⑫連続型分布で近似できる有限母集団で、半は全部、他半は一部調査する場合の境目の推定法

兼所員　増山元三郎

全体でN箇の銀行があり、各行の預金残高Xの平均を問題にする場合のように、Xの分布を近似的に確率密度$f(x)$を有する分布函数$F(x)$で表はすことができる場合、Xがξより大きい部分N_1行では全部、その他N_2行$(N=N_1+N_2)$では一部分nを無作為抽出して調査するものとし、n, ξを

$$\nu \equiv N_1 + n = N + n - N_2$$

を一定に保ち

$$V \equiv \frac{N_2 - n}{N_2 - 1}\,\frac{\sigma_2^2}{n}$$

が最小になるように選ぶ方針を採ることにする。

定義から

$$N_2 = N\int_{-\infty}^{\xi} dF, \quad \sigma_2^2 = N\int_{-\infty}^{\xi} (x - m_2)^2\, dF / N_2$$

但し

$$m_2 \equiv N\int_{-\infty}^{\xi} x\,dF/N_2 \qquad {}^{2)}$$

と置いた。

$$N_2(\sigma_2^2+m_2) = N\int_{-\infty}^{\xi} x^2\,dF$$

を利用すると

$$\partial N_2/\partial\xi = Nf(\xi),\quad \partial m^2/\partial\xi = Nf(\xi)(\xi-m_2)/N_2$$

$$\partial\sigma_2^2/\partial\xi = Nf(\xi)\{(\xi-m_2)^2-\sigma^2\}N_2$$

これから

$$\partial\nabla/\partial\xi = \nabla Nf(\xi)\left[(\xi-m_2)^2-\left(b+2+\frac{1}{N_2-1}\right)\sigma_2^2\right]/(N_2\sigma_2^2\nabla).$$

従つて ∇ の極値は、$\xi \geqq m^2$ を考えに入れて

$$\xi = m_2+\sqrt{b+2+\frac{1}{N_2-1}}\ \sigma_2,\qquad b\equiv N_2/n$$

これが極大であるか、極力であるかを調べてみると、$\xi=\xi_0$ を上の極値として、

$$\partial^2\nabla/\partial\xi^2\Big|_{\xi_0} = K\left[\frac{N_2}{(N_2-1)^2}+2\sqrt{b+2+\frac{1}{N_2-1}}\ \frac{N_2}{Nf(\xi)\sigma_2}\right.$$

$$\left.-\left(6+\frac{2}{N_2-1}\right)b-\left\{4+\left(\frac{1}{N_2-1}+2\right)\left(\frac{1}{N_2-1}+1\right)\right\}\right]$$

茲にKはある正の量である。[ ]の中の第2項の大きさが分らな。

いので、これだけでは差が極大を与えるか極小を与えるか分らない。

実際にはこの儘では使えないから、概数を入れて逐次近似を行う以外に仕方はないであらう。この際 $\xi=\xi_0$ では

$$\partial\sigma_2^2/\partial\xi=Nf(\xi)\left(\theta+1+\frac{1}{N_2-1}\right)\sigma_2^2\geqq 0$$

注 意

1) 類例は *Uspensky: Introduction to mathematical probability*. 1937 に在る。

2) この形は $N_2m_2=N\int_{-\infty}^{\xi}x\,dF$ と書くと累積度数曲線上での幾何学的意味が掴み易く、例えば林・丸山両氏の層別化法に役立つ。即ち両氏のように確率密度函数で分割するより、分布函数で分割する方がやり易いのである。

両氏：ある層化法に就て、本誌 $\underline{1}$ (1949), 399.