるくするならば、ⅢとⅣとは一次元的な問題とみなしうるのではなかろうか。我々は一応ゆるい條件で考え、Ⅰ, Ⅱ, Ⅲ＋Ⅳについてつぎの分析にすすんでみよう。

§3.　Ⅰ, Ⅱ　および　Ⅲ＋Ⅳ

前の図について、次のような検定を用いて、各問題中の Item についてその一次元的か否かをしらべてみた。

(i)　G－P　テスト

テストの総得点について上位者15人をG群、下位者15人をP群となずけ、各 Item ごとに両群の正答者数と誤答（無答を含む）者数をしらべ χ^2－検定を用いた。

	G	P	計
正答者数	a_1	b_1	a_1+b_1
誤答者数	a_2	b_2	a_2+b_2
計	15	15	30

（a_1, a_2, b_1, b_2 は夫々 G, P群の正答者数，誤答者数である。）

とし，（G, P）と（正答，誤答）とが独立であるとの仮定のもとに2×2の χ^2－Test（C. S. Fisher, Yates の Statistical Table 参照）を行ったのである。χ^2 の値が大になり仮説が棄却されゝば（有意水準を5%とする）独立でない、即ちG群とP群の間で正答者数と誤答者数の分布に有意の差があるということになるであろう。

(ii)　下傾性テストおよび run のテスト

なお高いものの方からの下傾性テストと同時に低得点のものからみた上傾性の有無のテスト（全く同巧異曲）をもあわせ用いた。これは上向、下向の定義上二つを併用するのがより望ましいと思われるからである、なお、我々の場合 run のテストを用い結果を修正することはなかった。

もし Item が一次元的であり、うまく配列されてあるならば、(i)
(ii) のテストによる結果は例えば、

問題	易 ——————→ 難
G.Pテスト	＋ − − − − ＋ ＋
傾向テスト	↗ ↗ ↘ ↘ ↘ ↘ ↘ ↗ ↗ ↗ ↗ ↘ ↘ ↘

なる型をもつことであろう。

なお＋はG.Pテストで仮設の棄却できないもの、−は棄却できるものを示す問題のやさしい時はG、P両群ともに正答を得て差がなく、やゝむずかしくなるにつれて、GとPの間に差を生じ、さらにむずかしくなれば、G群も正答を得なくなり、再びG.P両群の間に差がなくなるのである。↗ は上向き ↘ は下向きの傾向、上段は高得点のものから、下段は低得点のものからの傾向を示すものである。上向き下向きの定義から当然 ↗↗ ↘↗ ↘↘ の型が順に生ずべきであろう。各各のテストを併用するときやゝ鋭い結果をうるのであって我々は

(＋↗↗) (−↗↗) (−↘↗) (−↘↘) (＋↗↗) の型、或いは (＋↗↗) (＋↘↗) (−↘↗) (−↘↘) (＋↘↘) の型

およびその順あらわれる以上のものはすべて除いていって上の型がその順に生ずるようにするのである。さらに鋭く考えれば (＋↗↗) (−↘↗) (＋↘↘) のみの型だけ残すのもよいであろう。この意味は説明するまでもないであろうが、前者についていえば (＋↗↗) はG.P両群に共通して正解答多き問題 (Item)、(−↗↗) は正解答数に差はあるが問題がやさしいため正解答数が多い時におこる (−↘↗) は正解答者数に差があり、出来るものは出来、できないものはできぬ Item
(−↘↘) は正解答者数に差があり、出来るものは出来、できないものは出来ないが、上の型の問題よりやゝ難しいため全体的に正解答の数が少いときにおこる。(＋↘↘) は共通して正解答少き Item をなしてい

る。

さて、I．II についての結果は

I Item No.	6	10	4	8	2	3	9	5	1	7
G.P. テスト	+	+	+	+	+	+	+	−	+	+
傾向 テスト	↗↗	↗↗	↗↗	↗↗	↘↗	↘↗	↘↘	↘↘	↘↘	↘↘

II Item No.	1	4	5	6	3	8	7	2	9	10
G.P. テスト	−	+	+	+	+	+	+	+	+	−
傾向 テスト	↗↘	↘↗	↘↗	↘↘	↘↘	↘↘	↘↘	↘↘	↘↘	↘↘

となり、I では 5 又は 9

II では 1 および10 が省かれることになるのである。

このようにして省略した結果はつぎのようになる。この模様（pattern）は除く前からみると左傾のよい結果を示している。

I. 5を除いた場合（○は正答 ●はランダム解答）

点数	受験者 \ 問	6	10	4	8	2	3	9	1	7		
	15	○	○	○	○	○	○	○	○			
	8	○	○	○	○	○	○	○		○		
7	24	○	○	○	○	○	○	○			06	
6	42	○	○	○		○		○		○	90<	
	10	○	○		○	○	○		○		88	
	3	○	○		○	○	○		○		88	
	7		○	○	○		○	○	○		64	
	9	○	○	○	○	○	○				02	
	12	○	○	○		○	○	○			35	
	45	○		○	○	○	○			○	64	
	41	○	○	○	○		○				35	
	11	○		○	○	○	○	○			35	
5	4	○		○	○	○		○			79	
	18	○	○		○	○		○			79	
	6	○	○	○		○	○				26	
	20	○		○	○			○		○	90<	
	49	○	○	○			○			○	50	
	26	○		○	○		○		○		90<	
	13	○	○		○	○		○			79	
	36	○	○	○	○			○			26	
	38	○	○	○			○	○			26	
	21	○	○	○	○		○				26	
	44	○	○	○	○		○				26	
	48	○	○	○		○	○				26	
	2	○	○	○	○	○					02	
	5	○	○	○	○	○					02	
	7	○	○	○	○	○					02	
	14	○	○	○	○	○					02	
	19	○	○	○	○	○					02	
	27	○	○	○	○	○					02	
4	52	○	○	○				○			26	
	33	○		○	○			○			79	
	16	○	○			○		○			79	
	31		●	●		○	○●	○●	○		02	50●
	53	○	○	○		○					26	
	25	○			○	○	○				26	
	35		○	○	○		○				50	
	37	○	○		○	○					26	
	32	○	○		○	○					26	
	47	○	○	○	○						02	
	23	○	○	○	○						02	8、
3	22	●	○	○	●		●	○			64	88●
	28	○		○		○					88	
	29	○			○					○	64	
	43	○				○		○			88	
	51	○	○			○					35	
	50	○	○		○						35	
	46			○	○	○					11	
	34		○●	○	○					●	11	58●
c	17	○				●		○	●		58	90<●
a	30	○	○			●			●		06	90<●
d	40						○					
1												
0	39											

II. 1と10を除いた場合（○は正答 ●はランダム）

点数	受験者	5	4	6	3	8	7	2	9		
6	5	○	○	○	○		○		○	90<	
5	29	○	○	○	○		○			43	
5	2	○		○	○	○			○	71	
	6	○		○	○		○	○		93	
	10	○		○	○	○	○			43	
	4	○		○	○	○		○		93	
	1	○		○		○		○		93<	
4	8	○	○		○				○	63	
	48	○	○		○			○		89	
	9	○	○	○			○			37	
	43		○	○		○		○		90	
	7		○	○	○				○	37	
	25			○	○		○		○	89	
	3			○	○	○	○			11	
3	39	○		○				○		93	
	26	○	○	●	●	●		○		43	14●
	35	○	○					○		43	
	42	○	○			○	●	●	●	43	43●
	44	○	○			○				43	
	41		○	○					○	43	
	16	○			○			○		93	
	13		○	○			○			71	
	23	○	○			○				43	
	18		○		○	○				71	
	30	○		○	○					43	
2	27		○						○	64	
	47			○					○	64	
a	15		○		●	○		●		90<	●96<
	19		○						○	64	
	24	○	○							07	
	11			○			○			90<	
	47			○			○	●	●	90<	●07
c	21	○					○			64	
	33				○	○				29	
1	46							○			
	45						○				
8	37	○				●					●
	22			○							
	17				○						
	53					○					
	12					○					
	34		○								
	35				○						
	36		○								
	14		○								
	20		○								
	32	○									
	51	○									
0	28										
	40										
	52										
	50										

つぎにⅢ＋Ⅳについて同様のこゝろみをすれば

Ⅲ＋Ⅳ（○はⅢの Item No.）

Item No.	4	2	5	①	②	③	⑮	④	⑭	8	1	6
G.P.テスト	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
傾向テスト	↗↗	↗↗	↗↗	↗↗	↗↗	↗↗	↗↗	↗↗	↗↗	↗↗	↗↗	↗↗
	10	⑩	⑪	3	11	⑫	⑥	⑧	⑤	②	7×	14
	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	−	−
	↗↗	↗↗	↗↗	↗↗	↗↗	↗↗	↗↗	↗↗	↗↗	↗↗	↗↗	↘↗
	9	⑬×	⑯×	⑦×	13×	15	12	16	18	17	19×	⑨
	−	+	+	+	+	−	−	−	−	+	−	+
	↘↗	↗↗	↗↗	↘↗	↘↗	↘↗	↘↗	↘↗	↘↗	↘↘	↘↘	↘↘
	⑱	⑰	20×	⑲								
	−	+	−	+								
	↘↘	↘↘	↘↘	↘↘								

上の結果から×印をのぞいた。なお條件をすこしきつくするためにこの場合 (+↗↗) (−↘↗) (+↘↘) のみを残すようにした。つぎにそれらの Item を除いてから同様の手続をくりかえすとつぎのようになる。

Ⅲ＋Ⅳ（○はⅢの Item No.）

Item No.	4	2	5	①	②	③	⑮	④	⑭	8	1	6
G.P.テスト	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
傾向テスト	↗↗	↗↗	↗↗	↗↗	↗↗	↗↗	↗↗	↗↗	↗↗	↗↗	↗↗	↗↗

Item No.	10	10	11	3	11×	12	6	8	5	20	14	9
G.P.テスト	+	+	+	+	−	+	+	+	+	+	−	−
傾向テスト	↗↗	↗↗	↗↗	↗↗	↗↗	↗↗	↗↗	↗↗	↗↗	↗↗	↘↗	↘↗
	15	12	16	18	17	9	17	19				
	−	−	−	−	+	+	+	+				
	↘↗	↘↗	↘↗	↘↗	↘↘	↘↘	↘↘	↘↘				

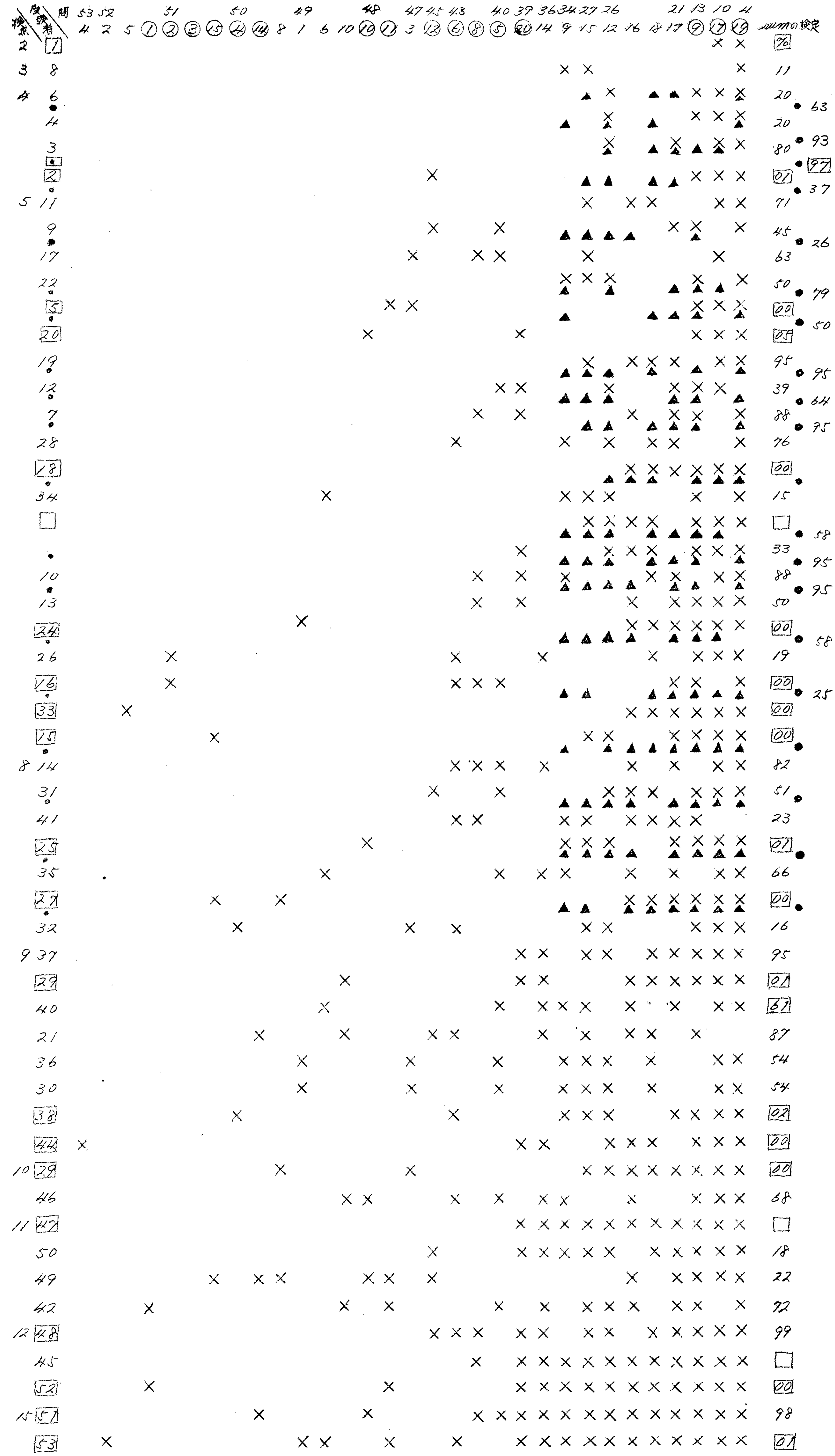
再び X を除くと

Ⅲ + Ⅳ （○はⅢの Item No.）

Item No.	4	2	5	1	2	3	15	4	14	8	1	6
G.P.テスト	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
傾向テスト	↗↗	↗↗	↗↗	↗↗	↗↗	↗↗	↗↗	↗↗	↗↗	↗↗	↗↗	↗↗
	10	10	11	3	12	6	8	5	20	14	9	15
	+	+	+	+	+	+	+	+	+	−	−	−
	↗↗	↗↗	↗↗	↗↗	↗↗	↗↗	↗↗	↗↗	↗↗	↘↗	↘↗	↘↗
	12	16	18	17	9	17	19					
	−	−	−	+	+	+	+					
	↘↗	↘↗	↘↗	↘↘	↘↘	↘↘	↘↘					

となり満足すべき結果を得た。このときの模様は次に示す通りである。
但しXは誤りの解答を示す。

Ⅲ ＋ Ⅳ　　○印は Ⅲ



▲印はランダム解答　即ち平均正解者以上の問題は出来たものと見做し残りをランダムにとった

□印は rum の検定で棄却されたもの（05%－95%）

§4. デタラメ解答の挿入

つぎにデタラメ解答を挿入してこれをみつけることを示すのであるが、一例としてⅢ＋Ⅳについてデタラメ解答を挿入してみた。デタラメ解答は平均点までの正解者十残りの問題のデタラメ解答から成立つものとした。この結果は▲印によつて示されているものである。さて各人について解答がランダムであるかどうかをみるために *run* のテストを行ってみた．この結果ランダム解答と思われないものは（有意水準5％として）前述のグラフの左端に□印を附したものでその数は53人中21人であつてその数は極めて少い．（但しランダムにつけたもので□印は20のうち一つにすぎない）これによつて考えるとまず第一に被験者中にデタラメ解答者がすでに存在しているか或は存在していないかの問題が当然おこつてくるであろう。

いまもし解答者中にランダムに解答したものが含まれていないとするならば、このような結果が生じたのは問題が適当でないか或は出題方法が適当でないか、問題の選択の検定性が十分でないか、問題の性質上やむを得ないものであるかの何れかであると云はざるを得ない。もし後者の考えに従うならばこの程度の問題数では，正直な解答とデタラメ解答との差をみつけることは不可能に近い。

何故ならば□印が被験者において（正直な解答者と考えれば）全く少いからである。従ってデタラメ解答の発見にはさらに研究を要するのであり一案としては難しい問題数を追加し、全体の問題数を増加するか或いは問題の難易の段階を険しくつけ（G-P 群の差を大にする）るかして、デタラメ解答を *run* のテストによつて発見できるようにすることも考えられる。或いは被験者に正直な解答が少いとすれば、何らかの方法によつて正直な被験者を得るようにして問題を順に解くように厳密に指示するか、或いは一つの *Item* ずつ時間の区切りのつくテストを実施し（困難だが！）問題を易難の順にならべ（この模様はさらに研究を要する）その本となる問題を作成し、次に一般にテ

ストし、上の方法によってテタラメ解答を見出すのも一案であろうと思われる。

以上第二章、第三章で *Validity* *Reliability* の特殊な問題を考えたのであるが此の様なものは考えるべきことの一毛にも当らぬのであるが、一つの試みとしてのべたのであり今後研究を進めるべき広大な領域であろう。

第四章 *Thurstone* の態度測定法

此は態度(あることに対する好意的、非好意的と云う態度)の一つの数量化の方法であり、昔から極めて有名な方法である。

Thurstone は人々の教会に対する態度(好意的、非好意的)を測度しようとした時此の方法を用いている。此は次にのべてゆこうとする様な方法で配列された「教会に対するある態度、意見等を表現している文章」を調査される人々に示し此の中どれか自己の意見と一致するかをしらべそれに印をつけることによって人々の意見が測定せられると言う仕組みである。

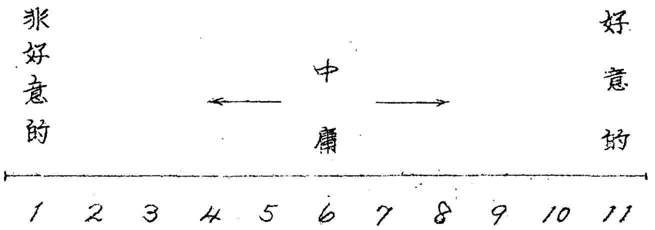
此の意見の測定値は尺度(数量)によって示されるのである。それではその文章は如何にして選ばれ、如何にして尺度値が決定せられるであろうか。

Thurstone の方法の眼目はこの様な項目群を如何にして選ぶかにある。それでは各項目に対して数量的な尺度はどう与えられるか。此の尺度はある判断をあたえる人々 ——— 此を今後判断グループと云う ——— の気持をよく表現すると共に判断グループの意見が(項目が好意的、反好意点と云う両極端の間に占める位置に関する)此の尺度に関し

てさうくいちがう様なものであってはならない。尺度をつくる手順を略示しよう。

(イ) ある事Aに対する意見、全く好意的なものから全く非好意的(悪意的)なものに到るまでのものを十分多くあつめる。此の意見は比較的みぢかい文章によつてあらわされていなければならない。

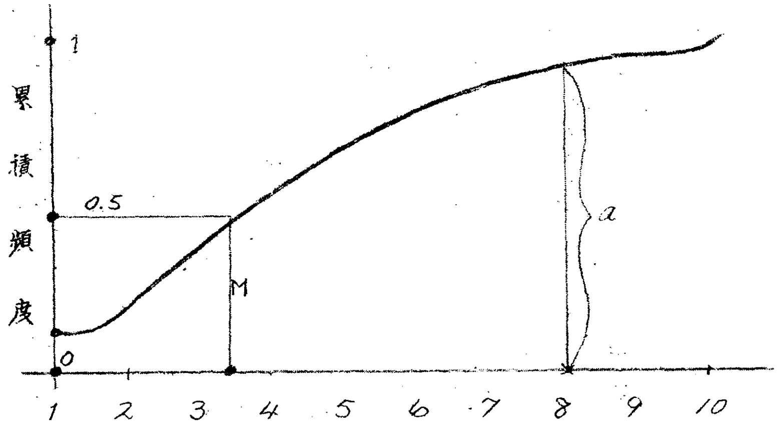
(ロ) 此等の意見をすべて判断グループの人に見せる非好意的なものから好意的なものに到る間を11の段階に分け、各意見がどの段階に属するかをグループの各人に判断させる。



ある意見Xをとりあげよう。各人は此れが孰れの段階のものであるかを指定しているから、判断グループのXに対する気持は上図の各段階についての分布構造によつてあらわされる。すべての人が全く同一段階に属していると判断して居れば文句はないのであるが、一般にさうはゆかない。即ち散ばりをもつのである。この散ばりがあまり大であるならば即ち判断グループによつてXが如何様にも判断される様な意見であるならば、このXはよい態度測定にはよい項目ではないのであた。つまり此の意見の尺度は定め難いのである。この数理的取扱いは次の様にする。まず各段階に1から11までの数字をあたえる。それから段階1から順次累積頻度をつくつてみる。例えば次の図でaは1から8までの段階の間にXを投じた判断グループの割合をなしている。

次に頻度が0.5になる段階M(整数でなくてよい)をみつけ此を

尺度の値とするのである。



次に分布の散ばりをみるために頻度が0.25，0.75になる段階の値M_1，M_2をみつける。この（M_2-M_1）の値が大きければ散ばりが大きいことになるのである。

此の様にして（M_2-M_1）の小なるもののみをひろいあげ、それらの意見の尺度をMによってあらわすことにする。

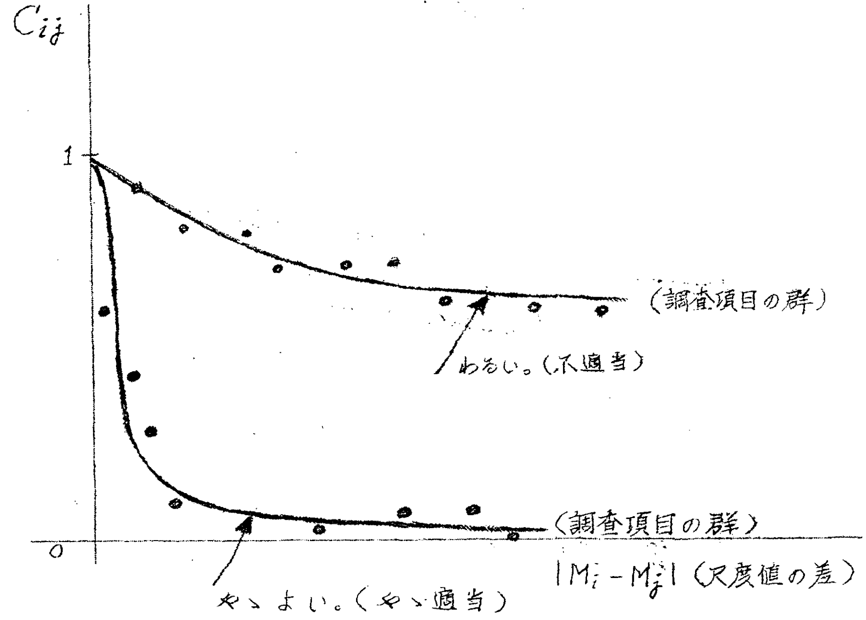
(ハ) 次に上のようにして得られた多くの項目の中其等のMが略〻等しい間隔で配列されている様なものをとりあげMの小さい順にならべ、調査に用うる項目群をつくるのである。

(ニ) さらに念のため此等の項目群を別の判断グループに渡し自己の気持に一致する項目に（いくつでもよい）印をつけさせる。今iなる項目に印をつけたもの丶数をn_i、さらにiなる項目に印をつけたものがjなる項目に印をつけたもの丶数をn_{ij}とする。

そして$\dfrac{n_{ij}}{n_i}=C_{ij}$ をつくる。$C_{ij}(i\neq j)$が常に0であるならば即ち各人の意見が唯一つのものによってあらわされて居るならば、この項目群は全く理想的につくられてあるのである。iとjの尺度値M_i，M_jがはなれているに拘わらずC_{ij}が大であるな

らば、それらの項目は不適当なのである。尺度に大に差のあるに拘わらずそれらのものが同一人の意見となって現われるのであるからこの項目群ではその人の態度がはっきりと測定できぬことになるからである。C_{ij}の様子をながめて適当な項目群をひろいあげるのである。

問題郡に対するC_{ij}の値



此処でのべた操作は次にのべる *Scale Analysis* の操作と一致する思想をもつものである。

(註)

此のようにしてゆくならば結局得られた項目群はおそらく単純なものゝ一次元的なものとなり、複雑なものはまず測定できなくなるものと思われる。一次元的なものを組合せ複雑なもの

を測定する別な方法が講究せられねばならない。此の方法に対する批判は次にのべる。

なおThurstoneはかくして得られた尺度を標準化することを考えているが此は本質的なものではない。

以上のべたThurstoneの方法は興味深いものではあるが統計数理的立場に立つときなお不十分な点がある。以上の各操作に関して所謂信頼度（確率論的立場よりするもの）の考えを入れて理論及び具体的方法を再構成してゆかなければならない。（此の具体的なことについては又別の機会にのべる）

将来多くの問題を残して居るものである。

参 考 文 献

兼 子　宙　輿論の心理　羽田書店

Thurstone（L.L.） and Cheve （E.J.）
Measurement of Atitude.

第五章 Guttman の Scale Analysis, Intensity Analysis に関する考察

判断グループを用うる事なく被調査者に問題を与え、この解答の内部操作によって態度の尺度をあたえようとするものである。

ある調査したい事家Aに関して例えば次の様な問をいくつか6題以上12題位が普通）つくる。例をあげてゆかう。

此の例は夜間高校生に対してなした調査項目である。「昼働き、夜学

校へゆき勉強することにし対して家の人は如何に感じているか、或はいかなる意見をもっているか」と云うことを生徒にたづねたもので生徒よりみた家の人の夜学に対する態度を測定しようとしたところのものである。

1. あなたが学校へ通っていることを家の人は好意的に思っていますか。
イ). 大へん好意的　ロ) いくらかは好意的　ハ) なんともいえない(わからない)
ニ) あまり好意的でない　ホ) 全く好意的でない

2. あなたが学校へゆくことを家の人は将来あなたのためになると思っていますか。
イ) 大へんためになる　ロ) 少しはためになる　ハ) なんともいえない(わからない)　ニ) あまりためにならない　ホ) 全然ためにならない

3. 家の人はあなたが昼職場で働き(又は家事手伝)夜学校に行くことをよいと思ってますか。
イ) 大へんよいと思っている
ロ) よいと思っている
ハ) なんともいえない(わからない)
ニ) あまりよいと思っていない
ホ) 全くよいと思っていない

4. 家の人はあなたがこの学校でよいことを習っていると思っていますか。
イ) 大へんよいことを習っていると思っている
ロ) よいことを習っていると思っている
ハ) なんとも思っていない(わからない)

ニ）あまりよいことを習っていると思っていない

ホ）全然よいことを習っていると思っていない

5. 家の人はあなたが家で勉強することを好意的に思っていますか。

イ）大へん好意的

ロ）いくらかは好意的

ハ）なんともいえない（わからない）

ニ）あまり好意的でない

ホ）全く好意的でない

6. 家の人はあなたが学問のために金をつかうことを好意的に思っていますか。

イ）大へん好意的

ロ）いくらかは好意的

ハ）なんともいえない（わからない）

ニ）あまり好意的でない

ホ）全く好意的ではない

此の形式の様にある事柄Aに対する態度をしらべるのに『問●●●●●●はよい事である』

と云うような質問項目を十分な数丈とりあげる。この項目丈しらべれば十分であると云う Validity はあらかじめ、他の方法によってしらべなければならない。Scale Analysis は Validity をしらべる方法ではないのである。こゝでは Validity は一応みたされているものとして話をすすめてゆかう。

各項目の反応は多肢選擇方式によって定められてある。即ち各項目には

イ）非常に賛成　　ロ）賛成　　ハ）わからぬ

ニ）不賛成　――ホ）非常に不賛成
という様なものが用意されてある。

被調査者は「――――はよい事である」

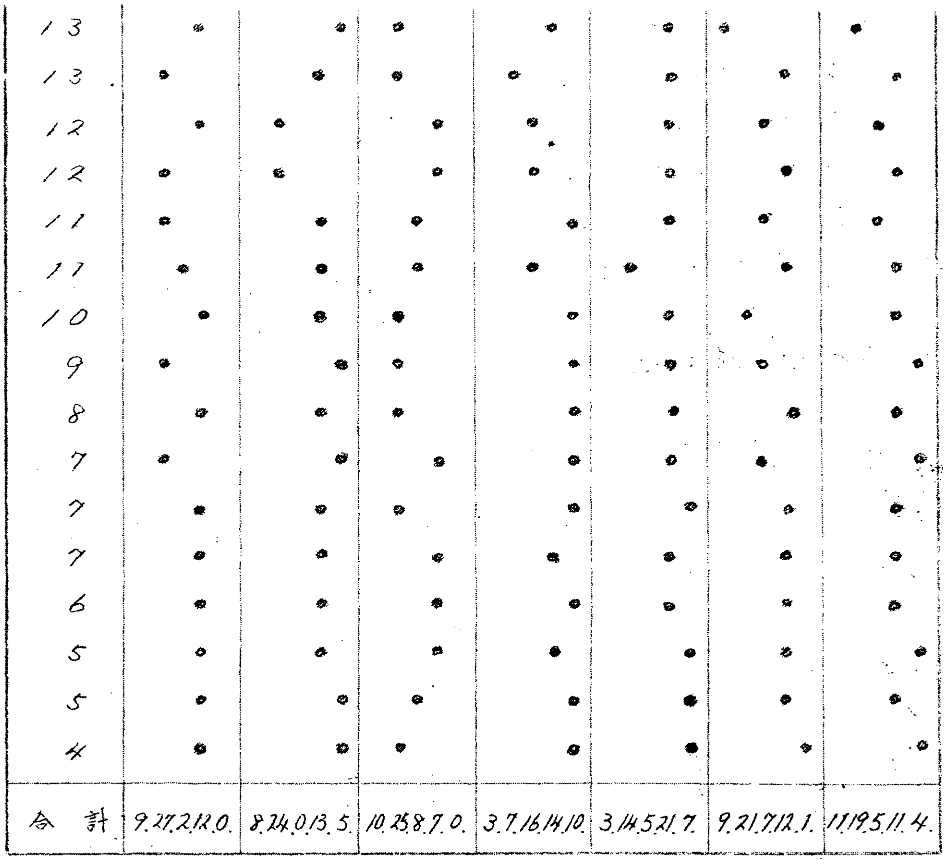
と云う意見に対して自分はいかなる態度をもっているかを（イ）―（ホ）の形で示せばよい。

此の様な問の群をある調査しようとするグループに課し其の反応（各項目に於て唯一つの反応しか示してはならないと教示をあたえておく）をしらべるのである。

さてこの様にして被調査のグループの答を得てから（イ）に４，（ロ）に３，（ハ）に２，（ニ）に１，（ホ）に０なる数値をあたえ、各被調査の反応（いくつかの問に対する）の總得点数を出す。次にグループを總得点の順にならべ、各人が各問でどの様な反応を示しているかをみるのである。此のためには例えば次の様な図表をつくるのである。

被調査者の總得点＼問	1					2					3					4					5					6					7				
	4	3	2	1	0	4	3	2	1	0	4	3	2	1	0	4	3	2	1	0	4	3	2	1	0	4	3	2	1	0	4	3	2	1	0
28	●					●					●					●					●					●					●				
25	●					●						●				●						●					●				●				
25	●					●					●							●				●				●					●				
24	●						●				●							●				●				●					●				
23	●						●				●					●							●					●			●				
23	●						●				●								●			●				●					●				
23		●				●						●					●				●						●					●			
22	●						●				●								●			●					●				●				
21		●					●					●					●					●					●					●			

被調査者の総得点 ＼ 問	1					2					3					4					5					6					7				
	4	3	2	1	0	4	3	2	1	0	4	3	2	1	0	4	3	2	1	0	4	3	2	1	0	4	3	2	1	0	4	3	2	1	0
21		●					●					●					●					●					●					●			
21	●						●					●					●						●				●					●			
21		●				●						●						●				●					●					●			
21		●				●					●								●					●		●					●				
20		●					●				●							●				●					●						●		
20				●		●						●							●			●				●					●				
20		●					●					●						●						●		●					●				
20		●					●				●							●					●				●					●			
19		●					●					●							●			●					●					●			
19	●								●				●					●			●							●			●				
18		●					●					●						●						●			●					●			
18		●					●					●						●							●	●						●			
18		●					●						●					●					●				●					●			
18		●					●						●						●			●					●					●			
17		●					●					●							●					●			●					●			
17		●				●						●							●					●				●				●			
16		●					●						●						●					●			●					●			
16		●							●				●						●			●					●					●			
16		●							●			●					●								●		●					●			
16		●					●					●						●						●			●							●	
15		●					●					●					●							●					●					●	
15			●						●			●								●		●					●					●			
15		●					●				●							●							●				●				●		
14				●			●							●				●						●			●					●			
14		●					●					●							●					●					●				●		



註 ● は各人の反応した模様を示す。

もし總得点が各問と一次元的な関係があるならば、つまり總得点が各問えの反応を一意的に決定してしまうならば（一次元的と云う意味）●印はそう入りみだれる筈はないのである。

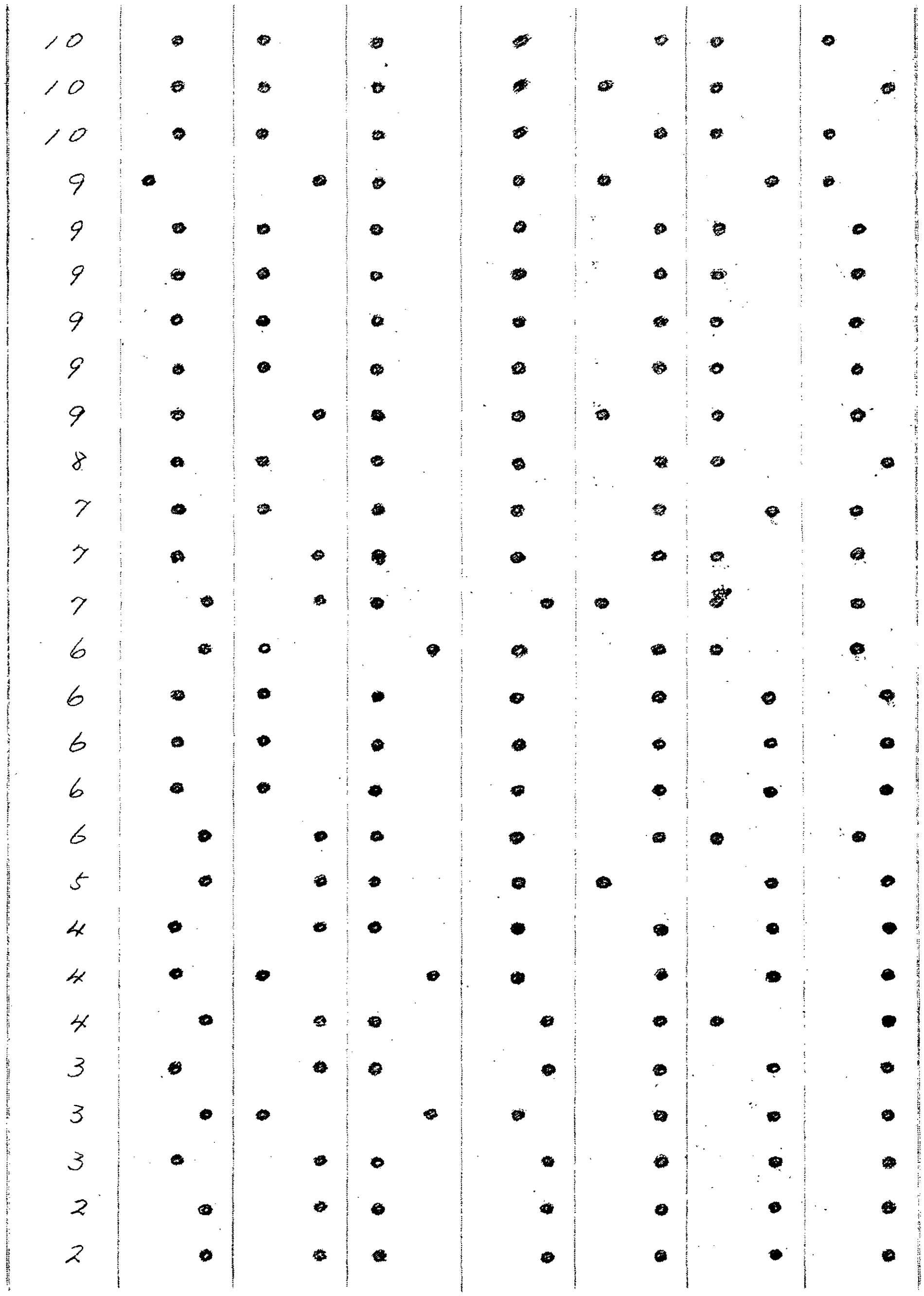
今入りみだれるのは問いの（イ）（ロ）（ハ）（ニ）（ホ）の分類が悪いと一応考えて●が入りみだれることがない様にすることを考える。此のためさきの図で問1では (4) (3) (2, 1, 0)

2 〃 (4, 3) (2, 1, 0)

問3では　(4 3 2)　　(1,0)
　4 〃　(4)　(3,2,1)　　(0)
　5 〃　(4 3,2)　　(1,0)
　6 〃　(4,3)　　(2 1,0)
　7 〃　(4),(3),(2 1 0)

とまとめて反応型を縮めることが考えられる。この様にしてから再び各部類(前の(イ)(ロ)(ハ)(ニ)(ホ)に当る)に点数をあたえ同様の事をくりかえすならば次の様なものを得る。

問	1			2		3		4			5		6		7		
被調査者の総得点	2	1	0	2	0	2	0	2	1	0	2	0	2	0	2	1	0
14	●			●		●		●			●		●		●		
14	●			●		●		●			●		●		●		
13	●			●		●			●		●		●		●		
13	●			●		●			●		●		●		●		
13	●			●		●			●		●		●		●		
13	●			●		●			●		●		●		●		
12	●			●		●			●		●		●		●		
12	●			●		●		●			●			●	●		
11		●		●		●			●		●		●			●	
11		●		●		●			●		●		●			●	
11		●		●		●			●		●		●			●	
11			●	●		●			●		●		●			●	
11		●		●		●			●		●		●		●		
11		●		●		●			●		●		●			●	
11		●		●		●			●		●		●			●	
11		●		●		●			●		●		●			●	
11		●		●		●			●		●		●			●	


10
10
10
9
9
9
9
9
9
8
7
7
7
6
6
6
6
6
5
4
4
4
3
3
3
2
2

被調査者の総得点 ＼ 問	1			2		3		4			5		6		7		
	2	1	0	2	0	2	0	2	1	0	2	0	2	0	2	1	0
2			●		●	●				●		●		●			●
2			●		●	●				●		●		●			●
1		●			●		●			●		●		●			●
1			●		●		●		●			●		●			●
1			●		●		●		●			●		●			●
0			●		●		●			●		●		●			●
合　計	9.27.14			32 . 18		43 . 7		3.37.10			22 . 28		30 . 20		11.19.20		

此によると●印はさう入りまじることなく総得点と一次元的な問題群反応型を得たことになる。この總得点がある調査したい事象に対する意味ある尺度となるのである。

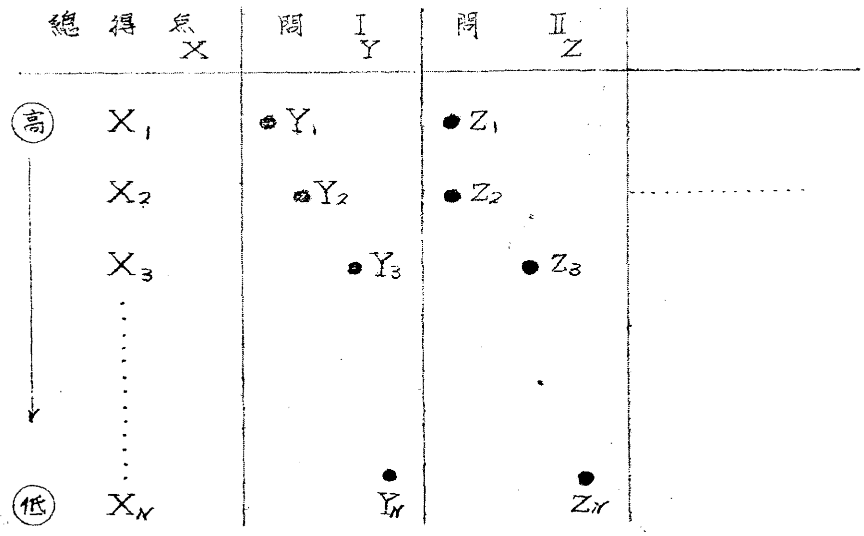
（註）

こゝで尺度といった、此はどんな意味をもつものであろうか。これも亦被調査者グループ、問ひの群に対して相対的なものなのである。尺度とは次の様な意味をもつものと考えられる。

ある被調査者のグループを考える。これが各問に対する反応を標識（勿論上述の様に数量化されている）としていると考える。別の言葉でいえば各人は多くの属性を変量としてもっているといってよい。此の様なグループを各属性を含めて一意的に特色づける一つの数量、例えば各属性の変量の一つ一つと夫々同時に單調な増加もしくは減少函数と云う様な関係にある一つの数量が見出されるならば此の数量をグループの各人を上述の属性の面に於て表現する尺度と云うのである。

具体的にのべてみよう。

前のような図形にうつる。

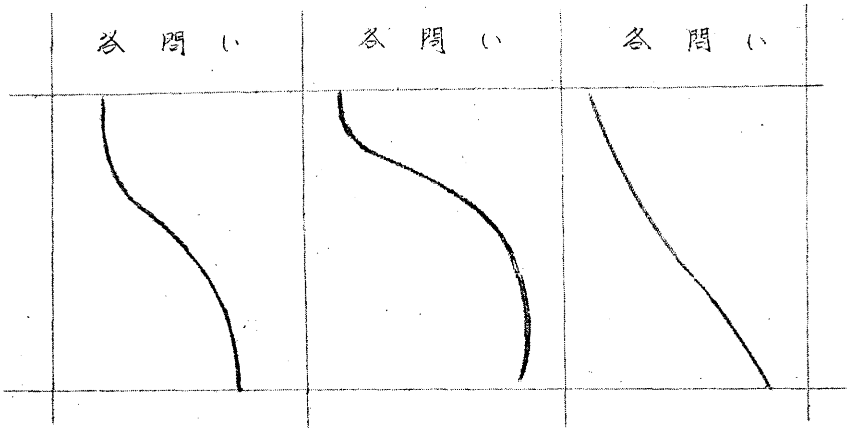


総得点（X）で X_i のものは各問（Y, Z,……）で夫々 Y_i, Z_i ……の点をもつものとするとき

$$\begin{cases} Y = f(X) \\ Z = g(X) \\ \vdots \end{cases}$$

と言う関係があり、f, g… が夫々同時に単調な増加又は減少函数となっていると言うことである。つまり図形的に言うならば総得点の高いもの丶順にならべると

各問いで個人の得点のPatternが



の様な曲線の上にのってくると云うことである。

此の意味は總得点と云うものが各問いの（属性の）模様を一義的に表現していると云うこと、總得点をしれば各属性の構造をしりうると云うことを示して居るのである。尺度とは此の様なものを云うのである。

さて上に示した様に問いのカテゴリー（分肢）の数をへらすことによって尺度を得ると言う意味は分肢をへらすことによってのみ尺度が出来ると言う事である。此は内容及び表現方法、言いかえればそこにしめされてある言葉の形、配列の位置のきまったものとしての問い（そのカテゴリー）がかうしなければ一次元的のものとならぬと言う事を物語っているのである。それが内容的のものに帰因するのであるか又表現的のものに帰因するのであるかは決定できないのである。

このような手続を畳み込みと言うのである。一度の畳み込みでうまくゆかなければ、此の方法を繰り返すのである。然し此をくりかへすと、ある問いではカテゴリーが一つになってしまう、即ちその問いは全体に対して何等の寄與をなさなくなってしまう。此はその問いそのものが他の問いと同一次元のものとならぬ、即ち他の問いと尺度をつくらぬと言

う事を意味しているのである。

このScale Analysisはこの様に同一次元をもつものを剔出すると言う機能をもっているのである。

さてこゝで問題となるのは畳み込みを行う目安、同一次元と見做す基準は如何にもとめられるべきであろうか。勿論さきにのべた様な完全な尺度というものは現実問題に於てはつくられるべき筈はないのである。つまり完全に一意的な尺度と言うものはつくり得ないのである。この尺度化とみなせる判定の基準として、L. Guttmanは再現性(Reproducibility)の誤差と云うものを考えている。つまり調査から完全尺度と言うものをグループの中に想定するのである。つまり總点数に対してすべての問いの答の位置即ちカテゴリー、更に言えば得点と言うものを想定するのである。

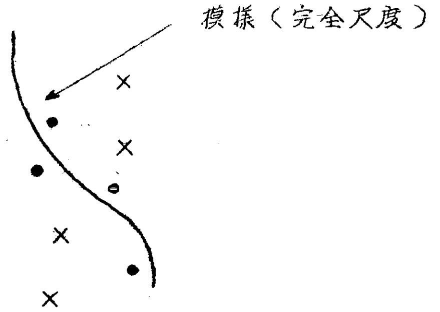
$$f(X) = Y$$

$$g(X) = Z$$

と言うときf, gの函数形を一定とするのである。かうして總得点と各問いに対する得点模様と言うものが想定される ―――― 勿論調査結果から推定されるのであるが ―――― のである。これが上述の完全尺度と仮りに呼んだ所のものである。此の模様と実際調査との外れが誤差と考えられるのである。總得点を固定してみて各問いに於て完全尺度からの外れの度合を計算してみるのである。n人のグループの中尺度に外れたものの人数をn_1とするとき $\frac{n_1}{n} = D$ を計算するのである。通常の場合 $0.15 \geqq D \geqq 0$ 位の時、尺度ありとみとめられている。或は又 $0.1 \geqq D$ ととる場合もある。Dのあたいを得たとき$(1-D)$を再現性の係数とよぶのである。此の係数が85%～又は90%以上のときつくられた問いは尺度化されていると言はれているのである。しかしこれで十分であろうか。我々としては否と言わざるを得ない。第一に

被調査者グループは我々の結論を得たい母集団のランダムサムプルであると言う事、第二に完全尺度からの外れ方を問題にしなくてはならぬと言うこと（外れる模様を研究しなくてはならぬ）と言うことである。第一の難点の解決法は当然仮設検定論の立場に立って検定を行ってゆかねばならぬのである。χ^2－ 検定、或は外れの測度

$$S_{(\alpha)}^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{(l_i - p_i)^2}{p_i^{2\alpha}}$$ （p_i はある分類に属する母集団比率αは任意の正整数, l_i はその分類に属くするサムプルの比率）に関する検定（講究録 1950. 9月 林、χ^2 検定と適合度の検定参照）を用うる事によって此をたしかめる事が出きるであろう。或は又新な検定方法を考案しなければならぬであろう。つぎに外れの模様に関するものである。



●印の様な外れ方と×印の様な外れ方とを同等に考えてよいであろうかと言う事なのである。当然ことならぬばならない。此の外れ方をあらわすのに外れの二乗の總和と言うものを測度と見做して偶然の外れ方と有意な差があると見てよいかどうかを検定するか或は又デタラメ回答の所でのべた様な傾向性の検定、*Run*の検定を用いることもできる。

以上の様に *Guttman* の言う単なる外れの比率丈ではなくして統計的仮設検定の立場にたつて再現性は考察せらるべきものであろうと思う。

さて、こゝで尺度化つまり一次元化と言うことを大切に考えたのであるが此の意味はどんなものであろうか。一次元化して居らないならばそ

の總点数と言うものは各属性の構造（各問いでどんな点をとっているか）を一義的にあらわして居らぬのであるから $X_1 > X_2$（總点数）であっても $Y_1 \geqq Y_2$（ある問いの点数）と言うことは言えないのである。

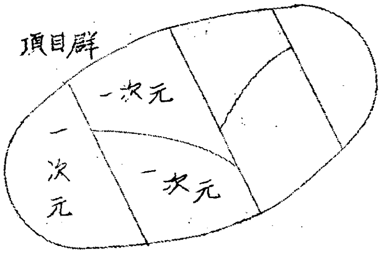
$$X_1 > X_2 \longrightarrow \begin{array}{ll} Y_1 > Y_2 & Z_1 < Z_2 \\ U_1 > U_2 & W_1 < W_2 \end{array}$$

と言う関係はありうるのである。したがって總点数の比較丈では一義的に各属性をも代表するいみに於て X_1 が X_2 よりすぐれている（或は劣っている）と言うことは出来ないのである。（仮りに点数の多いものをすぐれている或は劣っているものと仮定しよう）ある属性ではすぐれ（劣り）ある属性では劣って（すぐれて）いると言いうるにすぎないのであって、全体的な結論をうることはできないのである。つまり總点数と言うものの意味が薄くなってしまうのである。

したがって總点数の意味と言うものをますために一次元化と言うことを大に問題にしているのである。

次に *Scale Analysis* のもつ特性と言うか機能と言うものを列挙しておこう。

1. *Scale Analysis* は『知りたいこと』を測定するためにつくられた調査項目群を一次元のものに分別する機能をもつものである。然し『知りたい事』を真に知るためにいかなる項目を選ぶべきかと言う *Validity* 性に関しては何ものがたっているものではないのである。*Scale Analysis* に此を求めるのはあやまりである。



項目群を用い調査を行い、*Scale Analysis* により一次元的なもののみをまずあつめ、そうでないものをはぢき出す。次にはぢき出されたものをあつめ再び *Scale Analysis*

を用い又一次元的なものをあつめる。云々。此の様にして一次元的な項目群にわけるのである。しかしものによっては他の如何なるものとScaleをつくらぬものもありうるのである。

2. 此の様なものであるから、同一内容をもつものでも一次元をつくらぬことがあり、異った内容のものでも尺度をつくることがある(ことに後者は興味深い)ことに注意すべきである。

3. 前述のThurstoneの方法と比較してみることにしよう。

Thurstoneの所でのべたC_{ij}と言う係数を考えてみることにする。此が我々の欲する様に$|i-j|$が小の時大となり、$|i-j|$が大の時小となることが望ましかったのである。此の事が完全にいわれうるためには一般に問いの形式がこゝでのべた様に各問いの内の——カテゴリーとして示されている(イ),(ロ)(ハ),(ニ)(ホ)の形式である事になるのではないかと思われる。即ち$C_{ij}=S_{ij}$となるためには意見がMultiple Choiceの各分肢であるときにいわれるのではないかと思われる。何となれば「意見」の少しのつくり方の差によって$C_{ij}\neq S_{ij}$となるからである。従ってC_{ij}を用いて行う、Thurstoneの方法を推しすすめると結局こゝでのべた各問いのmultiple choiceの分肢が意見となってくるものと考えられてくる。Thurstoneは何を求めているのであろうか。彼の目標は多くの面(次元)をもつものを一つの尺度の上にのせようとしていると考えられるが此の立場に立つとき$C_{ij}\neq S_{ij}$は当然である。判断者は各面各面で一々考えを異にするからである。此の点C_{ij}とねらいとの間にConsistencyがあるとは考えられないのである。こう考えてくるならば態度の尺度を決定するにむしろScale Analysisによるべきではないかと思われる。

(註)

C_{ij}で分析をすゝめて純粋なものゝみを求めるならば問いの数は減少してしまう。『しらべたい事をしらべうる』にはこれ

丈必要であるという問い(意見)の数は減ってしまい、のこったものゝみで調査をするならばこれは *Validity* をもちえぬことになってしまう事に注意しなければならない。

しかも *Validity* あらしめるには各問い(意見)を如何に結合すべきであるかと言う方法は *Thurstone* の方法には明示されていない。

4. ある問いの群が一次元であるとみなせるか否かは絶対的なものではなく被調査者グループ(結論を得たい特定の母集団からのランダム、サムプル)に依存しているのである。ある正常な人を対象に調査を行った時一次元的であったものも、犯罪者のグループを対象として調査を行った時一次元的にならなくなる場合もある。或はこの逆の事もあり得るのである。

(註)

この様な事実を利用し、つまり色々な集団で一次元的な関係をもつ問いの群を比較することによつて、被調査のグループの特性を比較し、その差異を意味づけることも出来る.

5. 因子分析法(*Factor Analysis*)とも意味をことにしている。こゝでいう同一次元のものの中には因子分析法による多くの因子を含みうるし、一つの因子の中にも多くの次元をもつものが入りうるのである。

6. 総得点をあたえるのに、(イ)(ロ)(ハ)(ニ)(ホ) の反応に 4, 3, 2, 1, 0 の得点をあたえたがこれは本質的な意味をもつていない。ある問いの群に於て完全な尺度がつくられているならば 5 4 3 2 1 と点数をあたえても本質的には何のかわりもないのである。$X_i > X_j$ であればある問いの点に於ても $Y_i \geqq Y_j$ となっているのであるからYという問いのカテゴリーにどんな点をあたへても $X'_i > X'_j$ (ダッシュは新しい点に対する(総得点)の関係には変りはないのである。此の様にこの方法ではカテゴリーにどんな点をあたえてもかまわない

と言うことは大きな特色である。従って總得点数の差と言うものには深酷な意味があるのではない。

總得点と言うものは絶対的のいみをもつものでなく、各問いの反応の型を一義的にあらわすと言う意味に於て機能的な意味をもつのである。我々にはこれで十分なのである。この数値（總点数）と言うものをいろいろの事に対する診断に用いる時などこれで申し分はない場合も多い。

然しこの点のあたえ方によらぬと言うことは完全な尺度があると仮定した上の事である。実際は尺度ありとみなせても完全な尺度は得られてないから「点のあたえ方によらぬ」と言うことは成立しない。理想的な、完全尺度に於ては点のあたえ方によらぬのであるが、現実的にこうはいかない。点のあたえ方に依存してしまうのである。（尺度からの外れがあるから！）。此の事はこの方法の一つの難点であると言えるのであるが、理想型を頭に浮かべた第一近似の理論としては当然こゝでのべた気持は許されるであろうと思う。

（註）

此の難点を避ける方法は考えられるが此の時は点のあたえ方によらぬという一つのよい所を捨て、点数のあたえ方にはよるがなるべくすべての問いが尺度をつくる様にカテゴリーに点をあたえようと言う立場がとられるのである。これについては後述する。

以上によって Scale Analysis の方法と特色の概要をのべたがこの考えを全く種類のことなったものに応用した例を二つあげてみよう。

(i) 学力テストの場合

学力テストは今１０種類の問いからなつて居り各種類の問いは１０個の問題から成つているとする。問題はできれば１出来ぬときは０を与えるとする。こうしてある母集団から選ばれた被調査者グループにテストを行つたとする。こうしてテストを行つた結果１０種類の問題の總点数を合計して總得点を出すことは意味があるかどうか。もしも１０種の問題が一次元的であるならば總得点は尺度（学力の程度を測定する尺度）となるのである。一次元的でないならば總得点は意味がない。一次元的関係をもつ種類の問いをあつめていくつかの問題群をつくり、これを別の立場から綜合して行かなければならない。問題の種類によつて測定する能力の面がことなつているから以上の事は当然と言わねばならない。

（註）

読み書き能力調査のテストに於ては此の方法が応用された。

細部は読み書き能力調査委員会

日本人の読み書き能力（１９５０）

東大協同組合出版部

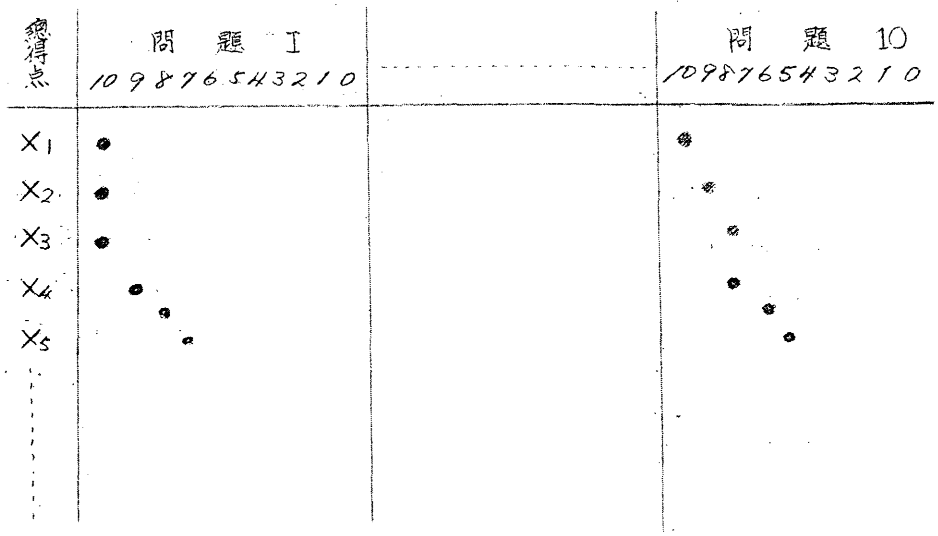
林　知己夫

サムプリング調査は如何に行うべきか（１９５０）

東大協同組合出版部

参　照

各種の問題の成績を単に合計していみあるか否かをみるのに Scale Analysis の方法は大に活用せられねばならない。方法は原理的には前のものと同様である。



の様な図をかき●の behaviom を検討するのである。但し●印は總得点Xのものが問題iでとつている点数をあらわす。

テスト等で一次元的でないものを合計してその結果を云々するのではその解釋は意味が薄く曖昧なものとなることは重ねて注意しておこう。なお次元のことなるものゝ結合方法としては次章でのべる Paired Comparison の方法などは一つのすぐれた考え方であろうと思う。

(ii) 共通語化の測定

白河市に於て行った言語調査(国立国語研究所、統計数理研究所の協同研究——文部省科学試験研究費——による)に於て用いられた。共通語化を測定するのに特殊な音韻の傾向があるか否かによって測定しようとした。此を測定するために次の様な種類の問いが用いられた。

(イ) イとエとの混同をみる　8題
(ロ) 有声化をみる　6題
(ハ) 無声化をみる　3題

(ニ)　ドと丁との混同をみる　　　　　　　4　題

(ホ)　ヒとシとの　　〃　　　　　　　　　3　題

(ヘ)　語彙的なものをみる　　　　　　　　3　題

これをつかって調査し各問いで共通語化しているとみとめられた時1。そうでないとき○をあたえるとする。こうして總得点によって共通語化の程度を測定しようとした。この總得点はいみがあるのであろうか。一次元的でないとすれば例えば(イとエとの混同は少いが有声化が多い)(イとエとの混用は多いが、有声化は少い)と言う二つのものがあった時(勿論孰れか一方の方が總得点は高いとする)孰れが共通語化して居るかと言うことはこのまゝでは何とも言えぬのである。一次元的であれば總得点の高い方が常にイとエとの混同でも、有声化の所でも共通語化していると言えるのである。実際(i)と同様に *Scale Analysis* の考えを用いてみると此等は一次元的関係にあることがわかった。これは餘談ではあるが、附近の村々で調査を行っても同様一次元的関係がみうけられ、しかも共通語化する時はどのような音韻からどの様な機構で共通語化するかと言うことがたしかめられた。

次に前にいさゝか触れた所であるが点のあたえ方を工夫することによって実際に得られた結果をみてこれからなるべく一次元的なものをつくり出すと言う現実的な場合の事を考えてゆこう。この方法でゆくと各問いのカテゴリー　(イ),(ロ),(ハ),(ニ),(ホ)　にある点をあたえるのであるがもし一次元的でない問いがあるとすると　(イ)(ロ)(ハ)(ニ)(ホ)　にあたえる点が皆同一になってあらわれるのであり、畳み込みの場合、例えば(イ)と(ロ)とを合せると言う様なときは(イ),(ロ)にあたえる点数が同一となって出てくると言う様に、機械的に排除、畳み込みが出てくるのである。

この基準は上にも述べた様に得られた結果からみて、なるべく一次元的な問い及びそのカテゴリーをつくりあげる（可能なるかぎり一次元的なものとみなそうとする）にはどんな点をあたえたらよいかと言う様な立場でするのである。

この事を目ざしたものとして次の様な考え方がある。

$$X = \sum_{i=1}^{L} A_i$$

Xは総得点　A_i は i 番目の問いに対する得点をあらはす確率変数（各カテゴリーの点数及びその分布があたえられている！）と考え、Xと問 i との相関比（A_i のXに対するもの）η_i とする。この時 A_i の分散 σ_i^2 を一定とし

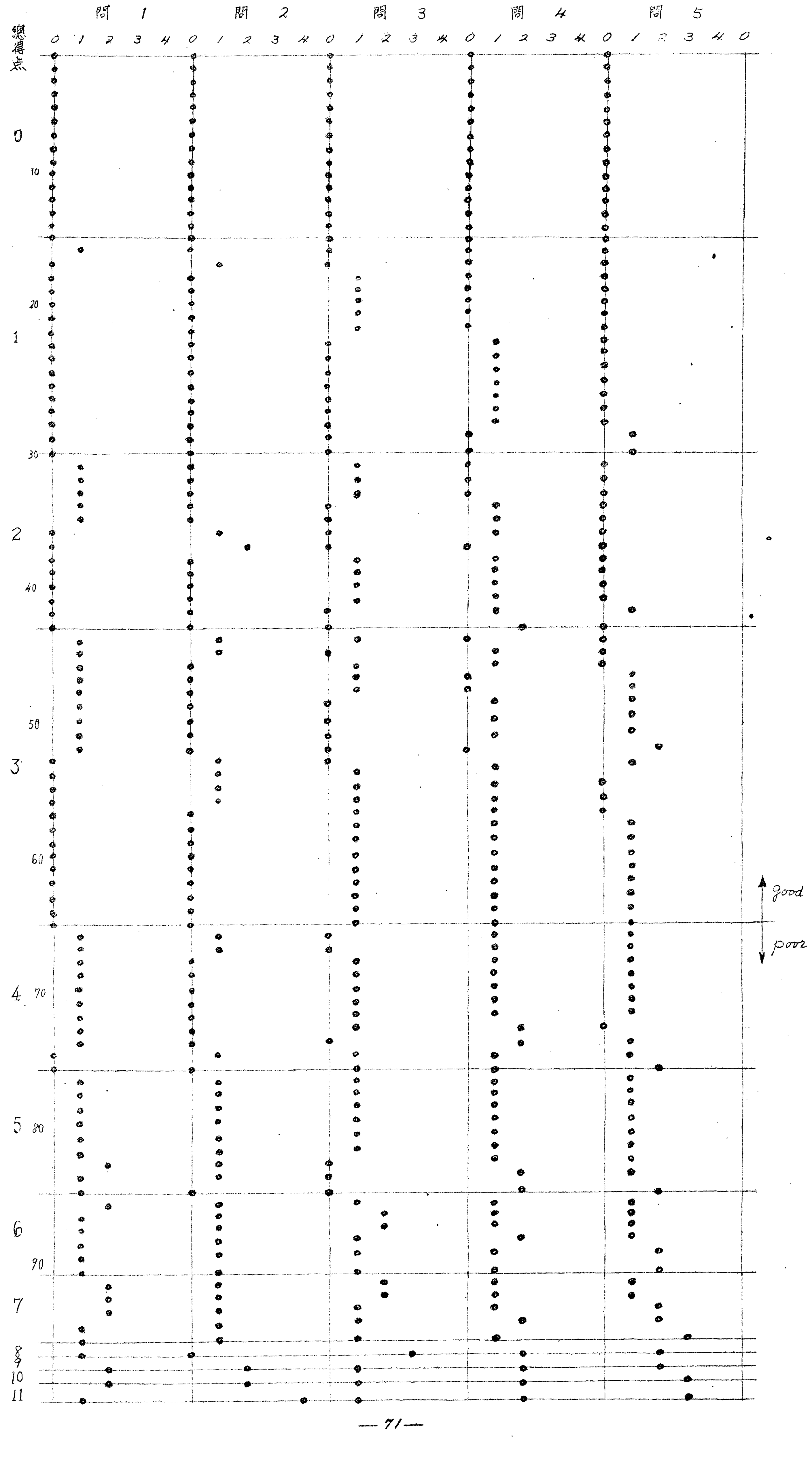
$\frac{1}{L}\sum_{i=1}^{L}\eta_i^2$ をなるべく大にする様にカテゴリーに点数をあたえると言う様なことが考えられる。（但しすべてに同じ点をあたえると言う無意味な解はのぞく）これは X を知ったとき i 番目の問いの答をなるべく散らばらさぬ様に点数をあたえることになるのである。（ちらばっていれば畳み込みなどをしてちらばらなくさすのである！）

この方法は逐次近似の方法をもってとく事が出来る。

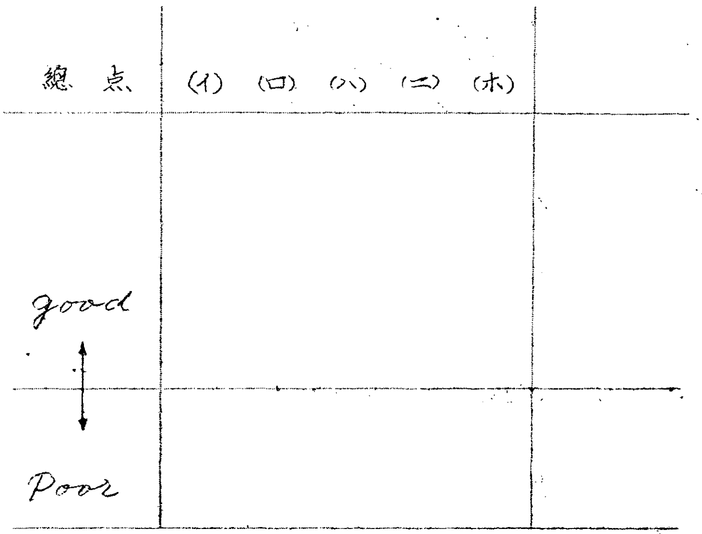
又別の方法も考えられる。此は前に出した夜間学生の意見調査に於て行ったものである。前に示した問題を香川県の高松高等学校、実業高等学校、琴平高校、善通寺高校のサムプルに対して課して（此のサムプルは層別ランダムサムプルである）。その結果を整理したものである。まず通常の様に（イ）（ロ）（ハ）（ニ）（ホ）の分類に 0, 1, 2, 3, 4（前とは逆）をあたえ、それを低得点の方からならべてみると次の様なグラフが出来た。（これを Scalogram という）

（註）

なお、都合により、第 6 問は割愛した。


問 1
問 2
問 3
問 4
問 5
總得点
0 1 2 3 4 0 1 2 3 4 0 1 2 3 4 0 1 2 3 4 0 1 2 3 4 0
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
10
20
30
40
50
60
70
80
90
good
poor

(イ)(ロ)(ハ)(ニ)(ホ) の点数のあたえ方をかえて●がなるべく左右にちらばらぬ様にするために、次のような考え方を用いてみた。



総点の少いものと多いものとの二つのグループに全体を分ける。これは所謂 good-poor Analysis の考えによるものである。 かうしてから各問いに於て(イ)(ロ)(ハ)(ニ)(ホ)にある点をあたえた時各問いの中で分散が一定である(此の場合1とした)という條件の下に good 群と poor 群との平均の差が最大になる様にしたいという立場で点をあたえようと考えた。かうすることはちらばりを少くする様な点のつけ方の一つの方法であることは容易に了解せられる。poor の方にあらわれるカテゴリーの点は多く、good の方に多くあらわれるカテゴリーの点は少くあたえられるであろうからである。我々の場合 good, poor をわける時、まず 3点以下を good、3点以上を poor と考えた。

かうして点をあたえてみた所次の様な点を各問に於て得た。なお各問いで(イ)は常に0と定めた。

問	(イ)	(ロ)	(ハ)	(ニ)	(ホ)
1	0	1.77	2.86	——	
2	0	2.07	2.07		3.05
3	0	1.49	3.99	3.99	
4	0	1.56	3.30		
5	0	1.65	2.65	2.98	

これからわかるように畳み込みされるカテゴリーが自ら出てきていることであろう。

こう得点をきめてから Scalogram をあらためてつくってみると又同様な図形をうる。

こゝで参考のため η_i と言うものを計算してみると

i	1	2	3	4	5
η_i	0.81	0.90	0.77	0.75	0.87

この様な結果を得た。関係の深さは各問いでそう差のない事、又比較的ちらばり方が少いであろうと言うこと、これ等のことが予想せられる。此の η が小であればここであたえた数量と言うものは意味がなくなってしまうものと考えられる。

以上は唯なる一法にすぎないけれども此のような点の附与のし方によつて Reproducibility を増さうとする考え方も捨て難いところがあり、今後研究せられねばならぬであろう。

（註）

ここではサムプルに対して点をあたえたのであるから母集団に対する推定としては信頼度と言うものを考えに入れねばならないのは当然であるが、方法の本筋のみを話したので簡単のため省略した。

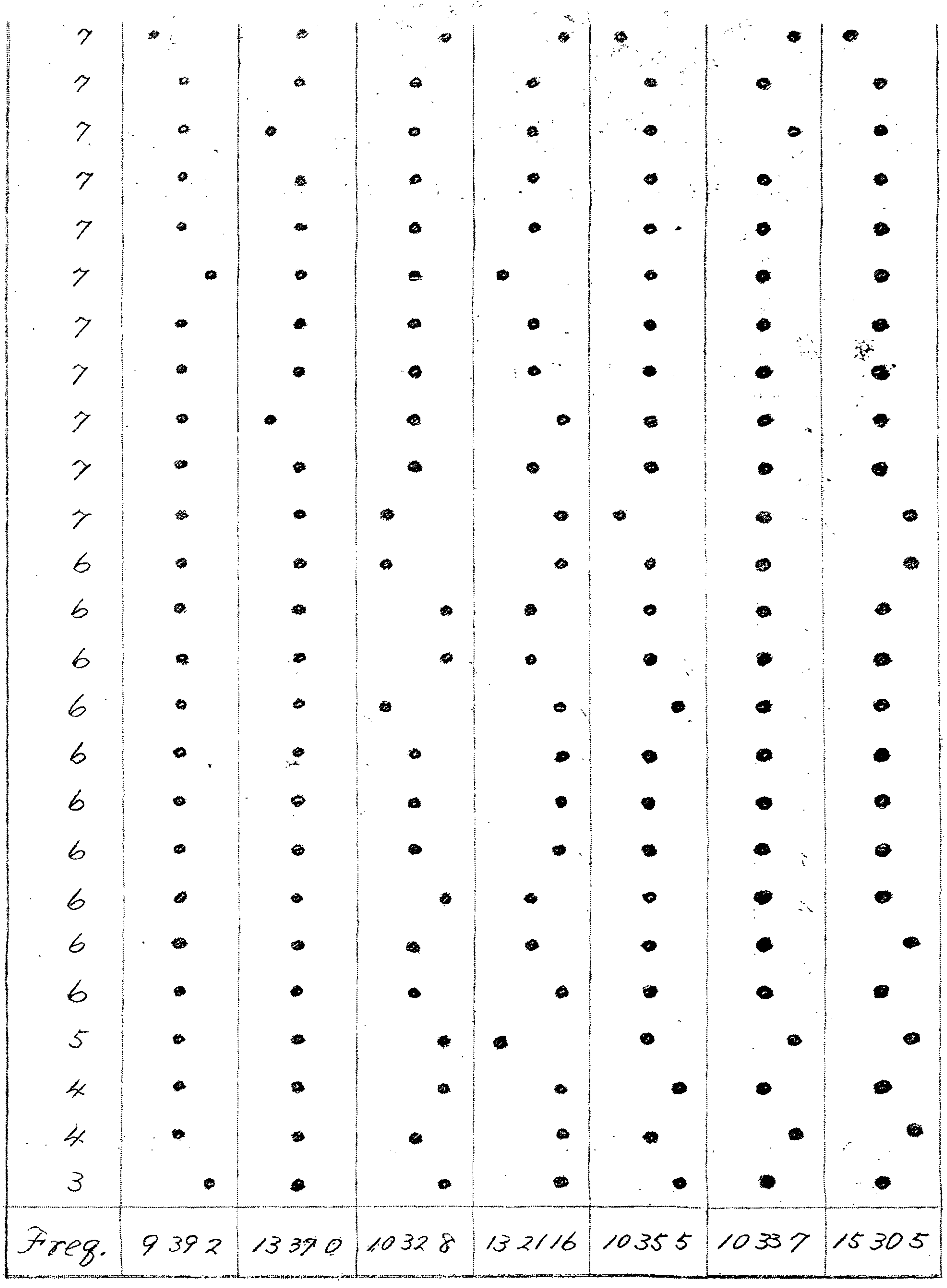
以上によって Scale Analysis の方法に関する試考をのべたのであるが此の方法を拡張して Intensity Analysis と言うものを考えてみよう。

これは内容的な意見文でなく、その意見を持する強度までもそくていして、意見の内容的な面とつけ合せて何等かのより深い意味のある結論を得ようとするために行われるものである。

前の夜間学生の例にもどろう。各問いに次の様な附帯的な質問をつけるのである。内容的なものを聞いた上で『その意見をどの位強くもって居りますか』（How strongly do you feel about this? 又は How sure are you of your answer?）
と言う様な問いを発するのである。その答としては強い。かなり強い。弱いと言うようなものが与えられて居り、どれかをえらべばよいのである。

強度の答へは、"強い"に2点、"かなり強い"に1点、"弱い"に0点をあたえる。このようにして各問いの強度のみについて Scale Analysis の時と同様な図形をかいてみると例えば次のような図形をうる。

総得点（弦線の強さ）＼問	1			2			3			4			5			6			7		
	2	1	0	2	1	0	2	1	0	2	1	0	2	1	0	2	1	0	2	1	0
14	●			●			●			●			●			●			●		
12		●		●				●		●			●			●			●		
11		●		●			●				●			●		●			●		
11	●			●				●		●				●			●		●		
11	●				●		●				●			●		●			●		
11	●			●			●					●		●		●			●		
10		●		●				●			●			●		●			●		
10	●				●		●					●		●		●			●		
10	●				●		●				●			●			●		●		
9	●				●		●			●					●			●	●		
9		●		●					●	●			●				●			●	
9		●			●			●			●		●				●		●		
9		●		●				●			●		●				●			●	
9		●		●				●			●			●		●				●	
9		●			●			●		●			●				●			●	
9		●		●				●		●				●				●	●		
9		●		●				●		●				●				●	●		
8		●			●			●		●				●			●			●	
8		●			●			●		●				●			●			●	
8		●			●			●			●		●				●			●	
8		●			●			●		●				●			●			●	
8		●			●			●				●	●			●				●	
8		●			●			●				●		●		●			●		
7		●			●			●			●			●			●			●	
7	●				●			●			●				●		●			●	


7
7
7
7
7
7
7
7
7
7
7
6
6
6
6
6
6
6
6
6
6
5
4
4
3
Freq.
9 39 2
13 37 0
10 32 8
13 21 16
10 35 5
10 33 7
15 30 5

次に内容面と強度とをあわせて考えてみることにしよう。

内容については、各項目（カテゴリーを含む）はすべて一次元的なものにされているとしよう。内容についての総得点と、その総得点をもつものとの相関表をつくってみることにしよう。此の一例を示すと次の様なものになる。

強度	内容点数							計
	0～2	3～5	6～8	9～10	11	12～13	14	
14							1	1
13								0
12	1							1
11				1		2	1	4
10					1	2		3
9	4	1	1		1	1		8
8	2	1	1	2				6
7	1	1	4	2	4	1		13
6		1	3	4	2			10
5		1						1
4		1			1			2
3		1						1
計	8	7	9	9	9	6	2	50

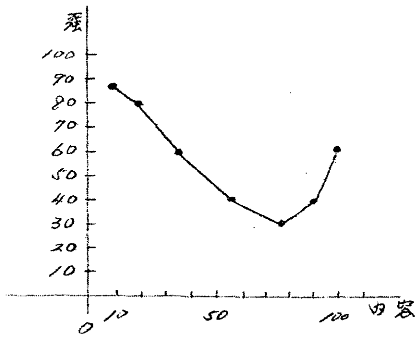
場合によって計の総点数の所をパーセンタイルであらわす場合もある。

相関表の又別の一例をあげてみる

強度 \ 毋言	0	1	2	3	4	5	6	計	パーセンタイル
6	92	78	47	21	21	13	20	292	100
5	$\boxed{37}$	50	34	21	21	6	9	178	83
4	17	50	46	22	28	11	10	184	73
3	26	$\boxed{27}$	65	39	36	13	15	221	62
2	4	22	65	60	60	27	18	256	49
1	4	20	48	45	123	34	10	284	35
0	3	12	61	59	146	30	4	315	18
計	183	259	366	267	435	134	86	1,730	
パーセンタイル	11	25	47	62	87	95	100		
強度の中央値	83	73	51	42	28	36	59		
(パーセンタイル)内容のパーセンタイルの中点	5	18	36	55	75	91	98		

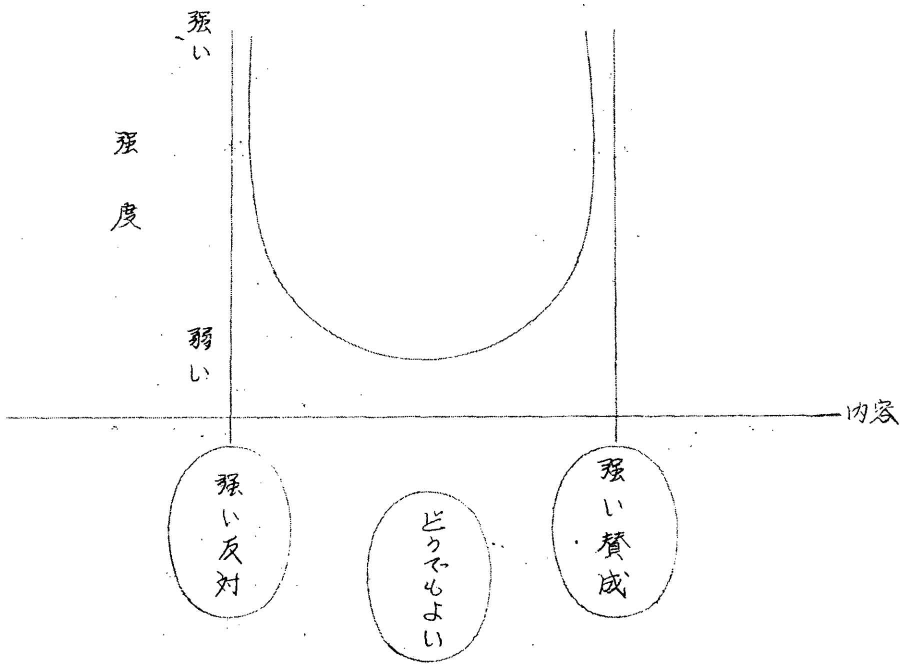
═ 中央値の位置(内容一定とした場合)

こうして内容一定とした時の強度の中央値をパーセンタイルで求めてみる。このグラフをかくと下図の様になる。強度のもっとも弱い点が内容での neutral な点(0 point)と考えるのである。この場合内容的に75パーセンタイルの点がもっとも強度がよわくなるのである。この様にして Questionnaire における neutral なもの、たとえば



(イ) 大へん好意的　(ロ) いくらか好意的　(ハ) なんとも言えぬ（わからぬ）　(ニ) あまり好意的でない　(ホ) 全く好意的でないの様な問いでは (ハ) と言うものがそれになるのであるが、此の様なものが *O point* (*neutral*) であると考えるのは強度を考慮に入れる時妥当ではないと考えられるのである。強度がもっとも弱い意見を *neutral* と考えるべきである。かうして *Questionnaire Bias* を補正すると言うことが考えられているのである。

この様な考え方は甚しい好悪 (*positive*, *negative*) な意見をもつものはその強度も強いし、それ程でないものは強度が弱くなってきている、どうでもよいもの中性的なものはその強度は全く弱いと言う理論的根據にもとづいているのである。なお[illegible]理論にしたがう時内容と強度とは U 字形の関係をもつことになるのである。



したがつてこの立場をみとめる時強度のもつとも弱い点が neutral な意見であるべき筈であるということになる。

従つて問いがうまく出来ていれば当然（ハ）の様な反応を多く示すものが強度がもつともよわくなつている筈であるが、Questionnaireの調子（Bias）でその位置がずれてきていると考えてよいのである。このような立場から Intensity Analysis によつて Questionnaie の様子を検討することができるのである。

しかしこれは全く理論的なものであつて実際的に果してどうであろうか疑問なきを得ない所もある。How strongly……？という問が Validity をもつか否か甚だ曖昧であるからである。この点さらに研究を要する。

前に示した夜間学生の問いの例について行つてみた所次のような結果を得た。

強度													
5	12				1	1							
6	2	11		4	2		1						
7				8	2	2	2		1		1		
8		1	1		3	2	2	1					1
9			1		1	2	1		1				1
10		3			1	3		1	6	4		3	[illegible]
11													1
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

内容（点）

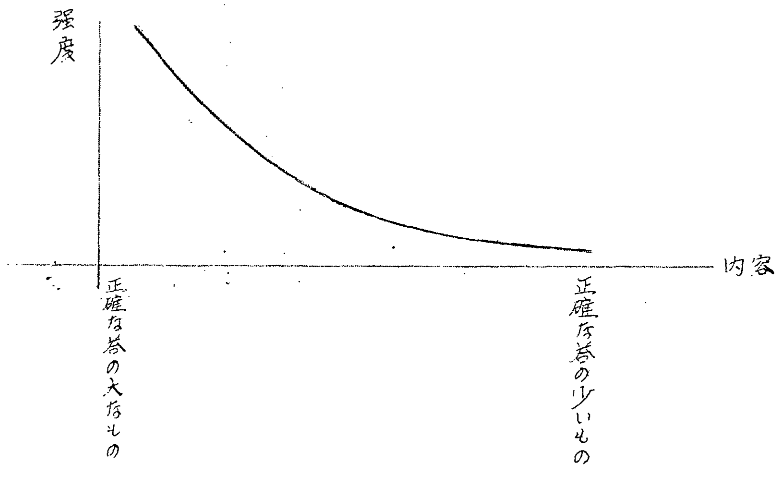
（註）　●は中央値

此の場合は強いに0，やゝつよいに1，弱いに2をあたえてある（此処で説明したのと逆になっていることに注意）内容についても逆になっている。

調査結果が Positive なものばかりであったゝめ（negative なものがでてこなかったため）前に示した例の、片翼のみが出てきたにすぎなかったが強度と内容との関係がU字形の一翼らしい関係の出ているのは興味深かった。

此の応用としてある問いの群に対する答の正確さと確信の度合との関係をみたものがある。（Information Test の例）

これはある事に対する知識をみるために何問か出すのである。各問題には正しい答えと誤った答とが書かれてある。そうして各問にその答に対する確信の程度と云うものをも"How sure are you answer ?"と言う形できくことになっている。正しい答に対しては確信が高くさうでないものに対しては確信度がひくい（あやふやな答をするから！）と言う理論を背 としているものである。本国で"戦争に関する事構の知識"をみるために色々の問いをつくりこの方法でしらべた所



のような曲線を得て理論が実証されて甚だいない結果である。今後このような発展をも研究されてよい。

Intensity Analysis の多くの実例については

Experiments on the Measurement of the Intensity function and O point in Attitude Analpis (Information & Education Division Report NO D-1 Copy NO.220 1945)

にくわしい。

本章でのべたものについての文献は下に示す通りである。未見のものについてはあげてない。そのようなものについては各文献中にある参考文献を参照せられたい。

1. Edwards (A.L) and Kilpatrick (F.P)
   Atechnique for the Construction of Attitude Scale J. of Applied Psychology 1948

2. Festinger (L)
   The Treatment of Qualitative Data by Scale Analysis
   Psychological Bulletin 1947
   (Scale Analysis に対する批判、但し根本的な誤解がある。しかし興味ある論文)

3. Guttman (L.)
   A Basis for Scaling Qualitative Data Amer. Social. Review 1944.

4. 〃 (?)
   Questions and Answers about Scale

Analysis Information & Education Division Report No. D-2 Copy No, 308 1945 (根本思想がよく書けていた)

5. (?)
Experiment on the Measurements of the Intensity Function and Zero-point in Attitude Analysis
Information & Educational Division Report No.-1. Copy No. 220 1945
(実例が豊富である)

6.
The Cornell Technique for Scale and Intensity Analysis
Measurement of Consumer Interest 1947 (本の中の一部)

7.
Intensity and a Zero-point for Attitude Analysis Amer. Socio. Review, 1947

8. Guttman (L.) and Suchman (E.)
A Solution to the Problem of Question Bias public Opinion Quarterly 1947

9. Guttman (L)

On Festinger's Evaluation of Scale Analysis Psychological Bulletin
（Festinger の批判（2で示した）を反駁したもの、彼の数量化の思想がよくあらわれて興味深）

10. Kriedt (P.H) and Clark (K.E)
"Item Analysis" Versus "Scale Analysis"
Journal of Applied Psychology 1949

11. Loevinger (J)
The Technic of Homogeneous Tests Compaired with Some Aspects of "Scale Analysis" and Factor Analysis

12. Noland (E.W.)
Worker Attitude and Industrial Absenteeism, A Statistical Appraisal
Amer. Sociol. Review 1945
（Scale Analysis を実例に応用したもの、論のはこびに多少曖昧な所がある。"米国に於ける欠勤状態の統計的調査"日本油脂株式会社，勤労部調にその紹介解説がある）

其　他　関　係　文　献

13. Angoff (W.H)
An Empirical Approach to a Problem of Psychological Scaling

J of Applied Psychology 1949

14. Ash (P)
The Reliability of Job Evaluation Ran-
kings
J. of Applied Psychology 1948

15. Goodenough (W.H)
A Technique for Scale Analysis
Educational and Psychogical Measure-
ment 1944 (Scal Analysis の別法)

16. Mc Cormick (T.C)
A Rationale for Scaling Unordered
Attributes
The Amer. Journal of Sociology
1948

第六章　Guttman の Paired Comparison 其他

前章でのべた Scale Analysis の方法は一次元的なものに分解する方法であった。こゝでは次元のことなるものを何等かの立場で綜合してゆくと言う事を考えてみたい。その一つの方法（数量化が統計数量的に解決されている！）をこゝに示してみたいと思う。この方法は前の方法と異り、得られた調査結果の内部操作によつて結論を得ようとするものでない。蓋し内部操作によつては次元のことなるものの綜合はできないのであつて、さらに別の立場から判断して綜合すると言う操作によつて始めて意味のある綜合がなされるものであるからである。この方法では判断者グループ（Judging Group）と言うものを用いてこの人々の意見をたずねると言う様な事を考えるのである。

さうして判断者に次元のことなるものゝ綜合を判断させ（此の時具体的な目標をあたえ、此の目標に対して綜合させる）その人々の意見をなるべくよく表現する様に次元のことなるものを数量化してゆこうとする行き方である。

此処でも又前にのべたように

「ある具対的な目標に対して」綜合させ数量化するのであつて「目標をかえる」事によつて綜合し方がかわり與える数量も亦かわつてくるのである。

此を行うのに Paired Comparison の方法が用いられた。此の例について考えよう。これを米国に於て各兵士の復員の順序をきめるために L. Guttman によつて考案せられたものである。

復員の判断の基礎となるものに

1. 在軍隊期間
2. 在海外期間
3. 戰闘回数

4. 年　　齢

5. 子　供　の　数

というものがとりあげられた。判断の基礎としてこれで十分であるか否か（つまりValidityあるものであるか否か）はわからないがまずこれでValidityあるものとして考えをすすめてゆこう。なほこの方法もValidityをたしかめ、問いの内容のよしあしをもめる方法ではないのであって、このようなことは他の方法によつてたしかめねばならぬのである。

しかも1，2，3，4，5 の問は各兵士に於て一次元的なものでないのは言うまでもない。まあそれはとに角これ丈の要因（項目）の比較によっていづれを早く復員させるかという事を判断グループに判断させたとしよう。

判断させるとき五つのすべての項目について同時に判断させることはなかなか実際上むつかしい事であるから他の條件は一定として五つの要因中どれか二つのものをとりあげ、それで比較すると言う方法がとられた。たとえば 1，3 をとりあげるとする。

一人は　1で　3年　3で　5回

一人は　1で　5年　3で　1回

とする。この両者は、他の2，4，5の項目（要因）では條件は全く同一であるとする。

此の二人を判断させ孰れをはやく復員さすべきかをグループの各人に判断させるのである。このような條件の下に上のような比較を原因1，2，3，4，5（各カテゴリーをもつ）の組合せ（二つ宛の）について孰れ復員をはやくさせるかを判断させるのである。

このように判断グループに判断させた後彼等の意見をよく反映するように各要因各カテゴリーに数量をあたえてゆくのである。

かくの如き数量化（次元のことなるもののある立場から綜合して一つ

の数量を得ようとする場合の数量化）方法はこの他の場合にも色々考えられる。

(イ) 優良学生をきめる問題

(ロ) 美人（ミス〇〇）をきめる問題　　云々

この時　(イ)では　学力、　健康、　性格、　趣味等々

(ロ)では　前額、　横顔、　姿、　健康、　化粧法、服装術等々

の要素がとりあげられるであろう。　これらの次元をことにするもの綜合して一つのもの測度（measure）をつくり（数量をつくり）順位をきめる様な場合、各要因のカテゴリーをを夫々数量化するのであるがこれらについても前にのべた復員の考え方が用いられる（判断者の意見を反映する数量をあたえねばならぬ！）。

以上の様な考えを以て数量をあたえる方法の一つを示してみよう。

判断グループ（此はこの範囲の人の意見を代表させたいと言う場合、その人々から母集団を構成し、それからのランダムサムプルとする）の大さは N とする。

O を object とする

O_{jp} は j item（要因）の p カテゴリーとする。例えば在軍隊期間というのをあらわすが j　3年5年等というものをあらわすのが p である。

(O_{jp}, O_{kr}) は $\left.\begin{array}{l} j \text{要因で} p \text{カテゴリー} \\ k \quad〃 \quad で \quad r \quad 〃 \end{array}\right\}$

をもつものをあらわす。

$(O_{jp}, O_{kr}) > (O_{jq}, O_{ks})$ は

（j 要因で p カテゴリー，k 要因で r カテゴリー）をもつものを（j 要因で q カテゴリー，k 要因で s カテゴリー）をもつものよりもはやく復員さす（一般にはより favourable である）と言う事を

あらわすものとする。(但し他の條件は一定!)

$j, k = 1, 2, \cdots\cdots n$ (要因の数)

$p, q, r, s = 1, 2, \cdots\cdots, m_j$ (或は m_k) (各要因のカテゴリーの数) 要因によってカテゴリーの数は異ってよい。

$e_{ijk}/pr, qs$ というものを定義するが
もし i なる判断者が $(O_{jp}, O_{kr}) > (O_{jq}, O_{ks})$ と判断すれば

$e_{ijk}/pr, qs = 1$ とする。反対の時は 0 とする。なお簡単のため $(O_{jp}, O_{kr}) = (O_{jq}, O_{ks})$ はないものとする。

此の時 $e_{ijk}/pr, qs = e_{ikj}/rp, sq$ は成立している。

又比較を行わぬときは $e_{ijk}/pr, qs = e_{ikj}/rp, sq = 0$ であるとする。

さて a_{ijk}/pr を (O_{jp}, O_{kr}) と他のものゝ比較で ~~(O_{jp}, O_{kr}) と他のものの比較~~ で (O_{jp}, O_{kr}) よりも低い(つまり $>$)と判断をした数, b_{ijk}/pr を (O_{jp}, O_{kr}) と他のものゝ比較で (O_{jp}, O_{kr}) よりも高い(つまり $<$)と判断した数とする。

$$\begin{cases} a_{ijk}/pr = \sum_q \sum_s e_{ijk}/pr, qs = a_{ikj}/rp \\ b_{ijk}/pr = \sum_q \sum_s e_{ijk}/qs, pr = b_{ikj}/rp \end{cases}$$

となる。

C_{jk}/pr : すべての判断者が (O_{jp}, O_{kr}) を含む比較をした数

$$C_{jk}/pr = \sum_i (a_{ijk}/pr + b_{ijk}/pr) = C_{kj}/rp$$

f_{ijp} を i なる判断者が高いと判断した組合せの中 O_{jp} のあらわれている回数 g_{ijp} を i なる判断者が低いと判断した組合せの中 O_{jp} のあらわれている回数とする

さうすると　当然

$$f_{ijp} \equiv \sum_k \sum_r a_{ijk/pr}$$

$$g_{ijp} = \sum_k \sum_r b_{ijk/pr}$$ が成立している

又 A_{jp} なるものを定義する。

これはすべての比較操作で O_{jp} と云うものを含むものが判断された回数であるとする。さうすると

$$A_{jp} = \sum_i (f_{ijp} + g_{ijp}) \equiv \sum_k \sum_r C_{jk/pr}$$

Fを各個人の行った比較の總数

Cを　全体の比較操作で判断の行われた回数

但し　より低い　逆にすれば　より高い　となるが、この様に一つの~~判~~断は二つの判断と約束する。

ことを含む

こゝ　$F = \sum_j \sum_p f_{ijp} \equiv \sum_j \sum_p g_{ijp}$

$$C = \sum_j \sum_p A_{jp} = 2NF$$

今 x_{jp} を　j 要因 k カテゴリー O_{jp} にあたえられる数量とする。

t_i というものを定義する。

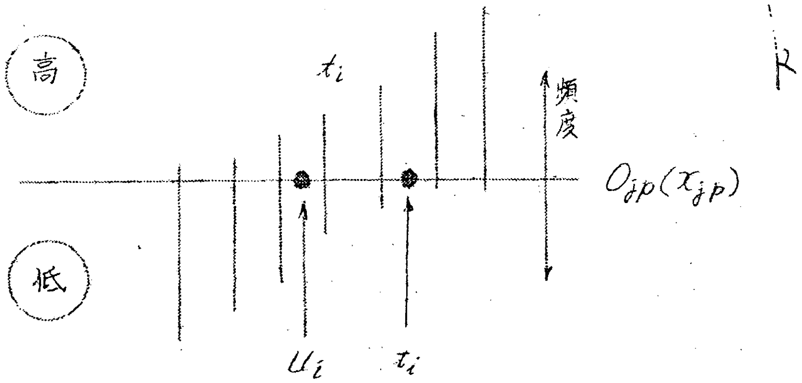
t_i は i と言う判断者が他の組合せよりも高いと判断した、組合せの平均点であるとする、つまりいろいろな組合せで i により高いと判断された要因、カテゴリーの頻度があたえられているから x_{jp} をあたえればその平均がもめられる．これを t_i とするのである。

同様に低いと判断されたものゝ平均がでる．これを u_i とする。

$$t_i \equiv \frac{1}{F}\sum_j \sum_k \sum_p \sum_r (x_{jp} + x_{kr}) a_{ijk/pr} \equiv \frac{2}{F}\sum_k \sum_r x_{kr} f_{ikr}$$

k

$$u_i = \frac{1}{F}\sum_j\sum_k\sum_p\sum_r (x_{jp}+x_{kr})\, b_{ijk}/pr \equiv \frac{2}{F}\sum_k\sum_r x_{kr}\, g_{ikr}$$



今度は同様の考えにより　高グループの中の平均からの差の二乗和y_i,
低グループの中の平均からの差の二乗和　Z_i を出す

$$y_j \equiv \sum_j\sum_k\sum_p\sum_r (x_{jp}+x_{kr})^2\, a_{ijk}/pr - t_i^2 F$$

$$Z_i \equiv \sum_j\sum_k\sum_p\sum_r (x_{jp}+x_{kr})^2\, b_{ijk}/pr - U_i^2 F$$

Vをすべての判断（高，低）の平均，Wを平均からの差の二乗和とする。

$$V = \frac{1}{C}\sum_j\sum_k\sum_p\sum_r (x_{jp}+x_{kr})\, C_{jk}/pr = \frac{2}{C}\sum_k\sum_r x_{kr} A_{kr}$$

$$W = \sum_j\sum_k\sum_p\sum_r (x_{jp}+x_{kr})^2\, C_{jk}/pr - V^2 C$$

Rを比較操作過程にたいする個人の間の差の二乗和，Sを個人の判断の中の二乗和　つまり個人間の分散（所謂外分散に相当する）、個人内判断の分散（所謂内分散に相当する）とに対応する量である。

$$\begin{cases} R = \sum_i \left((t_i - V)^2 + (u_i - V)^2 \right) F = \sum_i (t_i^2 + u_i^2) F - V^2 C \\ S = \sum_i (y_i + z_i) = W - R \end{cases}$$

こゝに於いて次のような考え方を用うる。

判断者全体のちらばり方を一定としておいて、各判断者個人の判断の~~間の~~ちらばりを最小にする。つまり高い，低いといろいろ判断するが、それら高、低の判断をしたその内部においては個人の中でちらばり方をできる丈小さくすると言う様な考えで x_{jp} の値をきめようとするのである。こうすれば判断の discriminante power の高くなるであろうことは想像に難くない。

これは上の式で言うとWに比較してSを最小にすればよい事になる。

$$E^2 = 1 - \frac{S}{W}$$ とすれば

E^2 を最大にする x_{jp} を求めればよくなる

$$E^2 = \frac{R}{W}$$ であるから、これは x_{jp} の変換に対してかわらない。したがって $V = 0$ とする様に x_{jp} をきめる条件をあたえておく

$$\frac{\partial E^2}{\partial x_{jp}} = 0$$ をもとめればよい

されば $$\frac{\partial R}{\partial x_{jp}} = E^2 \frac{\partial W}{\partial x_{jp}}$$ となる

これから

$$\sum_k \sum_r x_{kr} h_{jk/pr} = \frac{1}{2} E^2 \left(x_{jp} + \sum_k \sum_r x_{kr} C_{jk/pr} \right)$$

但し $h_{jk/pr} = \frac{1}{F} \sum_i (f_{ijp} f_{ikr} + g_{ijp} g_{ikr})$

を得る。この方程式をといて X_{jp} の値をもとめるのである。
なおこゝに trivial Solution といわれるものがある。

$$X_{jp} = 1.$$

（すべての jp）というものであり、此の時 $E^2 = 1$ と最大になるがこのようなものは我々の目的に添わぬのでこれ以外の解をもとめねばならぬ。此の解は存在するのである。

解法は逐次近似の方法（Successive Approximation）によらざるを得ないが甚だ面倒なものであり、要因カテゴリーの数が多いとき実際になかなか求められぬ場合がある。

計算例としては統計数理研究所の石田正次氏の行ったGuttmanのPaired Comparison の計算例（人事院、能率局プリント）を参照せられたい。

しかし、とに角この様な数量化の方法は全く合理的な立場に立っているものであり興味深い。さて、此の様に数量を与えたものは判断者の意見を綜合的によくあらわしているであろうか。このようなConsistecyをみるために次のような考えをつかう。

$$\left\{ (x_{jp} + x_{kq}) - (x_{jq} + x_{kr}) \right\} \text{と}$$

$$\left\{ \sum_i e_{ijk/pr,qs} - \sum_i e_{ijk/qs,pr} \right\}$$ との符号が一致しているか？ ということをみるのである。

全体で高いと判断されたものはより大きな数量をもっているか ということによってConsistency がみられるのである。これは各人の意見をよくあらわしているか否かをみるための一つのReproducibility，一面の Validity，を測定する考え方である。

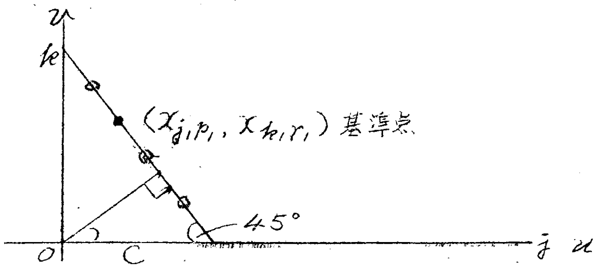
此処で注意しなければならぬのは以上のべた方法は綜合というこ此

次元のことなるものを役員と言う立場から—— 綜合して一つの数量（数量の大小か *favourable* か否かを決定する！）をつくりあげるということを甚だ合理的に行っている方法ではあるが"*Consistency* を最大にする"と言う立場から数量化されておらぬ事に思いをいたさねばならない。以上によって *Guttman* によって考えられた数量化の方法の話をおわって次に進もう。

Consistency を最大にする、このようなことは可能であろうか。*Paired Comparison* で大小関係でなく等しいということを判断させるならばある程度できるものと考えられる。これについて考えた事をのべておこう。簡単のため要因は二つとして（j, k の二つとする）$(O_{jp}\ O_{kr}) = (O_{jq}\ O_{ks})$ の様なものをみつけることとしよう。判断の方法としては一つの $(O_{jp}\ O_{kr})$ を固定しておいてそれと比較される組合せのものをそれより *favourable* な（大なる）もの *unfavourable*（小なる）のものにわけてゆきだんだん近いものをみつけてゆき、さいごに *equal* をみつける様にするのである。勿論これは一つでなく多くある事であろう。或は基準点 $(O_{j_1p_1}, O_{k_1r_1})$ をきめておいて同じと判断されるものをあつめるのである。

大砲を的に命中させる要領で遠い、近い、遠い、近いでだんだん近づけてゆく方法である。これが出きたとするとき O_{jp} に x_{jp} なる点をあたえるのであるがどうするのであるか。

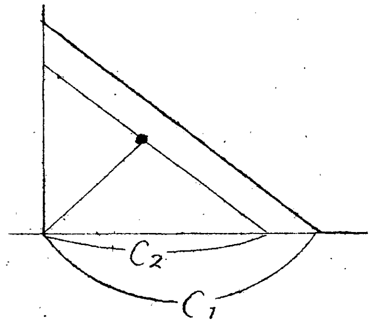
今数量化されたとしよう。



同じと判断されたカテゴリー要因が、$u+v=C$ と言う様な45°傾きをもつ直線上に乗る様に数量化

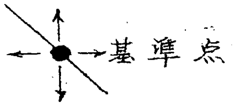
するとしよう。このようにして数量化さるとすると、原点と直線との距離 $\frac{C}{\sqrt{2}}$ が同じと判断された要因、カテゴリーにあたえられる数量となるのである。今もし

$$\frac{C_1}{\sqrt{2}} > \frac{C_2}{\sqrt{2}}$$ とすれば



C_1 の方の直線は外側にある。したがって $\frac{C_1}{\sqrt{2}} > \frac{C_2}{\sqrt{2}}$ なら C_1 の方にのっている要因カテゴリーは C_2 の方にのっているものよりも *favourable* と言えるのである。各判断者は勿論かゝる様に判断しているのである。

なんとならば



基準点より上又は右の方にあるものは高い

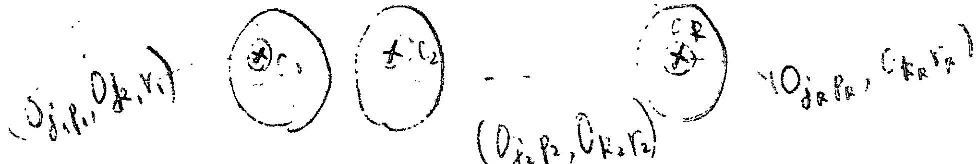
下又は左の方にあるものは低いと

判断を行った筈であるからである。

しかし実際は各判断者の判断はことなっているから全部うまく直接上にのるとはかぎらない。したがって我々としては等しいと出た判断の結果から O_{jp} がその直線上にのる様に x_{jp} を数量化すること考えよう。此の考えはある意味で、$\frac{C_1}{\sqrt{2}} > \frac{C_2}{\sqrt{2}}$ なら C_1 にのる方が C_2 による方より *fovourable* であるという事をなるべくよくあらわそうとする。即ち *Consistency* を最大にするというような数量化であると考えられる。

最小自乗法の考えによってゆく

$$Q = \sum_{i}^{R} \left\{ \sum_{e} (u_{ie} + v_{ie} - c_i)^2 \right\} - \sum_{i=1}^{R} \lambda_i (x_{j_i p_i} + x_{k_i q_i} - C_i)$$



但し　λ_i は常数　　i はあらかじめ設定する基準点をあらわし、Rはその設定した数とする。u_{ie}, v_{ie} はあらわれてきた要因カテゴリーにあたえられている点数であるとする。

さて i なる基準点に対するの比較で（O_{jp}, O_{kr}）なる組合せが $f_{ijp/kr}$ 回おこってきているとする。

さうすると

$$Q=\sum_{i=1}^{R}\left\{\sum_{j}\sum_{p}\sum_{k}\sum_{r}(x_{jp}+x_{kr}-C_i)^2 f_{ijp/kr}\right\}$$

$$-\sum_{i=1}^{R}\lambda_i\,(x_{j_i p_i}+x_{k_i r_i}-C_i)$$

となる。

$\frac{\partial Q}{\partial x_{jp}}=0$　$\frac{dQ}{dC_i}=0$ として x_{jp} を求めること C_i を求めることができる。かくして数量化が行われる要因が二つ丈の事をこゝではのべたがそれを n 個に拡張すれば n 次元の hyperplane を考えることによって同様の解決を得ることができる。

或は又 Paired Comparison の方法を重ね合せても可能である。この方は計算法も簡単であり実際的であるが基準点のとり方に多少問題があるであろう。

なおいろいろの数量化の方法が考えられるが今後の研究にまつものが多い。以上によって綜合の立場の数量化の話をおわるのであるが最後に注意を一つのべよう。

こゝでのべた数量化も全くその方法に依存しているのであってPaired Comparison も方法をかえることによって数量と言うものは変ってきてしまうのである。たとえば要因の数をへらしたり、ふやしたり、或は又カテゴリーの数をへらしたり、ふやしたり、することによって同一要因、同一カテゴリーと言えどもその時々によって与えられる数量は変ってきてしまうのである。つまり数量は全くその方法に依存するものな

のである。そのどちらかより我々のよいより有用な行動の規準となるかは判断を行った後の follow up なる実証的研究にまたねばならない。こうして要因、カテゴリーを Validity あるものにし、数量化を合理化してゆかねばならない。数量化は単なる数量的考察の独断におちいるべきものでなく、実際的に意味があって始めて価値があるものであるからである。特にこのようなものに関しては実際との対応を考え、逐次近似の方法によってよりよい数量化の方法を考えねばならない。意味ある Validity ある数量化と言うものは実際に有用であった、将来も有用であると考えて差支えがないであろうと科学的に判断できる所にのみ見出されるのである。

参考文献

Guttman (L.) An Approach for Quantifying Paired Comparison and Rank Order
Annals of Mathematical Statistics
1946

第七章　現象豫測の立場よりする数量化

此度は前にのべた数量化の方法と立場を異にする。現在何等かの調査を行い、その調査対象の将来の様態を予測する問題をとりあげ、その予測の精度を最大にする様に数量化する事を考えるのである。予測を行うとき質的のまゝとりあつかうのでは集団のものについて予測の科学性を期し難いのは当然であろう。此のような問題をとりあつかうのに際して仮釋後予測の問題について研究した結果を次にかゝげておこう。

（註）

この様な将来予測　ある人の社会的予測後の予測、病人の予後の予測、学生の社会的予後の予測等々をするときその精度（正当な判断率）を最大にする問題は種々多いと思われる。こゝでのべるような考えは相当応用せられるであろう。

"定性的なものゝ統計的数量化の立場*"

§1. 定性的なものを数量化して社会心理事象を科学的に把握しようとする試みは相当以前から行われているが、それを方法論的にみるとき信ずべき理論的根據の上に立って居るものが少く、与えられる数量も頗る任意なものが多いと思われる。

数量化と言うものは具体的目的なくなさるべきものではない。具体的なことに「対して」のみなさるべきものである。我々がある事に関して知識を得たいと思う時、又ある事に対して有用な行動基準を得たいと思うとき、最もよくこの目的に適った合理的立場、方法によって数量化はなさるべきものなのである。従ってその方法によって与えられる数量というものは夫々の目的に対し有用な結果を与えると言うことが科学的に明確にされておらねばならないのである。

*昭和24年度心理学会に於て発表

此の様に数量化というものは絶対的意味をもつものではなく、夫々の目的に対し相対的に決定せらるべきものであるといえるであろう。定性的なものの数量化と言う事は飽く迄も我々に対して唯機能的な意味しかもっておらぬ事を忘れてはならないのである。

以上の様な立場よりする数量化は外国に於ては Guttman (Scale Analysis, Intensity Analysis, Paired Comparison), von Neuman (Theory of Games. 意欲、行動の数量化)によって次第になされつゝあるが未だ完全に透徹したものは見受けられない。我国においてもこの種問題に関して漸次よい研究がなされつゝある。

こゝでは現象予測という事の精度を最大にする立場から定性的なものを数量化する問題をとりあつかってみようと思う。特に犯罪者の社会的予後を予測する問題(仮釈放の成功失敗を予測する問題)をとりあげ、これを例としてその一般的な考え方、取扱い方に実際を示してみることにしよう。

§2. 仮釈放予測とはどのような事であるか。受刑者が刑期の $\frac{1}{3}$ 以上を終了した場合、その受刑者の行状、身上調査を行い、釈放しても差支えない ——— 社会的予後がよい、即ち教育効果が十分であり再び罪を犯すことがない ——— とみとめられる時、その受刑者を釈放する事が出きると言う制度がある。

現在迄調査の結果が如何に科学的に綜合されて仮釈放すべきか、否かが決定されていたであろうか。これには相当問題とすべき点があるのである。

我々としては此の問題をとりあげ、調査の結果を数量化し、その数量を用い、予測の精度を最大にする、即ち釈放後予後の良いものを良いと判定し、悪いものを悪いと判断する率を最大にするように考えをすゝめて行った。こゝに定性的な性質を予測の精度を最大にする立場

から数量化する問題が生じてくるのである。

今まで如何なる調査が行われていたであろうか。調査の結果釈放すべきか否かの判断を決定する要素となるものを要因と名づけておこう。調査は受刑者について各要因を身上調査的に調査する様に仕組まれているのである。

此の要因には従来のさまざまの結果分析から、予後を判定するのに意味あると認められたものゝみが用いられていた。例えば此には身体的、素質的、遺伝的状況、家庭環境、職業、居住の状況、経済生活の様態等々のものが数えあげられている。然し我々としては此の様な外面的なもの許りでなく実在的に考えて立体的、力動的なものをとりあげた。即ち受刑者の生育し来った模様、受刑中の行動、犯行に関する心理、被害者に対する心理、受刑に対する心情、現在に於ける意欲、心情、社会に対する態度をも含めた広い意味のものである。

此の様な事項に関して調査を行い、問いに対する各受刑者の反応を数量化し、仮釈放すべきものゝ予後を推測することになるのである。それでは如何に数量化すべきであるか。如何に数量を結合し、如何に具体的予測の決断をなすべきであるか。

このねらう所は繰返し言う様に予測の成功率(正当判断率)——コレクティフの立場よりする確率によって表現せられる——を最大にするという立場である。

§3. 数量化の具体的方法

仮釈放に成功した受刑者群、失敗した受刑者群、これを夫々A, B集団と名づけることにするが、此の二集団について前にのべたような調査を行うのである。

次に調査の結果を見て各要因の反応を数量化し、A、B 両集団の各人について要因点数のウエイトをつけた総和をつくり、A, B 両集団でどのような分布が示されるかを把握するのである。この様にし

て仮釋放してよいか否かを判断する基準を見出すと言う立場をとってゆこうと思うのである。

一般には諸予測要因の結合は和の形でなく任意の函数関係であってよいのであるがこゝでは和の形をとるものとして話をすゝめてみよう。

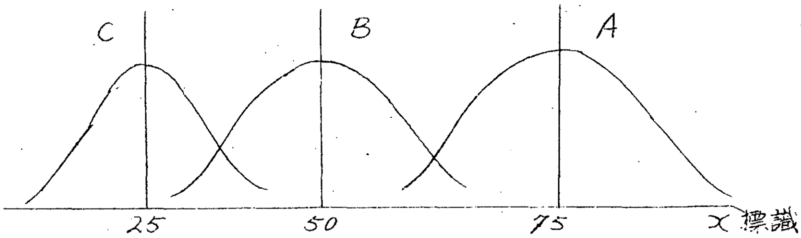
このような考え方によって論を具体化してゆく方法が最良のものであるか、否かはなお問題の残る点ではあるが、問題解決に必要な一つの図式の型（*formulation*）を想定し一つの足掛りをつくりこれに対して最も能率のよい具体的な予測の方式基準を実験的に決定してゆこうとすることは *Successive Approximation* の考えでは当然許される事であろうと思う。

さて今各要因に数量はあたえられたものとし、なお且 A, B 両集団に於て要因点数の分布が決定されたものとしよう。

このように得られた二つの分布を如何にとりあつかうかをのべるに当ってまず *R. Von Mises* の理論を用うることにしよう。

今標識 X に関して夫々ある分布構造 $p_1(x), \cdots p_2(x), \cdots p_n(x)$（密度函数）をもつ n 個の母集団を考えよう。

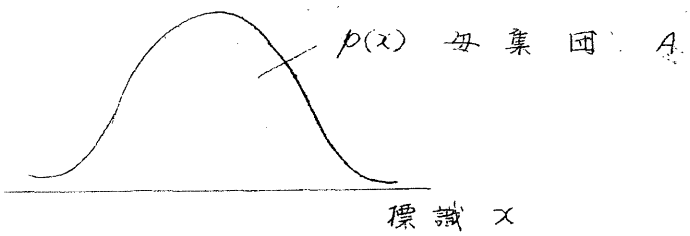
今一つの試行によって x_0 なる値を得た時、これが如何なる母集団に属していると判断すればよいか。この判断の信頼度はどの位であるかを考えるのである。まず実例として三つの母集団 A, B, C を考える。標識 X は実数によって表わされているとしよう。母集団 A, B, C の分布函数はみなガウス分布函数であるが平均は夫々 75, 50, 25 であり標準偏差は夫々 $\sqrt{2}$, $8\sqrt{2}$, $12\sqrt{2}$ とする。



今xとして45を得たとするとき、これが如何なる母集団（AかBかCか）のサムプルと考えたらよいか。これに関して我々は信頼度の高い判定規準を与えようと思う。

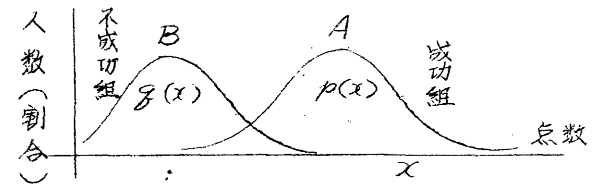
21点以上はAに属する
2点以下はC 〃
その間は B 〃

というような判定規準を定めれば、その信頼度 l % がある（l%を最大にするにはどのような規準をあたえるべきかが Mises の理論の中心点である）という様な Proposition を得ようと思う。我々の仮釈放予測の時は次のように考えられる。まずAについて考える。このAは仮釈放に成功するものとし、その標識は各要因のある合計総得点とする。そして今各個人の抽出される確率は同一と考える。この時その抽出された系列がある分布 $p(x)$ をもつ「コレクティフ」をなすと考える。即ちAはこのいみで母集団をなしている。いいかえれば母集団Aは分布 $p(x)$をもっていると考えることにしよう。



同様に考えてBとしては仮釈放に成功しないものの要因總得点数のある分布 $g(x)$ をもつ母集団即ち予測に成功しないものゝ要因總得点は $g(x)$ なる分布をもつとしよう。

此の時甲なる犯罪人が要因得点 x^* を得た時A, B何れに属するとすべきである



か、その時の信頼度は如何になるか、という形の予測の問題となるのである。此の理論の結果だけを述べてみよう〔定義〕先ず成功率（信頼度）をつぎのように定義する。「我々が一定の Proposition を與えた時正しい結論（Aに属すべきものをAと判断する等）を得る確率を成功率と言う。」即ち信頼度、成功率は正当判断率とも称すべきものである。

〔記号の説明〕$P_\nu = \int_{R_\nu} p_\nu(x)\,dx \quad \nu = 1, \cdots, n$ とおく。但し R_ν は x のある領域（區間）をあらわす。P_ν は母集団 ν の R_ν に属する確率を與える。

〔揚言〕 P_ν がすべて同一（Pとする）になる様に x を n 個の領域（區間）R_ν に分割せよ。此の時 Optimum な結果をうるのであり、高い成功率を示し得る。この成功率は P に等しい。この証明は略して実例にうつろう。前述の A, B, C の Class の問題に立ち戻ってみる。この時は

$$P = \int_u^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_A} e^{-\frac{(x-m_A)^2}{2\sigma_A^2}} = \int_v^u \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_B} e^{-\frac{(x-m_B)^2}{2\sigma_B^2}} dx$$

$$= \int_{-\infty}^v \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_C} e^{-\frac{(x-m_C)^2}{2\sigma_C^2}} dx$$

になる様に u, v を定めればよい。

但し

$$m_A = 75 \qquad \sigma_A = 4\sqrt{2}$$

$$m_B = 50 \qquad \sigma_B = 8\sqrt{2}$$

$$m_C = 25 \qquad \sigma_C = 12\sqrt{2}$$

かくして $u = 70$, $v = 40$ を得る。この時の成功率 P は96.1

%となる。

仮釈放予測の場合も同様である。今

A 母集団の分布が $\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$

B $\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma'} e^{-\frac{(x-m')^2}{2\sigma'^2}}$

とする。此の時 Optimum な分割は

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{x_0}^{\infty} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}\,dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma'}\int_{-\infty}^{x_0} e^{-\frac{(x-m')^2}{2\sigma'^2}}\,dx$$

になる様に x_0 を定めればよい事になる。此の x_0 の値は

$$\frac{x_0 - m}{\sigma} = -\frac{x_0 - m'}{\sigma'}$$

$$x_0 = \frac{m\sigma' + m'\sigma}{\sigma + \sigma'}$$ であたえられる。

ある受刑者の調査の結果の点数が x_0 以上ならばそのものはA集団に属する（仮釈放に成功する）以下ならば母集団に属する（仮釈放に失敗する）と予測するのである。

此の時の成功率は

$$P = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\frac{m'+m}{\sigma+\sigma'}}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt$$

となる。

それならば母集団A, B, に対していかにして $p(x)$, $q(x)$ を発見

できるかの問題にうつろう。その前に確率論でよく用いられる中央極限定理をのべておこう。

〔定　理〕　$X_1, \cdots\cdots X_n$ を独立な確率変数（コレクティフ）としその平均を $m_1, \cdots\cdots m_n$，標準偏差を $\sigma_1, \cdots\cdots, \sigma_n$ とする。

この時

$$X = X_1 + \cdots\cdots + X_n$$ を考える。

(i) $S_n^2 = \sigma_1^2 + \cdots\cdots + \sigma_n^2$ とする。

S_n^2 は X の の分散である。

(ii) 各 X_i は有界 $|X_i| \leqq A$ とする

この時 $\dfrac{X - (m_1 + \cdots + m_n)}{S_n}$ は n が大となり $\dfrac{A}{S_n}$ が小となる程ガウス分布に近づく

X は分散 S_n^2，平均 $(m_1 + \cdots\cdots + m_n)$ のガウス分布に近づく。

我々の場合 $X_1, \cdots\cdots, X_n$，は各要因からつくられるものと考えられる。

今前述の仮釋放予測に於けるAなる母集団、仮釋放に成功するもの即ち過去成功したるもの、未来成功するものを含む）にのみ一応着目して考えよう。しかし我々としてはAなる集団に関しては過去のものについて即ち成功したものについてのみしか実際的な知識は得られていない。これを一応の予備知識としてはなしを進めよう。

我々はこゝではAなるものを、しばらくは現実的な調査の対象としてではなく、理論的模型と考えて論を進め後に調査の問題にうつろうと思う。今「要因その一」をしらべ此の要因中の各段階（例えば要因その一

を父母関係と考え各段階は両親あり、父あり、母あり、両親なし、という項目に相当する）に夫々、0，1，2，3 等の数値をあたえておく。Aなる集団の中0がa％，1がb％，2がc％，3がd％あったとする。そしてAなる集団は此の標識に関して前にのべた意味で母集団をなすものと考える。此の時X_1は標識0，1，2，3 をもちその分布a，b，c，dであたえていると考えられる。此の様な手続きで各要因に対して確率変数をあてはめておくことにする。a，b，c，d 等は通常未知であるが調査したサムプルの値から推定することはできる。

かくして　$X = X_1 + \cdots\cdots + X_n$ をつくればこれは各要因の総得点をあらわす確率変数と考えられる。Aなる母集団のもつ総得点の分布を示す確率変数と考えられる。

$X_1 \cdots\cdots \cdots X_n$なる要因は独立と考えられぬ場合があるが今簡単のため独立としておく。独立でなくても実は統計学的に同様に議論を進めることが出来る。

我々の場合X_iが有界であることは数量化の仕方から明らかであり、又これらから計算されたσ_i^2は正の値をもちそれらの和S_n^2もnが大になれば大になることがわかるのでXはガウス分布に近づく（nが大の時）ことが定理からわかる。又この時の平均は（$m_1 + \cdots\cdots + m_n$）

分散は（$\sigma_1^2 + \cdots\cdots + \sigma_n^2$）

である。つまりこのようにして総点数の分布は母集団Aについてそれらの平均と分散をもつガウス分布と考えて大過ないことが了解せられるであろう。総得点は母集団Bに対しても同様ガウス分布をなすことがいえよう。

然し以上の様な事は模型的な母集団についての議論であり且つ中央極限定理にもとづく理論的予想である。此の様な模型と理論とが実調査に於て如何に用いられるかを示そう。我々としてはA，Bについては過去の資料（Sample）というものしか知り得ていない。我々の言うA，Bというものは過去、未来を通じての成功者、失敗者、についての

母集団であらねばならない。そうでなければ予測という問題は成立しない。過去の事象の分析が未来の予測に用いられるのはこのような仮設にもとづくものなのである。過去と未来とが全く異質的なものであるならば、(同一母集団に属していないならば)予測という事は不可能なことである。今の場合も然りである。過去の分析を未来に役立たせようとする我々の立場は過去と未来とが定めた標識の分布と言う点に関して同一であると言う仮設にもとづいているものである。これは問題かもしれない。然し標識分布の基礎となる社会的状況人間現象の動的構造に於て過去と未来とがそう変化しないという範囲はありうると考えられる。そういう範囲の過去の資料を用いそういう範囲の未来を予測するのが我々の方法の基礎にあるのである。二十年昔の資料を用いて今のことを予測するのではないのである。このような考察から得られた過去の資料は、A、Bなる母集団の値のランダムサムプルであるという仮設に立って近似的に論をきずきあげてゆこうと思う。ランダム、サムプルと言うよりむしろ実際は母集団の値とせざるを得ないのであるが、その値の得られたことの 偶然性を考慮に入れる時その値の信頼性を問題にしなければならず従って過去の資料の数量が重大になるのであるから、ランダム、サムプル(現実の資料は実はある仮想的母集団 —— これについて我々は論じたい ——の一つの偶然的現われにすぎないという考え)という考えを用うるに至るのである。

いゝかえてみるならばこれは過去の資料が相当統計的観点に立って信頼するに足る丈の量がなくてはならないということなのである。

さて過去の資料から得られた値について要因合計の總得点の分布をつくり母集団がいかなる型の分布を示すと考えてよいかを調べねばならない。その為にまず母集団の型について仮設を立てねばならないのであるが、この型として理論的に予想される ガウス 型をとってみるのが至当であろう。即ち「母集団の型はガウス型であり ——— 此の平均分散はサムプルから計算される(各要因の其等の値の和として計算せられる)

——— サムプル はこの母集団からのサムプルであるという仮説をたてこれを検定し（χ^2－ 検定法を用う）してみなければならない。そしてもしこれが棄却できないという結論をうれば理論的に保証のあるガウス分布を母集団の型とみて差支えないと考えられる。
然しこの時 A, B, なる二つの母集団の分布函数に差がないならば我々は予測に対して何もいえないことになって了うのであるから予測に有利な要因を剔抉しこれを更めて数量化し、それらの結合方法を考え分布の型を検定しなるべく、A, B. 集団の分布に差がおこるようにしなければならない。

さて今までは要因が数量化されたものとし、その要因の総合計点数の分布が得られたものとし、サムプル の示す点数をながめこれが A, B 集団の孰れに属するとすべきかの判断をきめる点を求めこの正当判断率を最大にする事を考えてきた。

次にこゝでは上の様な正当判断率を得るためには各要因を如何に数量化すればよいか、これを考えてみよう。

<u>第一段階</u>　今までは各要因の構造にアプリオリに 0, 1, 2, 3, 4 等 の 点 を與えていたのであるがまずこの点からなおしてゆこう。第 i 要因内の数量化について、今この要因の階段をあらわす標識を $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ としてみよう。A 母集団ではその構成が $p_\alpha, p_\beta, p_\gamma, p_\delta$ %、B 母集団ではその構成が $q_\alpha, q_\beta, q_\gamma, q_\delta$ %とする。

$$p_\alpha + p_\beta + p_\gamma + p_\delta = 100$$

$$q_\alpha + q_\beta + q_\gamma + q_\delta = 100$$

これから要因 i 内部の平均と分散とを計算することが出来る。

今我々は（A, B 母集団に対し）分散を一定値（例えば 1）とし, それらの平均の差を最大にするように $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ をきめることにする此の時二つの平均の和を 0 又は一方へ平均の和を 0 にするかして $\alpha, \beta,$

γ, δを一意的に決定する必要がある。かくして単に各段階に形式的に0, 1, 2, 3 等 をあたえるのでなく上述のような意味をつけてα, β, γを定め、まずi要因内の段階の数量化をしておくのである。このように数量化した時、A母集団 B母集団の確率変数をx_i, y_i とし平均をm_i m_i' とする。

なお実際問題としては $p_\alpha, p_\beta, p_\gamma, p_\delta$ $q_\alpha, q_\beta, q_\gamma, q_\delta$ m_i, m_i' は過去のサムプル値から推定の形でなされる第二段階 単に総平均点数でなく

$$a_1 x_1 + \cdots\cdots + a_n x_n = X$$

$$a_1 y_1 + \cdots\cdots + a_n y_n = Y$$

のような得点を考える。但し$\sum a_i = n$でありウエイトである。この時Xの平均は $a_1 m_1 + \cdots\cdots + a_n m_n$

Yの平均は $a_1 m_1' + \cdots\cdots + a_n m_n'$

Xの分散 は $a_1^2 + \cdots\cdots + a_n^2$

Yの分散 は $a_1^2 + \cdots\cdots + a_n^2$

（X, Yについて各分散を1と定めたから）

となる。X, Yがnが大の時一般にガウスに近づくことも同様に考えられる。

今X, Yがガウス分布をなすものと仮定せられる時 mises のいう成功率（正当判断率）

$$P = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{m'-m}{\sigma+\sigma'}}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$ を最大にする

即ち $\frac{m'-m}{\sigma+\sigma'}$ を最小にする。即ち $\frac{m-m'}{\sigma+\sigma'}$ を最大にすることを考

えこのようにウエイト（$a_1 \cdots\cdots a_n$）を定めることが合理的と考えられる。$\frac{m-m'}{\alpha+\alpha'}$ をこの立場に立ってかきなおせば

$$\frac{a_1(m_1+m_1')+\cdots\cdots+a_n(m_n-m_n')}{2\sqrt{a_1^2+\cdots\cdots+a_n^2}}$$ となる。

$m_i - m_i' = l_i$ とおく。この時 a_i に関して

$$f=\frac{a_1 l_1+\cdots\cdots\cdots+a_n l_n}{\sqrt{a_1^2+\cdots\cdots\cdots\cdots+a_n^2}}$$

を max にすればよいのである。
そのため $\frac{\partial f}{\partial a_i}=0$ をつくり

$\Sigma a_i = n$ を條件とすれば

$$a_i=\frac{l_i}{l_1+\cdots\cdots+l_n}\cdot n=\frac{l_i}{\Sigma l_i}\cdot n$$ を得る。

此の時最大の成功率を得ると言うことになる。これが第二段階の数量化である。（つまり a_i によって各要因を数量化した。）

以上のような第一，二段階の数量化と最後の *Proposition* とをまとめてみる時次のようになる。

(i) $Z = a_1 z_1 + \cdots\cdots + a_n z_n$

Z なる受刑者の得点を以上により算出する。此は A, B 孰れかからの母集団のランダムサムプルであると考える。これをいずれの母集団からのサムプルと判定すべきか，此の解決は上にのべたように次のようにして行える。

(ii) つまりこれが $$x_0=\frac{m\alpha'+m'\alpha}{\alpha+\alpha'}$$

但し　$m = a_1 m_1 + \cdots\cdots + a_n m_n$

$m' = a_1 m'_1 + \cdots\cdots + a_n m'_n$

$\alpha^2 = \alpha'^2 = a_1^2 + \cdots\cdots + a_n^2$

以上か以下かを比較し、いずれの集団に属するとすべきかを決定する。

(iii) 此の時の成功率（正当判断率）

$$P = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{m'-m}{\alpha+\alpha'}}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}t^2}\, dt$$ によって与

えられる。

$$但し\quad \frac{m'-m}{\alpha+\alpha'} = -\frac{\sqrt{\Sigma l_i^2}}{2}$$

このように数量化は唯単に抽象的、一般的に行われるものでなくて、各場合に応じて得ようとする *Proposition* に対して行われるものであり、この場合は予測に都合よい数量化といえるであろう。

なお実際問題として以上の数量化の方法、基準の決定は各サムプルの値からなされる母集団のそれらの値を推定すると言う論理になるのであるから当然推定の信頼度を考えねばならない。此の時の誤差の問題は複雑であり、今こゝではふれぬことにする。

以上のような理論構成は見透しよくするために $X_1 \cdots\cdots X_n$ を独立とした。

独立でない場合も次のようにして考えられる。

X_i と X_j　Y_i と Y_j との相関係数がともに等しく ρ_{ij} であるとしよう。同様に

$X = a_1 X_1 + \cdots\cdots + a_n X_n$

$Y = a_1 X_1 + \cdots\cdots + a_n X_n$　とす。此の場合、

中央極限定理もわずかの條件で独立の場合と同様に成立する事が知られている。

此の時 X, Y の 分散 σ_X^2 σ_Y^2 は夫々

$a_1^2+\cdots\cdots+a_n^2+2\sum_{i\neq j} a_i a_j \rho_{ij}$ となる。

したがって $\dfrac{m-m'}{\sigma+\sigma'}$ は $\dfrac{\sum a_i l_i}{\sqrt[2]{\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2+2\sum_{i\neq j}^{n} a_i a_j \rho_{ij}\right)}}$

とあらわせる。

これから $\sum a_i = n$ の條件の下に上の式を極大にするような a_i ($i=1, \cdots\cdots n$) を求めればよい。

これは全く同様にして簡単に求められる。

この独立でない場合は現実にもっともよくおこる場合である。一つ一つの要因の組合せによって特異な一つの複合要因としての依数放成否判定にきわめて役立つ場合も多いと思われる。

今迄は Mises の揚言 Optimum な事に関してのべてきたものである。Optimum という点を少しく分析してみよう。

前にのべた $P_\nu = \int_{R_\nu} p_\nu(x)dx$ は ν 番目 class に属しているものが K_ν 内に落ちこむ確率である。Trial の無限に続く系列の中最初の N 回中本来 ν 番目に属しているものが N_ν 回丈あったと考える、この N_ν 中 x の値が R_ν の中に落ちているもののみを ν 番目の class に属していると決定したとするならば此の数は $N_\nu(P_\nu+\varepsilon_\nu)$ —— $\varepsilon_\nu \to 0$ ($N_\nu \to \infty$ の時) —— である。従って N 回の trial 中観測値により正しい判断をなしたものの数は

$N_1(P_1+\varepsilon_1)+\cdots\cdots\cdots\cdots+N_n(P_n+\varepsilon_n)$ であり此の度合は $\frac{N_1}{N}(P_1+\varepsilon_1)+\cdots\cdots\cdots+\frac{N_n}{N}(P_n+\varepsilon_n)$ となる。

$N\to\infty$ の時 $N_\nu\to\infty$ となるから $N\to\infty$ の時 $\varepsilon_\nu\to 0$

したがって正しい判断の率は

$\frac{1}{N}(N_1 P_1 + \cdots\cdots + N_n P_n)$ となる。N_ν は未知である。今 $P_{min} = min\ P_\nu$ とするならば、上の式が最小の値をもつ場合、即ち正しい判断の率が最小の場合は $N_{min} = N$, 他のすべての $N_i = 0$ となる時おこるのであり、この値が P_{min} となるこのように考えると正しい判断をなした場合の度合は少くも P_{min} に等しいことがわかる。この P_{min} を最大にするように考えたのが Optimum な結果なのである。$\frac{N_\nu}{N}$ が未知の場合はこうせざるを得ないのである。

今 $\lim_{N\to\infty}\frac{N_\nu}{N} = Q_\nu$ が既知であるとしてみよう。我々の場合、A, B 二集団について $Q_A\ Q_B\ (=1-Q_A)$ が解っている、言いかえるならば釈放者中 Parole に失敗するものゝ比率 $Q_B = Q$ がわかっているものとしよう。此の時正しい判断をした率は

$S = Q_B P_B + Q_A P_A = Q P_B + (1-Q) P_A$ であたえられる。今

$$P_B = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma'}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(x'-m')^2}{2\sigma'^2}}\,dx'$$

$$P_A = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{x}^{\infty} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}\,dx$$ としてみよう。

$$S = Q\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\frac{x-m'}{\sigma'}} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt + (1-Q)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

$$\int_{\frac{x-m}{\sigma}}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt$$

となる。Sを最大にする様なxを求めてみるならばこれは

$$\left(\frac{1}{\alpha'^2}-\frac{1}{\alpha^2}\right)x^2+2\left(\frac{m}{\alpha^2}-\frac{m'}{\alpha'^2}\right)x+\left(\frac{m'^2}{\alpha'^2}-\frac{m^2}{\alpha^2}\right)-2L=0$$

但し $L=\log_e\dfrac{Q}{1-Q}\ \dfrac{\alpha}{\alpha'}$

を満足しなければならない。

今 $\alpha'=\alpha$ とするならば

$$x=\frac{1}{2}\left\{(m+m')+\frac{2L\alpha^2}{m-m'}\right\}$$ となる

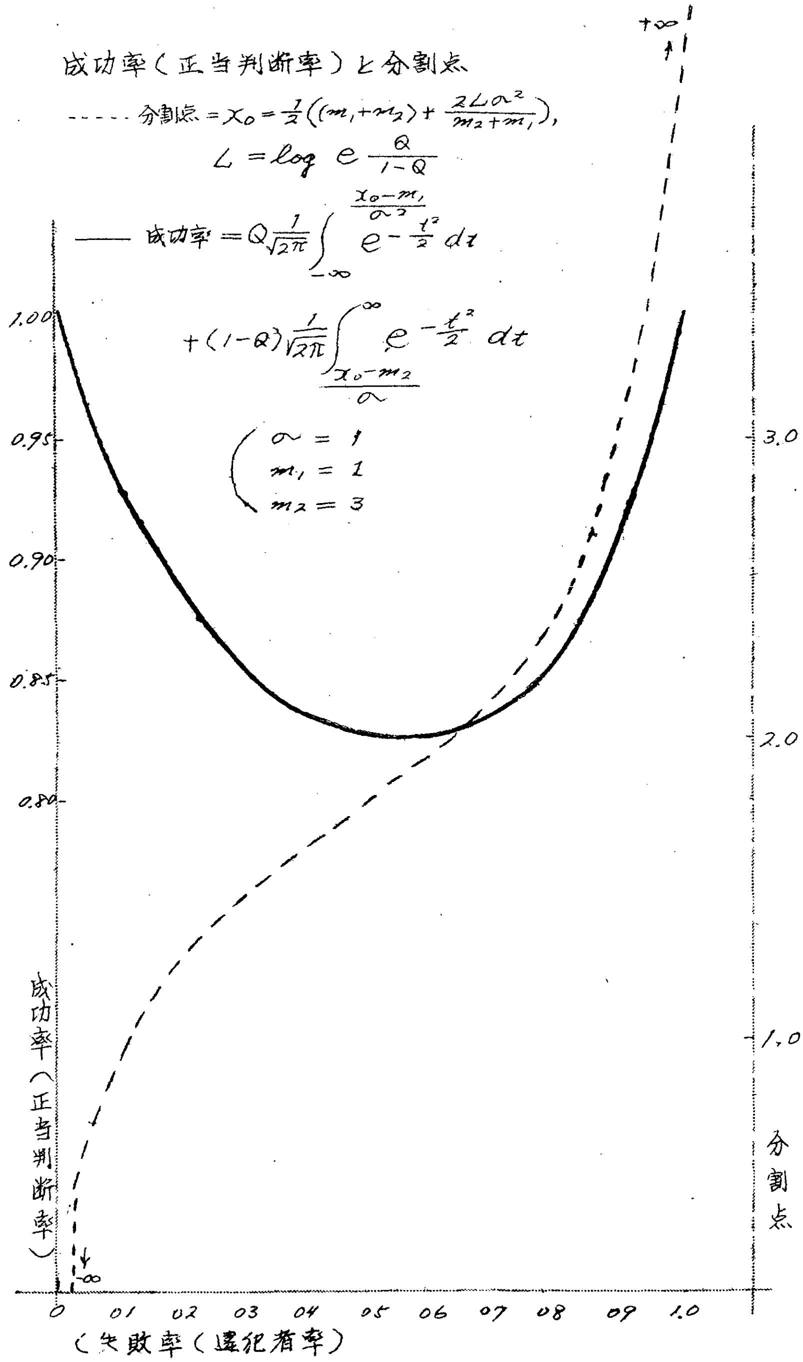
Mises の場合は $x=\dfrac{m+m'}{2}$ に相当する。即ち

$L=0\ \left(Q=\dfrac{1}{2}\right)$ の場合である。次に $m=3$, $m'=1$

$\alpha=\alpha'=1$ として $Q=0,\cdots\cdots,1$. についてS

及び xのグラフを画いてみると次の様になり Mises の場合比べて成功率は高いことが知られよう。

成功率（正当判断率）と分割点



したがつて実際の場合Qを用うる方が得策である。

以上の様な理論的考察を先として実際問題には次の様な簡単な手続きをとってもまず満足すべき結果が得られようと思う。

第一段階、第二段階の数量化はそのまゝとなし $X=\Sigma a_i x_i$, $y=\Sigma a_i y_i$ をつくりあげる。そして此等の分布の型(母集団の型)を定めその平均値標準偏差等を計算して、二つの集団の特色を示す母集団の分布の型にもとづいて分割点、成功率を定めてみる。もしQの値がわかり分布の型がガウス型と見做しうるならば(多くの場合こうであろう) 前にのべた考察をそのまゝ用うることが出来る。

§4. このような数量化の過程が示す様に数量はとりあげられた要因の数及び質、母集団の様態、その処理法、出すべき結論の内容と言うものに依存するものであつて、きわめて機能的なものであることが了解せられよう。

以上によって予測の立場よりする数量化の方法の一例を示したのであるが、此の様な立場から有用な数量化の方法が種々考究せられるであろうと思う。

5、補、

こゝでは母集団を限定し、きわめて窮屈に論じてきたのであるが、母集団の範囲を拡張して、予測の立場をさらに広いものにすることもできるのである。

例えば、t_1 なる時期にこゝでのべた母集団のつくられた状況を E_1 とする。この時の予測方式を F_1 とあらわす。これは具体的にこゝでのべた様にして求められる t_i の時の状況 E_i がある信頼度で予測できたとする。この時には我々は E_1, F_1, E_i の分析によって F_i を予測的に求めるのである。

この時の正当判断率もある信頼度の下に予測せられるであろう。

参 考 文 献

(1) 牛 島 義 友 「不良化傾向の早期発見」金子書房 1948

(2) R.V. Mises,
"On the Classification of Observation Data in the Distinct Groups."
(Annals of Mathematical statistics 1945, Vol, 16 No.1)

(3) R.V. Mises
"Vothesungen aus dem gebiete der Angewandte mathematick
I. Band. Wahrscheinlihkeitrechnung"
Deutike, 1931.

(4) Cramer "Random variables and Probability Distribution",
Cambridge, 1937.

(5) 西 村 克 彦、林 知 己 夫
「Parole Prediction」 中央刑務官練習所, 研修資料
第一輯 1949.

(6) 林 知 己 夫
論文紹介『ミーセスの観測値の組分け』について、講究録(統計

数理研究所）第二巻第八号　1946，7月15日

(7)　林　知己夫

「Parole Prediction に於ける

統計的方法の一応用に就て

再犯調査の基礎 〜〜予測方式の展開〜〜

中央矯正保護研修所資料　　1950

(8)　林　知己夫

仮釈放予測に於ける一つの科学的立場　法学志林

1950．5月

(9)　石田正次　火災予測

講究録　第五巻　1949

(10)　C. Hayashi

On the Quantification of Qualitative Data From the Mathematico-statistical Point of View

An Approach for Applying this Method to the Parole Prediction.
Annals of the Institute of Mathematical Statistics, 1950 Vol. 1

(71) Ohlin (L.E.) and Duncan (O.D.)
The Efficiency of Prediction in Criminology
The American Journal of Sociology
1949.

同様の事をねらつたものとして、教育問題の例がある。此れは英国で行つた例である。つまりある時期の生徒（ほゞ12才位；Qualifying Stage とよばれる）に於てあるテストを行う。それから何年後かに follow up してその時の状況をしらべる。そうしてその follow up した結果と昔のテストの結果其他とをつけ合せてみてテストの predictive value を相関係数を用い検討している。方法的にはなお統計数理的には未熟なものであるが学力テストを生徒の予後の予想力と言う所から評価しようとする考え方は面白い。これの内容は次の文献に詳しい

Mc Clelland (W.) Selection for Secondary Education, University of London Press 1949.

第八章　意欲の数量化（Von Neuman の遊戯論）

意欲の数量化（しかも社会心理的な立場よりする）の一つの理論的方法がある。此はある社会的な　場において人の意欲はどう、どのようにはたらき、行動が決定されるかと言うことを解明するための一つの Successive Approximation の一こまの理論をのべてみようと思う。またこの理論は Static なもので Dynamic な Patterning を描くには程遠い。

此の理論は Von Neuman，（Morgenstern）の遊戯論（全）とよばれるものである。　これについてはさきに

林　知己夫　Neumen の遊戯論眼見　講究録　昭和22年
第三巻．第六号

にのべておいた。

こゝでは、そこにのべられている理論については更めてこゝで繰返しのべない。（これについて知られたい方は該文献参照）その根本の所、さらに進んだ所を別方面からのべてみよう。

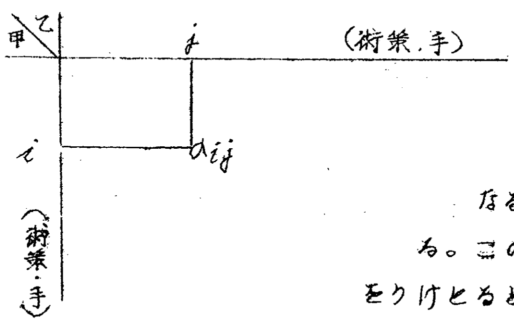
まず主な根本理論の証明の簡略化，

次に 0-sum n persons' game（$n \geqq 3$）

について概略のべておこう。

1．簡単な証明について

甲，乙二人の勝負師を考える。



左のようなきまりがあるものとする。甲が i なる手を出し，乙が j なる手を出すとする。つまり(i, j)なる手が Concour するとする。この時甲は乙から α_{ij} なる金額をうけとるとする。実際

$\alpha_{ij} > 0$ なら　甲は乙から

$\alpha_{ij} < 0$ なら　乙は甲から

金をもらうことになる。

(α_{ij}) が一義的に定まっているとすると、甲はなるべく得をしたいと考えるであろう。乙も同様である。こういう各人が得をしたい、駆引きをして即ち相手を察していかなる手を用うるかを工夫してなるべく得をしたいというような"場"を考える。この時甲，乙は如何なる駆引きをしたらよいであろうか。但し甲，乙両人は相手が如何なる手を出すか、全く知らぬとする。

甲の思考を辿ってみよう。

乙はきっと甲が一番損する様な手をうつだろう。$\min_j \alpha_{ij}$ となるような j をとるだろう。したがって自分はこれにも拘らず一番得をしたいのであるからこれを最大にするような手　即ち $\max_i \min_j \alpha_{ij}$ なる手をうたねばならぬ．

乙の思考をたどってみよう

甲はきっと乙が一番損をするような手をうだろう．

$$\max_i \alpha_{ij}$$

したがってこれにも拘らず一番得をせねばならぬから

この値を最小にするような手

$$\min_j \max_i \alpha_{ij}$$

をうたねばならぬ。

かうして手をきめた結果どうなるであろうか、これは (α_{ij}) の形によってかわってくるのである。

$\begin{pmatrix} 9 & 2 & 4 \\ 1 & 8 & 3 \\ 7 & 6 & 5 \end{pmatrix}$ のようなときは　$i=3,\ j=3$ できまってくる　（i, j なる手の種類は1, 2, …… なる数であらわ

すとする。

しかし $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ のような時は手がきまらず行動が全くおこせなくなる。これでは思考方法が香ばしくないことになる。

なお又前の手のきまる例でも一方が裏の裏をかくという場合は考えられてない。両方がいつも同じように裏の裏をかくということを考えねばならぬ。したがってこゝの考えは"いかなる手をうつ"という行動の事に関しては物語っていない。全く Static な思考実験といわねばならない。

こゝで考えの方法を拡張し、実際に手をうつという立場から考えてゆこう。

一回ごとに得をするという事を考えるのを止める。何回も多数回勝負したときに平均的に、つまり平均値の立場からみて得をしたい（結局勝つという事）と考えるようにしよう。そうすると甲，乙は一義的に手をきめなくてよくなる。いかなる手を出すかということを確率によって定めるという考え方がおこってくる。こゝに確率というものは「コレクティフ」で言う内的意味をもつものとする。かう考えてくると実際の手の出し方がきまってくるのである。

$$\begin{cases} \text{甲のもつ手} & 1,\ 2,\ \cdots\cdots\ \beta_1 \\ \text{その手を出す確率} & \xi_1,\ \xi_2,\ \cdots\cdots\ \xi_{\beta_1} \end{cases} \quad \xi_i \geqq 0 \quad \sum_{i=1}^{\beta_1} \xi_i = 1$$

$$\begin{cases} \text{甲のもつ手} & 1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ \beta_2 \\ \text{その手を出す確率} & \eta_1,\ \eta_2,\ \cdots\cdots,\ \eta_{\beta_2} \end{cases} \quad \eta_j \geqq 0 \quad \sum_{j=1}^{\beta_2} \eta_j = 1$$

こうして平均値

$$\sum_i^{\beta_1} \sum_j^{\beta_2} \alpha_{ij}\ \xi_i\ \xi_j = K(\vec{\xi}, \vec{\eta})$$

を考えるのである。

$\vec{\xi}$, $\vec{\eta}$, は夫々確率ベクトルを示す。

此のKを $\vec{\xi}$, $\vec{\eta}$ を工夫することによつて甲, 乙ともに大又は小にしようとする。即ち

甲は $\max_{\vec{\xi}} \min_{\vec{\eta}} K(\vec{\xi}, \vec{\eta})$ と考え

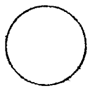
乙は $\min_{\vec{\eta}} \max_{\vec{\xi}} K(\vec{\xi}, \vec{\eta})$ と考える。

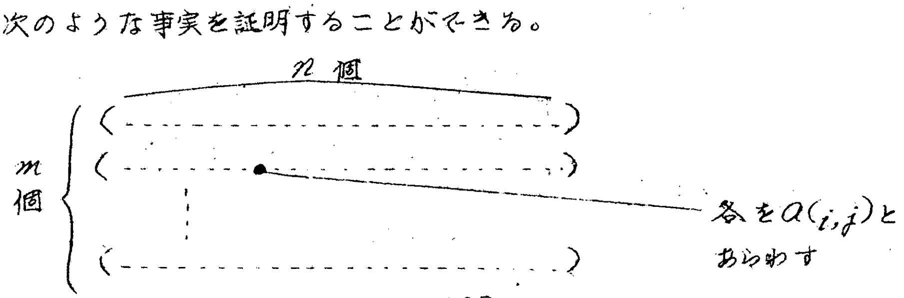
此の時この値はどうなるであろうか、

一般に $\max_{\vec{\xi}} \min_{\vec{\eta}} K(\vec{\xi}, \vec{\eta}) = \min_{\vec{\eta}} \max_{\vec{\xi}} K(\vec{\xi}, \vec{\eta})$

が成立するのである。この証明が全く初等的に行われるので一寸説明してみよう。

これを証明するために二三の予備考察をほどこす。

Convex な図形  を考える。この内の点をとおつて直線を引くとConvex とぶつかる。任意の外部の点を考えたときこれをとおつてはこの図形にぶつからぬ直線を引きうる。此の性質を利用して次のような事実を証明することができる。



$$n\text{個}\left\{\begin{array}{l}(1\;0\;0\;0\;\cdots\cdots\;0\;0)\\(0\;1\;0\;0\;\cdots\cdots\;0\;0)\\(0\;0\;1\;0\;\cdots\cdots\;0\;0)\\\quad\vdots\\(0\;0\;0\;0\;\cdots\cdots\;0\;1)\end{array}\right. \rightarrow \vec{\delta}_e \text{ とあらわす}$$

のような Vector を考え Convex の性質をつかって考える。

此の時 " $i = 1, 2, \cdots\cdots n$ に対して

$$\sum_{j=1}^{m} a(i,j)x_j \leqq 0$$

但し $x_j \geqq 0$ $\sum_{j=1}^{m} x_j = 1$

のような Vector $\vec{x} = \{x_1, \cdots\cdots x_m\}$ が存在するか或は又

$j = 1, 2, \cdots\cdots m$ に対して

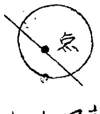
$$\sum_{i=1}^{n} a(i,j) w_i \geqq 0$$

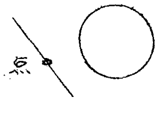
但し $w_i \geqq 0$, $\sum_{i=1}^{n} w_i = 1$

のような Vecter $\vec{w} = \{w_1 \cdots\cdots w_n\}$ が存在する"

この二つは排反的である。即ちどちらかゞ必ず成立しているのである。

ということを簡単に説明することができる。

前者は 

Convex の場合として、後者は 

Convex

の場合として証明できる。

さらに次ぎのような考えを進めてゆく。

まず $\begin{cases} V_1 = \max\limits_{\vec{\xi}} \min\limits_{\vec{\eta}} K(\vec{\xi}\ \vec{\eta}) \\ V_2 = \min\limits_{\vec{\eta}} \max\limits_{\xi} K(\vec{\xi}\ \vec{\eta}) \end{cases}$ とおく。

さて $\xi_i \geqq 0 \quad \sum\limits_{i=1}^{\beta_1} \xi_i = 1$ なるすべての $\vec{\xi}$ に対して

$$\min_{\vec{\eta}} K(\vec{\xi}\ \vec{\eta}) = \min_{\vec{\eta}} \sum_{j=1}^{\beta_2} \sum_{i=1}^{\beta_1} \alpha_{ij} \xi_i \eta_j$$

$$= \min_j \sum_{i=1}^{\beta_1} \alpha_{ij} \xi_i$$

又 $\eta_j \geqq 0 \quad \sum\limits_{j=1}^{\beta_2} \eta_j = 1$ なるすべての $\vec{\eta}$ に対して

$$\max_{\vec{\xi}} K(\vec{\xi}\ \vec{\eta}) = \max_{\xi} \sum_{j=1}^{\beta_2} \sum_{i=1}^{\beta_1} \alpha_{ij} \xi_i \xi_j$$

$$= \max_i \sum_{j=1}^{\beta_2} \alpha_{ij} \eta_j$$

が成立する。証明は簡単であるから略す。
かうすると

$$\begin{cases} V_1 = \max\limits_{\vec{\xi}} \min\limits_{j} \sum\limits_{i=1}^{\beta_1} \alpha_{ij} \xi_i \\ V_2 = \min\limits_{\vec{\eta}} \max\limits_{i} \sum\limits_{j=1}^{\beta_2} \alpha_{ij} \eta_j \end{cases}$$

となる。

勿論 $V_1 \leqq V_2$ は明らかである。

こゝまでくると証明はやさしい。

$a(i, j)$ に関する結論を利用するのである。

i, j はそのまゝ $n \to \beta_1 \quad m \to \beta_2$

$a(i, j) = \alpha_{ij} \quad \vec{w} \to \vec{\xi}, \ \vec{x} \to \vec{\eta}$ とおいて

かきなおすと

(i) $\sum_{i=1}^{\beta_1} \alpha_{ij} \xi_i \geqq 0$, $\underline{j = 1, \cdots\cdots \beta_2}$, のような $\vec{\xi}$ が

存在する.（$\xi_i \geqq 0 \ \sum_{i=1}^{\beta_1} \xi_i = 1$）

即ち $\min_j \sum_{i=1}^{\beta_1} \alpha_{ij} \xi_i \geqq 0$

したがって $V_1 \geqq 0$ のような $\vec{\xi}$ が存在する。

或は又

(ii) $\sum_{j=1}^{\beta_2} \alpha_{ij} \eta_j \leqq 0$, $i = 1, \cdots\cdots \beta_1$, のような $\vec{\eta}$ が存

在する（$\eta_j \geqq 0 \ \sum_{j=1}^{\beta_2} \eta_j = 1$）

即ち $\max_i \sum_{j=1}^{\beta_2} \alpha_{ij} \eta_j \leqq 0$

したがって $V_2 \leqq 0$ のような $\vec{\eta}$ が存在する、以上あわせると、

$V_1 < 0 < V_2$ なることはおこり得ない。

今任意の数 W をえらぶ

α_{ij} の代りに $\alpha_{ij} - W$ を考え、これを α_{ij} のつもりで

同様の論議をすると

$V_1 < W < V_2$ なることは起り得ないことになる。

Wは任意であるから　$V_1 < V_2$　はおこり得なくなるのである。したがってこのようなものに対して　$V_1 \geqq V_2$　が成立しているのである。しかし　$V_1 \leqq V_2$ は常に一般に成立しているから

$$V_1 = V_2$$

これで定理は完全に証明できたことになる！

(2)　n-person' game について

今までは　0 sum 2 person's game であった

0 sum とは　甲のとり分　乙のとり分の和が 0 となるいみである。　甲は乙から a_{ij} 丈もらうから

乙は甲から $-a_{ij}$ 丈もらうこと　になる。

即ち　とり分の度　$a_{ij} + (-a_{ij}) = 0$

となっているのである。

3人以上となるとこうは簡単にゆかない。つまり協力の相手（協力して勝負をする相手をみつける）の選び方が問題となってくるのである。

これについて考えを進めて行かう。

まず3人の時から考えをすゝめる、三人を甲乙丙とする。

3人のものが或は誰か2人と協力して或は夫々各人が単独に勝負を行った後のわけ前を w_1，w_2，w_3　としておこう。勿論 $w_1 + w_2 + w_3 = 0$ である。

（0 sum game！）

今もし甲が手 i，乙が手 j，丙が手 k を出したときの

甲のとり分を　$g_1(i, j, k)$

乙のとり分を　$g_2(i, j, k)$

丙のとり分を $g_3(i,j,k)$ とする。
今甲が乙と協力して丙と勝負をすることを考える

$$\max_{\xi}\ \min_{\eta}\sum_{i}^{\beta_1}\sum_{j}^{\beta_2}\sum_{k}^{\beta_3}\{g_1(i,j,k)+g_2(i,j,k)\}\xi_{ij}\eta_k=M_{1,2}$$

同様に甲が丙と協力して

又乙が丙と協力して

勝負することを考える、此の時 $M_{1,2}$ に相当する量ができるがこれを夫々 $M_{1,3}$ $M_{2,3}$ とする。

なお $\xi_{ij}\geqq 0$ $\sum_{ij}^{\gamma_1}\xi_{ij}=1$ ect とする

$\eta_k\geqq 0$ $\sum_{k=1}^{\beta_3}\eta_k=1$

ξ_{ij} は 甲乙協力して手をきめるとした時の共同による手のだし方の確率ベクトルを示す。

さて共同して相手にあたることになれば 2-persons game になって例の max min = min max が成立するのである。
即ち

$$M_{1,2}=\max_{\xi}\ \min_{\eta}\sum_i\sum_j\sum_k\{g_1(i,j,k)+g_2(i,j,k)\}\xi_{ij}\eta_k$$

$$=\min_{\eta}\ \max_{\xi}\sum_i\sum_j\sum_k\{g_1(i,j,k)+g_2(i,j,k)\}\xi_{ij}\eta_k$$

$$=-\max_{\eta}\ \min_{\xi}\sum_i\sum_j\sum_k g_3(i,j,k)\xi_{ij}\eta_k$$

となる。

これから考えると

$\underline{M_{1,2} + M_{1,3} + M_{2,3} \geqq 0}$ を説明することができる

このためには

$$\max_{\vec{\eta}'} \min_{\vec{\xi}'} \sum_{ijk} g_3(i,j,k)\, \xi'_{ij}\, \eta'_k + \max_{\vec{\eta}''} \min_{\vec{\xi}''} \sum_{ijk} g_3(i,j,k)\, \xi''_{ij}\, \eta_k + \max_{\vec{\eta}'''} \min_{\vec{\xi}'''} \sum_{ijk} g_3(i,j,k)\, \xi'''_{ij}\, \eta'''_k \leqq 0$$

即ちすべての $\vec{\eta}', \vec{\eta}'', \vec{\eta}'''$ に対して

$$\min_{\vec{\xi}'} \sum g_3(i,j,k)\, \xi'_{ij}\, \eta'_k + \min_{\vec{\xi}''} \sum g_3(i,j,k)\, \xi''_{ij}\, \eta''_k + \min_{\vec{\xi}'''} \sum g_3(i,j,k)\, \xi'''_{ij}\, \eta'''_k \leqq 0$$

を説明すればよい.

$$\xi'_{ij} = \eta'''_i\, \eta'''_j, \quad \xi''_{ik} = \eta'''_i\, \eta'_k, \quad \xi'''_{jk} = \eta''_j\, \eta'_k$$

とおくと、等号が成立する。

これは $\min\limits_{\vec{\xi}'}$ でも何でもない。故に一般に min でないものが〇であるから min に対しては $\leqq 0$ が成立する。

即ち $M_{12} + M_{13} + M_{23} \geqq 0$ が成立する。

これは何を意味するか。

もし二人協同するというようなことがすべて損をするということを意味

するならば

$$w_1 + w_2 \geqq M_{1,2},\quad w_1 + w_3 \geqq M_{1,3},\quad w_2 + w_3 \geqq M_{2,3}$$

$$w_1 + w_2 + w_3 = 0$$

が成立している筈であるから

$M_{1,2} + M_{1,3} + M_{2,3} \leqq 0$ とならねばならぬ．これはおこり得ない事は上に示したのであるからそういうことはあり得ない。

これから $w_1 > -M_{2,3}$ 等々の同例式が成立する。（これは簡単であるから略す。

さて勝負の駆引きを考えよう。

甲は乙或は丙と組める．

彼はすべての條件の下である金額 w_1を確保しようとするものといえよう。

乙は甲との協力では $M_{12} - w_1$ 以上は得られぬし．

丙も甲との協力では $M_{2} - w_1$ 以上は得られぬ

したがってもし $(M_{12} - w_1) + (M_{13} - w_1)$ が乙丙の協力によって得るものよりも小であれば甲は協力者を得ぬであろう。こう考えればよい。

$$(M_{12} - w_1) < k M_{23}$$

$$(M_{13} - w_1) < (1-k) M_{23}$$

但し $0 \leqq k \leqq 1$ 分け前の分配率とならねばならぬから綜合的には

$$(M_{12} - w_1) + (M_{13} - w_1) < M_{23}$$

ならば、甲は協力者をみつけ得ない。そうすると損をすることになる。したがって w_1 を得たいということは non sense になる。されば協力者をみつけて得をしたいと考えるならば

$$w_1 \leqq \frac{-M_{23}+M_{12}+M_{13}}{2}$$ でなくてはならない。 w_2, w_3, についても同様の関係をうる。

以上のことをまとめていうならば次の三つに要約できる．ⓘ協力者をみつける様に各は努力しそれに成功すれば

夫々 $\frac{1}{2}(M_{12}+M_{13}-M_{23})$

$\frac{1}{2}(M_{12}-M_{13}-M_{23})$

$\frac{1}{2}(M_{13}+M_{23}-M_{12})$ の

金額をうる。

ⓘⓘ もし協力に失敗すれば夫々唯

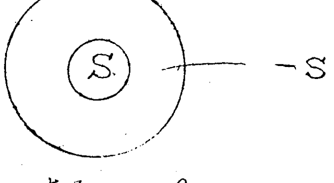
$-M_{23}$, $-M_{1,3}$, $-M_{1,2}$ の金額のみをうけとることになる。

ⓘⓘⓘ 又 $M_{12}+M_{13}+M_{23} \geqq 0$ は 常に成立している。

以上のような推理方法で game は進むでゆくのである。

次に n persons'(0 sun) の場合を一般的にとりあつかってみよう。

集合 I（勝負師 全体）



S 友人の players が存して居り互に協力するものとする．

−S のこりのものの協力とする

V(S) を此の時両者が game 行った時得る max min ＝min max

の値とするさらにくわしくのべておこう。

0 sum game であるから

$$\sum_{j=1}^{n} g_j(i_1, i_2, \cdots i_n) = 0$$

ここで

$$\overline{K}(\tau^S, \tau^{-S})$$

$$= \sum_{j \text{ in } S} g_j(i_1, \cdots\cdots i_n) = -\sum_{j \text{ in } -S} g_i(i_1, \cdots\cdots i_n)$$

を考える。又ここで Vector

$$\overline{\xi}_{\tau^S}, \qquad \sum \xi_{\tau^S} = 1 \quad \xi_{\tau^S} \geqq 0$$

$$\eta_{\tau^{-S}}, \qquad \sum \eta_{\tau^{-S}} = 1 \quad \eta_{\tau^S} \geqq 0$$

を考える。つまり両グループ協力して出す手の確率を示すものである。

この時 $K(\vec{\xi}\ \vec{\eta}) = \sum_{\tau^S \tau^{-S}} \overline{K}(\tau^S, \tau^{-S})\, \xi_{\tau^S}\, \eta_{\tau^{-S}}$

と定義すると　$V(S)$ は　これについての

min max = max min = $V(S)$ として定義される。

このV(S)は game の特性値とよばれる、このV(S) について基本的な関係がでる。證明は簡單である。

(i)　$V(\ominus) = 0$　　$\ominus$ は空集合

(ii)　$V(-S) = -V(S)$

(iii)　$V(S \cup T) \geqq V(S) + V(T)$

　　但し　$S \cap T = \ominus$

(iv) $V(I)=0$ 　　I は全集合

(v) $V(S_1 \cup \cdots\cdots \cup S_p) \geqq \sum_{i=1}^{p} V(S_i)$

(vi) $\sum_{i=1}^{p} V(S_i) \leqq 0$

　　但し　$I=\sum_{i=1}^{p} S_i$

さて又次のような関係式を一つ考えておく

今 $\alpha_1^0 \cdots\cdots \alpha_n^0$ をあたえられた一定の数とする。そして

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_j^0 = 0 \qquad \text{とする。}$$

そして今上でのべた $g_j(i_1, i_2, \cdots\cdots i_n)$ にもとずく game を考える。game の規則はこれと全く同一だが g_j の値は $g_j(i_1, i_2, \cdots\cdots i_n) + \alpha_j^0$ とかえられるとしよう。これでも 0-sum n persons' game となっていね。此の game の特値 $V'(S)$ は

$$V(S) = V(S) + \sum_{j \text{ in } S} \alpha_j^0$$

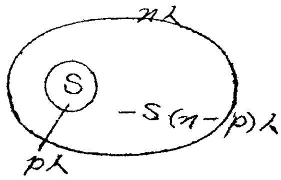
によってあたえられる。したがってこのとき二つの game は手にあたえる確率はかわらぬから "戦術の上から丸て等価である" という。実際理論を展開するとき $V(S)$ と等価で形の簡単なものをとりあつかうのがよい。

この考えを用いて

$$-p\gamma \leqq \bar{V}(S) \leqq (n-p)\gamma$$

但し $\left|\begin{array}{l} -\gamma = \bar{V}((1)) = \cdots\cdots\cdots\cdots = \bar{V}((n)) \\ (i) \text{ は各人1人で game を行うときの値である。} \end{array}\right.$

(a_j^0 に対するもの!)



なることがいえる

此の一般論をつかって $n \geqq 4$ 以上の事を論ずることができる。

$n=4$ の場合例をあげてみよう。

game は 1, 2, 3, 4 という人が行うものとする.

今 $\gamma = 1$ としておこう

さうすると一般的な関係から

V(S)	Sに属す人数
0	0
−1	1
1	3
0	4

となることはすぐいえる

$S=2$ の時は複雑である。

この $S=2$ の時の各人の協力結合の種類は

(1,2), (13), (14), (23), (24), (34) となる。しかし上にのべた不等式により

$$2 \geqq V(S) \geqq -2$$ にあることはわかる

今もし $V(14) = 2x_1$,

$V(24) = 2x_2$

$V(34) = 2x_3$ とおけば

$V(2,3) = -2x_1$

$V(13) = -2x_2$

$V(12) = -2x_3$ となるから

$-1 \leqq x_1, x_2, x_3 \leqq 1$ となる

されば今 $x_1 = x_2 = x_3 = 1$ という特殊なものを考えれば

game は

V(S)	S人	註
0	0	
−1	1	
2	2	4がSに属す
−2	2	4がSに属さぬ
1	3	
0	4	

となってくる。

この時4という人が入るととくに有利になるような場合がある。各人は彼と協力しようとする、彼と協力せぬなら他の3人は協力しなければならない。

次に　$x_1 = x_2 = x_3 = -1$　とおくと

V(S)	S人	註
0		
−1		
−2	2	4がSに属す
2	2	4がSに属さぬ
1	3	
0	4	

この時は

$$V(S \cup T) = V(S) + V(T) \qquad \text{但し} \quad S \cap T = \ominus$$
$$T = (4)$$

である場合である。

4と組めば損をするので(4)とは誰も組もうとはしない。したがって

1, 2, 3 の術策は 1, 2, 3 の中の人との協力を考えることになる。

つまりこれは見かけの 4 persons' game であり本質的には 3 persons' game と考えてよくなる。これは 4 persons' game の分解と名づけられるものである。

x_1, x_2, x_3 がその中間の値をとることによって色々の場合がおこってくるが、ここでは割愛する。一般に n-persons' game についてはこのような議論がくりかえされてある。Von neuman はこの外 non-Zero sum game をとりあつかっている。

ここで Theory of game の内容をふりかえってみよう。

本質的な部分は 2 persons' game にあると考えられ $n \geqq 3$ 以上は単なる Static な思考実験にすぎぬものと思われる。$n \geqq 3$ の議論は $n = 2$ の場合の確率の考えを入れぬところの議論と equivalent なものであるから、あまり意味がつよいとは思われない。こゝで考えを拡大して協力者をえらぶ確率というものを考え、協力の成功による Expectation というものを考えに入れて理論がつくられるべきであろうと思う。

なお Thory of game の 2 persons' の場合は色々実験をしてみると面白い結果が出るであろう。此の心理的実験はなかなか興味のあるものである。これと全く同様ではないがこのような意欲の数量化に関して東大心理学教室の梅岡　貴氏、東大物理の戸田正直氏（行動数理研究会）の面白い実験方法及びそのデータがある。

なおこの Theory of game は

$$\left.\begin{array}{l}\text{甲　の思惟する}\quad \alpha_{ij} \\ \text{乙　の思惟する}\quad \alpha'_{ij}\end{array}\right\}\text{とが}\quad \alpha_{ij} \neq \alpha'_{ij}$$

である場合どうなるか、そして又 $\alpha'_{ij} \rightarrow \alpha_{ij}$ となってゆくときどうなるか、又 甲、乙両人は何回もの手合せをするとき、相手が

jなる手をだしたから次にiなる手を出す確率p_{ij}如何を察して自己の手を考えてゆくというような Dynamic な場合は如何にとりあつかうかというような問題を含んでおり、実際的な解決を要求する所が多い。

以上この章でのべたことは定性的なもの、意欲期待という様なものゝ数量化の一方法をのべたのであるが、此のような確率的立場から数量化を行う方法は将来大に伸張せらるべきものと考える。

此の Von Neuman の Theory of Game に関係した文献の目についたもの丈あげておこう。

1 J. V. Neuman Zur Theoric der Gesellschaftsspiele Math. Ann. 1928

2 J. V. Neuman Über ein Ökonomischen Gleichungs-system und eine Verallgemeinerung des Brouwerschen Fixpunktsatzes Ergebnisse Eines Math. Kollegums. (Wien) 1937

3 J. V. Neuman and O. Morgenstern Theory of Games and Economic Behavior (First Edition) Princeton 1944

4 I. Kaplensky A Contribution to V. Neumann's Theory of Games Ann. Math. 1945

5 A. Wald Generalization of a theory by V. Neuman concerning zero sum two person games Ann. Math. 1945

6 A. Wald — Statistical Decision Functions which Minimize the Maximum Risk
Ann. Math. 1945

7 J. V. Neuman - and O. Morgenstern — Theory of Games and Economic Behavior (Second Edition)
Princeton 1947

8 A. Wald — Statistical Decision Functions
Am. Math. Sta. 1949

---

9 R. D. Possel — Sur la Theorie Mathematique des Jeux de Hasard et de Reflexion
Actualiee 43 1936

10 A. Wald — Theory of Games and Economic Behavior
Math Review 1945

11 L. Hurwicz — The Theory of Economic Behavior
Am. Economic Revi.
1945

12 J. Marschak — Neumann's and Morgenstern's New Approach to Static Economics
J. Political Economy 1945

13 林 知己夫 — Neumanの遊戯論覗見 講究録(統計数理研究所)
1947

14 山田雄三　経済計画論の一課題　エコノミスト
(毎日新聞社) 1948

15 R. Stone* The Theory of games
Economic J. 1948

16 O. Weinberger Wirtschaftshandlungen
und Spielstratdgie
Statistische Vier
telzahresschrift
1949

17 O. Anderson* Theorie des Glucksspiele
und Okonomisehes
Verhalten.
Schweizerische Z.
für Valkswirt-
schaft und sta-
tistik 1949

*印　未見

附　録

Non-Parametric Test に関する文献抄

定性的なものを数量化する場合 Runk order の関係で数量化し、或はいろいろな関係をみてゆくというような場合が多い。このような時意味ある統計的仮説検定を行おうとする時 ——つまらぬ仮定をおかないで検定しようとする時—— 勢い Non-parametric Test を用いなければならない。この検定法は全く緒についたばかりと言ってよい。

したがつてこれに関する文献（具体的な使える結果をあたえているもの丶み）を目についたもの丈でもあげておき、参考に供することにする。

Non-Parametric Test の表

1	Fisher and yates.	Statistical Tables for Biological, Agricultural and Medical Research Oliver Boyd 1949.
2	Gutman (L.)	A Distribution free Confidence for the Mean. Annl. of Math. Stat. 1948.
3	C. Hastings and J. Mosteller J.W. Tukey and C.P. Winsor	Low Moments for Small Samples: A Comparative Study of order Statistics, Annl. of Math. Statistics Vol. XVIII No. 3.
4	M.G. Kendall.	Rank Correlation Methods.
5	H.B. Mann	Non parametric Tests against Trend.
6	P.G. Moore.	A test for Randomness in a Sequence of two Alternatives in volving a 2×2 Table Biometrica Vol. XXXVI Part III. IV. December 1949.

7 F. S. Swed and C. Eisenhart. Tables for Testing Randomness of Grouping in a sequence of Alternatives. Annl. of Mathe. Stat. 1943.

8 A. Wald and Wolfowitz. Test on Randomness (Serial Correlation による) Annals of mathematical Statistics 1943

9 S. S. Wills Order Statistics Bulletin of American mathematical Society 1948.

Abstract

Some Approaches for Quantifying the Qualitative Data from the Mathematico-Statistical Point of View

Chikio Hayashi (The Institute of Statistical Mathematics)

There have been some approaches made its aim being to grasp scientifically the social and psychological phenomena, by quantifying the qualitative data, but there are few that rest on the theoretical foundations reliable from the methodological point of view. Moreover, the quantities given to qualita-

tive datas by these approaches are quite optional.

Quantification should be done only for the purpose of solving the concrete problems. In other words, quantifications should be made from the best point of view and by the most reasonable means that may answer our purporse, as we wish either to acquire some reasonable knowledge on something or to make reasonable, effective and positive criteria how we have to act or behave ourselves in managing some affairs. Moreover it also must be proved from a scientific standpoint that quantifications made can give useful conclusions. Thus it must be said that quantification has no absolute meaning, but only relative and functional meaning to our purpose.

In this paper, some interest quantification problems are considered from the mathematico-statistical point of view.

Contents