REGRESSION TYPEの推定値

W.G. Cochran; "Sampling Theory When Sampling-Units are of Unequal Sizes" を中心とする解説

養成所　遠藤　健児

§0 問題の要点

標本調査に当つて，各抽出単位について，調査しようとする性質の観測値yと同時にもう一つの性質の観測値xとを得てしかもxの分布については経験から或る知識が手許にあるような場合が少くない。例へば農業調査に於て，抽出単位が農家であつて或る農家の規模を示す測度xとして，所有する耕地面積が考えられしかもその分布について或る知識が與えられるやうな場合，或は同一事項の調査に於て，前回の調査で得た全一単位に対する観測値xが與えられるやうな場合，などがその例である。このとき例えばyの population total $\sum y$ を推定しようとする時，単位体の抽出の方法や，推定値の形式に予め知られているxに関する知識を如何に織り込むべきかと云う問題が起る。此処では抽出法は等確率の任意抽出法に依るものとして，その場合の推定値の形式について論じようと云うのである。

そして以下に於て得られるものの多くは大標本の場合の近似的結果であり，又取扱を容易にするために，調査の対象となる単位の数は十分大きなものと假定してある。

先づxとyとの関係が何等かの形で前提されねばならないのであるが，母集団に於るxとyとの同時的分布が分って居ればその分布の型に応じて$\sum y$の有効な推定値を得るために種々の操作が可能であろうが，実際問題としてxとyとの同時分布が，扱い易い形に於て分っていると云うことは先づ有り得ないし，又個々の分布に応じて煩雑な計算が附随する。故に吾々は問題を，yのxに対する回帰の型が分っている場合に限定しなければならない。即ちこの場合はxとyとの同時的分布を完全に知る必要はないのであって，回帰函数の型と，xを固定した時のyの條件附分散（Residual variance，又は relative weight 等と呼ぶ）が x と共にどう変るかが或る程度分つておればよいのである。以下原文の順序に従つて種々の場合に対する推定値について検討することにする。§1，§2，は解説のために筆者が挿入したものである。

§1　最小自乗法に関する Markoff の定理

この定理は以下に出て来る種々の推定値の，Markoff の意味での線型最良不偏性を保証するもので，その詳細に亘る解説は，佐藤良一郎：数理統計学（p. 543）或は小川潤次郎："最小自乗法に関する Markoff の定理を繞つて"（本講究録，第3巻第9号）に述べられてある。

［最小自乗法に関する Markoff の定理］

母集団 Π が n 個の部分母集団 Π_i（$i=1,2,\cdots\cdots,n$）から成り，Π_i に於る変量を X_i とするとき

I.　$$E(X_i)=\sum_{\alpha=1}^{s} a_{i\alpha}p_\alpha \qquad (i=1,2,\cdots\cdots,n)$$

此処に $a_{i\alpha}$ は既知の，p_α は未知の常数とする。

II.　$$\mathrm{Rank.}(a_{i\alpha})=s\leqq n$$

III.　$$\sigma_{X_i}^2=\sigma^2/p_i$$

但し $p_i>0$ は既知，σ^2 は未知或は既知の常数とする。

IV. 各々の Π_i からの一つの任意標本の値を x_i とする。

V. 推定すべき母数が

$$\theta=\sum_\alpha b_\alpha p_\alpha \quad (\text{但し } b_\alpha \text{ は既知の常数}) \qquad (*)$$

であるとする。

此処で次の既知量を定義する。

(a) $G_{\alpha\beta} = S_i P_i a_{i\alpha} a_{i\beta}$ $(\alpha, \beta = 1, 2, \cdots, n)$

$$G = \begin{vmatrix} G_{11} & G_{12} & \cdots & G_{1s} \\ G_{21} & G_{22} & \cdots & G_{2s} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ G_{s1} & G_{s2} & \cdots & G_{ss} \end{vmatrix}$$

(b) $H_\alpha = S_i P_i x_i a_{i\alpha}$ $(\alpha = 1, 2, \cdots, n)$

(c) $H_0 = S_i P_i x_i^2$

以上の條件のもとで

[A] θ に対する $x_1, x_2, \cdots, x_n$ に依る最良線型不偏推定値は

$$S = S_i (x_i - \sum_\alpha a_{i\alpha} q_\alpha)^2 P_i$$

を最小ならしめる q の値 q^0 を (*) の p の代りに入れた

$$F = \sum_\alpha b_\alpha q_\alpha^0 \qquad (**)$$

であって，このFは又

$$F = -\frac{1}{G} \begin{vmatrix} 0 & H_1 & H_2 & \cdots & H_s \\ b_1 & G_{11} & G_{12} & \cdots & G_{1s} \\ b_2 & G_{21} & G_{22} & \cdots & G_{2s} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_s & G_{s1} & G_{s2} & \cdots & G_{ss} \end{vmatrix}$$

と表わされる。

[B] (**) に於る x_i の係数を λ_i $(i=1,2,\cdots,n)$ とすれば

$$\sigma_F^2 = \sigma^2 \mathop{S}_i \lambda_i^2 P_i = -\frac{\sigma^2}{G} \begin{vmatrix} 0 & b_1 & b_2 & \cdots & b_s \\ b_1 & G_{11} & G_{12} & \cdots & G_{1s} \\ b_2 & G_{21} & G_{22} & \cdots & G_{2s} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_s & G_{s1} & G_{s2} & \cdots & G_{ss} \end{vmatrix}$$

［C］　S の最小値を S_0 とすれば

$$S_0 = \mathop{S}_i \left(x_i - \sum_\alpha a_{i\alpha} g_\alpha^0 \right)^2 P_i = \frac{1}{G} \begin{vmatrix} H_0 & H_1 & \cdots & H_s \\ H_1 & G_{11} & \cdots & G_{1s} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ H_s & G_{s1} & \cdots & G_{ss} \end{vmatrix}$$

であって

$$\mathcal{E}\left(\frac{S_0}{n-s} \right) = \sigma^2$$

［D］　σ^2 が未知であれば，σ_F^2 に対する，不偏推定値としては［B］,［C］によって

$$V_F = \frac{S_0}{n-s} \mathop{S}_i \lambda_i^2 P_i$$

$$= -\frac{1}{n-s} \cdot \frac{1}{G^2} \begin{vmatrix} H_0 & H_1 & \cdots & H_s \\ H_1 & G_{11} & \cdots & G_{1s} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ H_s & G_{s1} & \cdots & G_{ss} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 0 & b_1 & \cdots & b_s \\ b_1 & G_{11} & \cdots & G_{1s} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_s & G_{s1} & \cdots & G_{ss} \end{vmatrix}$$

をとればよい。

§ 2. 標本積率の積率

次に任意の無限母集団からの Raudom Sample を，$O_n = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ とするとき，$x_1, x_2, \cdots, x_n$ の同次対称式の Expectation を求める必要が屡々起るのであるが直接計算する手間を省くために此処では Fisher が行った計算技術とその結果とを利用することにし，以下 R.A. Fisher: "Moments and Product Moments of Sampling Distributions." Proc. London Math. Soc., Vol. 30 (1931) から必要な部分を抜いて紹介しておくことにする。*)

同時対称式は結局原点のまわりの積率の有理整式であるからこれらの有理整式について平均値を求めることに帰着し，その結果は母積率の有理整式として與えられる。此処で，Fisher は結果を簡單にするために K-moment を用いた。K-moment とは次の如く定義されるものである。

確率変数 x の p.d.f (確率密度) 及 m.g.f (積率母函数) が存在してそれを夫々 $\phi(x)$, $M(t)$ とすれば $|t|<h$ で

$$M(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx}\phi(x)dx = 1 + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\mu_\nu}{\nu!} t^\nu$$

となるが，x の積率 $\mu_0 = 1, \mu_2, \mu_3, \cdots, \mu_n, \cdots$ を係数として形式的に出来る級数

$$M(t) \equiv 1 + \sum_{\nu=1}^{\infty} \mu_\nu \frac{t^\nu}{\nu!}.$$

に対し

$$K(t) \equiv \log M(t) = \sum_{\nu=0}^{\infty} K_\nu \frac{t^\nu}{\nu!},$$

とおくことに依って形式的に定まる係数 K_ν ($\nu = 0, 1, \cdots$) を x の K-moment (或は Tiele の半不変係数) と云う。

明らかに

$$K_0 = 0$$

であるが，一般に K と μ との関係は上の定義から次のように求められる。

$$K(t) = \log\left\{1+\sum_{\nu=1}^{\infty}\mu_\nu \frac{t^\nu}{\nu!}\right\}$$
$$= \sum_{\rho=1}^{\infty}(-1)^{\rho-1}\frac{1}{\rho}\left(\sum_{\nu=1}^{\infty}\mu_\nu\frac{t^\nu}{\nu!}\right)^\rho$$
$$= \sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{t^\nu}{\nu!}\sum_{\rho=1}^{\nu}\sum_{(\nu_1^{\pi_1}\nu_2^{\pi_2}\cdots\nu_\lambda^{\pi_\lambda})}\frac{(-1)^{\rho-1}(\rho-1)!}{\pi_1!\pi_2!\cdots\pi_\lambda!}\frac{\nu!}{(\nu_1!)^{\pi_1}(\nu_2!)^{\pi_2}\cdots(\nu_\lambda!)^{\pi_\lambda}}\mu_{\nu_1}^{\pi_1}\mu_{\nu_2}^{\pi_2}\cdots\mu_{\nu_\lambda}^{\pi_\lambda}$$

[1]

$$\therefore\ K_\nu = \sum_{\rho=1}^{\nu}\sum_{(\nu_1^{\pi_1}\nu_2^{\pi_2}\cdots\nu_\lambda^{\pi_\lambda})}\frac{(-1)^{\rho-1}(\rho-1)!}{\pi_1!\pi_2!\cdots\pi_\lambda!}\cdot\frac{\nu!}{(\nu_1!)^{\pi_1}(\nu_2!)^{\pi_2}\cdots(\nu_\lambda!)^{\pi_\lambda}}\mu_{\nu_1}^{\pi_1}\mu_{\nu_2}^{\pi_2}\cdots\mu_{\nu_\lambda}^{\pi_\lambda}$$

但し $(\nu_1^{\pi_1}\nu_2^{\pi_2}\cdots\cdots\nu_\lambda^{\pi_\lambda})$ は

$$\sum_{i=1}^{\lambda}\pi_i=\rho,\ \sum_{i=1}^{\lambda}\pi_i\nu_i=\nu,\ 1\leqq\nu_1\lneqq\nu_2\lneqq\nu_\lambda,\ \pi_i\geqq 1\ (i=1,2,\cdots,\lambda)$$

なる ν の分割を表わすものとし，$\sum_{(\nu_1^{\pi_1}\cdots\nu_\lambda^{\pi_\lambda})}$ はかゝる ρ 個の部分への分割のすべてについて加え合せることを意味する。

例えば

[2]

$$\begin{cases} K_1 = \mu_1 \\ K_2 = \mu_2-\mu_1^2 = \sigma^2 \\ K_3 = \mu_3-3\mu_1\mu_2+2\mu_1^3 = \mathcal{E}(x-\mu_1)^3 \\ K_4 = \mu_4-3\mu_2^2-4\mu_3\mu_1+12\mu_2\mu_1^2-6\mu_1^4 = \mathcal{E}(x-\mu_1)^4-3\sigma^4 \\ \vdots \end{cases}$$

*) M.G.Kendall : The Advanced Theory of Statistics (1943), Chap.11 に解説されている。

特に $\mu_1=0$ としておけば

$$[2]' \begin{cases} K_1 = 0 \\ K_2 = 0 \\ K_3 = \mu_3 \\ K_4 = \mu_4 - 3\mu_2^2 \\ K_5 = \mu_5 - 10\mu_3\mu_2 \end{cases}$$

更に又 Normal case には

$$[2]'' \begin{cases} K_1 = 0 \\ K_2 = \mu_2 = \sigma^2 \\ K_\nu = 0 \ (\nu \geq 3) \end{cases}$$

又定義から [1]を求めたのと全様にして

$$[3] \quad \mu_\nu = \sum_{\rho=1}^{\nu} \sum_{(\nu_1^{\pi_1}\nu_2^{\pi_2}\cdots\nu_\lambda^{\pi_\lambda})} \frac{1}{\pi_1!\,\pi_2!\cdots\pi_\lambda!} \frac{\nu!}{(\nu_1!)^{\pi_1}(\nu_2!)^{\pi_2}\cdots(\nu_\lambda!)^{\pi_\lambda}} K_{\nu_1}^{\pi_1} K_{\nu_2}^{\pi_2}\cdots K_{\nu_\lambda}^{\pi_\lambda}$$

これより例えば $\mu_1 = K_1 = 0$ としておけば

$$[3]' \begin{cases} \mu_2 = K_2 \\ \mu_3 = K_3 \\ \mu_4 = K_4 + 3K_2^2 \\ \mu_5 = K_5 + 10K_3K_2 \\ \mu_6 = K_6 + 15K_4K_2 + 10K_3^2 + 15K_2^3 \\ \vdots \end{cases}$$

此処で平均値を求めようとする全次対称式を標本積率の有理整式として表わす代りに，次に定義する。kー統計量の有理整式として表わすことに依って結果は一層簡単化される。

今　統計量　$s_\nu \equiv \overset{n}{\underset{i=1}{S}} x_i^\nu = S x^\nu$　$(\nu = 1, 2, \cdots)$

を定義すれば，k- statistic k_ν とは

$$\mathcal{E}(k_\nu) = K_\nu \qquad (\nu = 1, 2, \cdots)$$

となる如き s_ν の有理整式として定められる。かゝる k_ν がすべ

ての ν に対して定められることは以下の例から推して明らかである。

(i) $K_1 = \mu_1$

$$\mathcal{E}(s_1) = n\mu_1$$

$$\therefore\ \mathcal{E}(n^{-1}s_1) = K_1$$

$$\therefore\ \boxed{k_1 = n^{-1}s_1 = \frac{1}{n}Sx = \bar{x}}$$

(ii) $K_2 = \mu_2 - \mu_1^2$

$$\mathcal{E}(s_2) = n\mu_2$$

$$\mathcal{E}(s_1^2) = n\mu_2 + n(n-1)\mu_1^2$$

μ_2, μ_1 を消去すれば

$$k_2 = (n-1)^{-1}\mathcal{E}(s_2) - n^{-1}(n-1)^{-1}\mathcal{E}(s_1^2)$$

$$\therefore\ \boxed{k_2 = \frac{1}{n-1}(s_2 - n^{-1}s_1^2) = \frac{1}{n-1}S(x-\bar{x})^2}$$

(iii) $K_3 = \mu_3 - 3\mu_2\mu_1 + 2\mu_1^3$

$$\mathcal{E}(s_3) = n\mu_3$$

$$\mathcal{E}(s_2 s_1) = n\mu_3 + n(n-1)\mu_2\mu_1$$

$$\mathcal{E}(s_1^3) = n\mu_3 + 3n(n-1)\mu_2\mu_1 + n(n-1)(n-2)\mu_1^3$$

μ_3, μ_2, μ_1 を消去すれば

$$n(n-1)(n-2)K_3 = n^2\mathcal{E}(s_3) - 3n\mathcal{E}(s_2 s_1) + 2\mathcal{E}(s_1^3)$$

$$\therefore\ \boxed{k_3 = \frac{n}{(n-1)(n-2)}(s_3 - 3n^{-1}s_2 s_1 + 2n^{-2}s_1^3) = \frac{n}{(n-1)(n-2)}S(x-\bar{x})^3}$$

k_4 以下も同様にして求めることが出来る。 k_5 迄をまとめて書けば

$$
[4]\quad
\begin{cases}
k_1 = n^{-1}s_1 \\
k_2 = \dfrac{1}{n-1}\left(s_2 - n^{-1}s_1^2\right) \\
k_3 = \dfrac{n}{(n-1)(n-2)}\left(s_3 - 3n^{-1}s_2 s_1 + 2n^{-2}s_1^3\right) \\
k_4 = \dfrac{n}{(n-1)(n-2)(n-3)}\left\{(n+1)s_4 - 4n^{-1}(n+1)s_3 s_1 - 3n^{-1}(n-1)s_2^2 + 12n^{-1}s_2 s_1^2 - 6n^{-2}s_1^4\right. \\
k_5 = \dfrac{n^2}{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}\left\{(n+5)s_5 - 5\dfrac{n+5}{n}s_4 s_1 - 10\dfrac{n-1}{n}s_3 s_2\right. \\
\qquad \left. + 20\dfrac{n+2}{n^2}s_3 s_1^2 + 30\dfrac{n-1}{n}s_2^2 s_1 - \dfrac{60}{n^2}s_2 s_1^3 + \dfrac{24}{n^3}s_1^5\right\}.
\end{cases}
$$

多変数の場合の K- moment

Vector 確率変数 $(x_1, x_2, \cdots, x_N)$ の μ moment generating function を $M(t_1, t_2, \cdots, t_N)$ とすれば

$$M(t_1, t_2, \cdots, t_N) = \sum_{\nu} \mu(\nu_1, \nu_2, \cdots, \nu_N)\frac{t_1^{\nu_1}}{\nu_1!}\frac{t_2^{\nu_2}}{\nu_2!}\cdots\frac{t_N^{\nu_N}}{\nu_N!} \qquad (*)$$

すると K- m.g.f. は次の如く定義される。

$$K(t_1, t_2, \cdots, t_N) = \log M(t_1, t_2, \cdots, t_N)$$
$$= \sum_{\nu} K(\nu_1, \nu_2, \cdots, \nu_N)\frac{t_1^{\nu_1}}{\nu_1!}\frac{t_2^{\nu_2}}{\nu_2!}\cdots\frac{t_N^{\nu_N}}{\nu_N} \qquad (**)$$

此処で $\mu(\nu_1, \nu_2, \cdots, \nu_N)$ は x_1 について ν_1 次, x_2 について ν_2 次, ……, x_N については ν_N 次の moment $\mu_{\nu_1, \nu_2 \cdots \nu_N}$ を表わすものとする。K についても同様.

(*) と (**) とを比較して [1] 及 [3] を導いたのと同様にして,

$$[5]\quad \begin{cases} K(\nu_1,\nu_2,\cdots,\nu_N)=\sum_{\rho} \underset{\lambda}{S} \dfrac{(-1)^{\rho-1}(\rho-1)!}{\pi_1!\pi_2!\cdots\pi_\lambda!} \dfrac{\nu_1!}{(\nu_{11}!)^{\pi_1}\cdots(\nu_{1\lambda}!)^{\pi_\lambda}}\cdots\dfrac{\nu_N!}{(\nu_{N1}!)^{\pi_1}\cdots(\nu_{N\lambda}!)^{\pi_\lambda}} \\ \qquad \times\, \mu(\nu_{11},\nu_{21},\cdots,\nu_{N1})^{\pi_1}\cdots\mu(\nu_{1\lambda},\nu_{2\lambda},\cdots\nu_{N\lambda})^{\pi_\lambda} \end{cases}$$

$$[6]\quad \mu(\nu_1,\nu_2,\cdots,\nu_N)=\sum_{\rho} \underset{\lambda}{S} \frac{1}{\pi_1!\pi_2!\cdots\pi_\lambda!} \frac{\nu_1!}{(\nu_{11}!)^{\pi_1}\cdots(\nu_{1\lambda})^{\pi_\lambda}}\cdots\frac{\nu_N!}{(\nu_{N1}!)^{\pi_1}\cdots(\nu_{N\lambda}!)^{\pi_\lambda}}$$

$$\times\, K(\nu_{11},\nu_{21},\cdots,\nu_{N1})^{\pi_1}\cdots K(\nu_{1\lambda},\nu_{2\lambda},\cdots,\nu_{N\lambda})^{\pi_\lambda}$$

此処には $\underset{\lambda}{S}$ は $\begin{pmatrix}\nu_1\\ \nu_2\\ \vdots\\ \nu_N\end{pmatrix}$ の ρ 個の部分への分割

$$\left\{\begin{pmatrix}\nu_{11}\\ \nu_{21}\\ \vdots\\ \nu_{N1}\end{pmatrix}^{\pi_1}\begin{pmatrix}\nu_{11}\\ \nu_{22}\\ \vdots\\ \nu_{N2}\end{pmatrix}^{\pi_2}\cdots\begin{pmatrix}\nu_{1\lambda}\\ \nu_{2\lambda}\\ \vdots\\ \nu_{N\lambda}\end{pmatrix}^{\pi_\lambda}\right\}$$

のすべてについて加え合せることを意味する。

但し $\rho=\sum_{i=1}^{\lambda}\pi_i$

特に

$$K_{11}=\mu_{11}-\mu_{10}\mu_{01}$$

$$[7]\quad \begin{cases} K_{21}=\mu_{21}-\mu_{20}\mu_{01}-2\mu_{11}\mu_{10}+2\mu_{10}^2\mu_{01} \\ K_{31}=\mu_{31}-\mu_{30}\mu_{01}-3\mu_{21}\mu_{10}-3\mu_{20}\mu_{11}+6\mu_{20}\mu_{10}\mu_{01}+6\mu_{11}\mu_{10}^2 \\ \qquad -6\mu_{10}^3\mu_{01} \\ K_{22}=\mu_{22}-\mu_{20}\mu_{02}-2\mu_{21}\mu_{01}-2\mu_{12}\mu_{10}-2\mu_{11}^2 \\ \qquad +2\mu_{20}\mu_{10}^2+2\mu_{02}\mu_{10}^2+8\mu_{11}\mu_{10}\mu_{01}-6\mu_{10}^2\mu_{01}^2 \end{cases}$$

etc.

x_1とx_2とを入れかえて考えればμ_{31}はμ_{13}となるからK_{13}の展開式を得るにはK_{31}の展開式に於るμの二つの添字を入れかえればよい。

又，$x_1 = x_2$とおけば$\mu_{ij} = \mu_{i+j}$となるから二つの添字を加えて一つにまとめれば[7]から[2]が出る。次に述べる，μのKに依る展開式及k統計量を與える式に於ても仝様である。

$$
[8]\left\{
\begin{aligned}
\mu_{11} &= K_{11} + K_{10}K_{01} \\
\mu_{21} &= K_{21} + 2K_{11}K_{10} + K_{20}K_{01} + K_{10}^2 K_{01} \\
\mu_{31} &= K_{31} + K_{30}K_{01} + 3K_{10}K_{21} + 3K_{20}K_{11} + 3K_{11}K_{10}^2 + 3K_{20}K_{01}K_{10} + K_{10}^3 K_{01} \\
\mu_{22} &= K_{22} + 2K_{12}K_{10} + 2K_{01}K_{21} + K_{20}K_{02} + 2K_{11}^2 + K_{20}K_{01}^2 + K_{10}^2 K_{02} \\
&\quad + 4K_{11}K_{01}K_{10} + K_{10}^2 K_{01}^2
\end{aligned}
\right.
$$

etc.

k 統計量

$$
[9]\left\{
\begin{aligned}
k_{11} &= \frac{1}{n-1}\left(s_{11} - n^{-1}s_{10}s_{01}\right) \\
k_{21} &= \frac{n}{(n-1)(n-2)}\left(s_{21} - 2n^{-1}s_{11}s_{10} - n^{-1}s_{20}s_{01} + 2n^{-2}s_{10}^2 s_{01}\right) \\
k_{31} &= \frac{n}{(n-1)(n-2)(n-3)}\Big\{(n+1)s_{31} - n^{-1}(n+1)s_{30}s_{01} - 3n^{-1}(n+1)s_{21}s_{10} \\
&\qquad - 3n^{-1}(n-1)s_{11}s_{21} + 6n^{-1}s_{11}s_{10}^2 + 6n^{-1}s_{20}s_{01} - 6n^{-2}s_{10}^3 s_{01}\Big\} \\
k_{22} &= \frac{n}{(n-1)(n-2)(n-3)}\Big\{(n+1)s_{22} - 2n^{-1}(n+1)s_{21}s_{01} - n^{-1}(n+1)s_{12}s_{10} \\
&\qquad - n^{-1}(n-1)s_{20}s_{02} - 2n^{-1}(n-1)s_{11}^2 + 8n^{-1}s_{11}s_{10}s_{01} + 2n^{-1}s_{02}s_{10}^2 \\
&\qquad + 2n^{-1}s_{20}s_{01}^2 - 6n^{-2}s_{10}^2 s_{01}^2\Big\}
\end{aligned}
\right.
$$

扨て Vector 確率変数 $(k_1, k_2, \cdots\cdots, k_N)$ を考え，この μ 及 K m.g.f. を夫々 $M(t_1, t_2, \cdots\cdots, t_N)$，$K(t_1, t_2, \cdots\cdots, t_N)$ とすれば前出 (＊)，(＊＊) の如く表わされるのであるが，簡単のために $V_{p_2}=\pi_2$，$\cdots\cdots$，$V_{p_s}=\pi_s$ ；それ以外の $V_i=0$，の場合の積率を次の様に表わすことにする.

$$\mu(0, \cdots, V_{p_1}, \cdots, V_{p_2}, \cdots, V_{p_s}, \cdots, 0)=\mu(p_1^{\pi_1} p_2^{\pi_2} \cdots p_s^{\pi_s})$$

$$K(0, \cdots, V_{p_1}, \cdots, V_{p_2}, \cdots, V_{p_s}, \cdots, 0)=K(p_1^{\pi_1} p_2^{\pi_2} \cdots p_s^{\pi_s})$$

こゝで原点を移動して $\mu_1=0$（母平均が 0）ととってあれば k 統計量の定義から

$$O_1 : \begin{cases} K(1)=K_1=0 \\ K(2)=K_2 \\ \text{一般に } K(s)=K_s \end{cases}$$

又

$$O_2 : \quad K(1^V)=n^{-(V-1)}K_V$$

$$O_3 : \quad K(2^2)=\frac{1}{n}K_4+\frac{2}{n-1}K_2^2$$

であることが，分っているとき $K(1\ 2^2)$ を求めるには右辺の K_V をその添数を 1 つ増してnで割ったもの $n^{-1}K_{V+1}$ でおきかえればよい。即

$$K(1\ 2^2)=\frac{1}{n^2}K_5+\frac{2}{n(n-1)}K_3K_2+\frac{2}{n(n-1)}K_2K_3$$

$$=\frac{1}{n^2}K_5+\frac{4}{n(n-1)}K_3K_2$$

全様に

$$K(1^2\cdot 2^2)=\frac{1}{n^3}K_6+\frac{40}{n^2(n-1)}K_4K_2+\frac{4}{n^2(n-1)}K_3^2$$

であることが示されるのであるが，証明は略する.

故に，k統計量の仝時分布の K moment の内で直接求めねばならないものは，ν の2以上の部分への分割 $(2^{\nu_2}3^{\nu_3}\cdots\cdots)$ に対応する $K(2^{\nu_2}3^{\nu_3}\cdots\cdots)$ だけである。この種の分割の個数は次のようになる。

ν	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
分割の個数	1	1	3	3	6	7	11	13	20	23	33	40	54	65

Fisher の論文には $\nu \leqq 10$ に対する32個の K-moment 及 $K(3^4)$ $K(6^2)$, $K(4^3)$, $K(2^6)$ が示されている。

以下に必要なものをあげれば次の如くである。

$$K(2^2)=\frac{1}{n}K_4+\frac{2}{n-1}K_2^2$$

$$K(2^3)=\frac{1}{n^2}K_6+\frac{12}{n(n-1)}K_4K_2+\frac{4(n-1)}{n(n-1)^2}K_3^2+\frac{8}{(n-1)^2}K_2^3$$

$$K(2^4)=\frac{1}{n^3}K_8+\frac{24}{n^2(n-1)}K_6K_2+\frac{32}{n^2(n-1)^2}K_5K_3+\frac{8(4n^2-9n+6)}{n^2(n-1)^3}K_4^2$$
$$+\frac{144}{n(n-1)^2}K_4K_2^2+\frac{96(n-2)}{2(n-1)^3}K_3^2K_2+\frac{48}{(n-1)^3}K_2^4$$

この種の K-moment を導く手順は §5 に例示する。なお以下の演算に必要な二三の K-moment の性質をあげておく。

変数 x の K-moment を $K(x)$ であらわす。又 c, d を常数とする。

[11]　x と y とが独立ならば $K(x+y)=K(x)+K(y)$

[12]
$$\begin{cases} K_\nu(cx)=c^\nu K_\nu(x) & (\nu=0,1,2,\cdots) \\ K_1(x+c)=K_1(x)+c & \\ K_\nu(x+c)=K_\nu(x) & (\nu=2,3,\cdots) \end{cases}$$

$$[12]' \begin{cases} K_{\mu\nu}(cx, dy) = c^{\mu} d^{\nu} K_{\mu\nu}(x, y) & (1 \leqq \mu+\nu < \infty) \\ K_{10}(x+c, y+d) = K_{10}(x, y) + c \\ K_{01}(x+c, y+d) = K_{01}(x, y) + d \\ K_{\mu\nu}(x+c, y+d) = K_{\mu\nu}(x, y) & (2 \leqq \nu+\mu < \infty) \end{cases}$$

三変数以上の場合も同様である

これらの結果から標本積率，或はその積の平均値を求める手順は次のようになる。

a) 原点を移動して $\mu_1' = K_1 = 0$ としておく

b) 平均値を求めようとする式を k 統計量の有理整式で表わす

c) この項である k 統計量の積の平均値を k 統計量の全時分布の K－moment で表わす。

d) Fisher に依つて求められているこれらの K－moment を，Expectation を取つた原式に代入する。

e) 必要があれば K－moment を μ moment でおきかえる。

例：標本分散 $m_2 = n^{-1} S(x-\bar{x})^2$ の Variance.

$\mathcal{E}(x) = \mu$, $S(x-\mu)^k = s_k$ $(k = 1, 2, \cdots\cdots)$ とおけば[4]から

$$m_2 = n^{-1} s_2 - (n^{-1} s_1)^2 = \frac{n-1}{n} k_2 .$$

$$\therefore \ \mathcal{E}(m_2) = \frac{n-1}{n} K_2 = \frac{n-1}{n} \sigma^2$$

$$\therefore \ m_2 - \mathcal{E}(m_2) = \frac{n-1}{n} (k_2 - K_2)$$

$$\therefore\ Var\, m_2 = \left(\frac{n-1}{n}\right)^2 \mathcal{E}(k_2 - K_2)^2$$

$$= \left(\frac{n-1}{n}\right)^2 \mu_2 (k_2 - K_2)$$

$$= \left(\frac{n-1}{n}\right)^2 K_2 (k_2 - K_2) \qquad \left(\because \begin{array}{l} K_1(k_2-K_2)=0 \\ \mu_2 = K_2 + K_1^2 \end{array}\right).$$

$$= \left(\frac{n-1}{n}\right)^2 K_2(k_2) \qquad (\because \text{[12] による})$$

$$= \left(\frac{n-1}{n}\right)^2 K(2^2)$$

$$= \left(\frac{n-1}{n}\right)^2 \left(\frac{1}{n} K_4 + \frac{2}{n-1} K_2^2\right) \quad (\because \text{[10] による})$$

[2]' を使つて K を μ_4, $\mu_2 = \sigma^2$ でおきかえれば

$$Var\, m_2 \doteqdot \frac{(n-1)^2}{n^3}\mu_4 - \frac{(n-1)(n-3)}{n^3}\sigma^4$$

§ 3. 線型回帰の場合の推定値

以下推定しようとする母数は y の総計 $\sum y$ であつて，調査単位の総数 N は既知であるとする。推定する母数が y の母平均である場合に適応させるための修正は容易である。

先づ y の x に対する回帰が線型であつて，しかも residual variance が一定の場合について考察する。即ち

$$[13] \quad \begin{cases} y = \alpha + \beta x + e \\ \mathcal{E}(e \mid x) = 0 \\ \mathcal{E}(e^2 \mid x) = \sigma^2 \end{cases}$$

此処に $\mathcal{E}(\ \mid x)$ は x を固定した時の條件附平均値を意味し，

α, β, σ^2 は未知の常数とする。

この時 $\sum y$ に対する線型最良不偏推定値 Y_e は，$\bar{x}_p$, N が既知ならば

$$Y_e = N\left\{\bar{y}_s - b(\bar{x}_s - \bar{x}_p)\right\} \tag{1}$$

但し
$$\begin{cases} b = \dfrac{S(x-\bar{x}_s)(y-\bar{y}_s)}{S(x-\bar{x}_s)^2} & \text{，即標本回帰係数} \\ \bar{x}_s,\ \bar{y}_s\ ; & \text{夫々 } x \text{ 及 } y \text{ の標本平均} \\ \bar{x}_p\ ; & x \text{ の母平均} \end{cases}$$

で與えられ，これを線型回帰推定値と呼ぶ。標本に抽かれた x を固定した時の Y_e の分散 $V(Y_e)$ は次のようになる。

$$V(Y_e) = N^2\sigma_y^2(1-\rho^2)\left\{\frac{1}{n} + \frac{(\bar{x}_s - \bar{x}_p)^2}{S(x-\bar{x}_s)^2}\right\} \tag{2}$$

但し
$$\begin{cases} \sigma_y^2\ ; & y \text{ の母分散} \\ \rho^2\ ; & \text{母相関係数} \end{cases}$$

又 $V(Y_e)$ に対する不偏推定値としては

$$v(Y_e) = N^2\frac{S_d^2}{n-2}\left\{\frac{1}{n} + \frac{(\bar{x}_s - \bar{x}_p)^2}{S(x-\bar{x}_s)^2}\right\} \tag{2'}$$

但し S_d^2 は標本に於る最小自乗法的回帰直線に関する残差平方和

を取ればよい。

〔(1), (2), (2)′ の証明〕 直接に求めることも出来るが，此処では §1 に述べた Markoff の定理に依る。

先づ抽出された標本を

$$(x_1, y_1),\ (x_2, y_2),\ \cdots\cdots,\ (x_n, y_n)$$

とすれば，N が十分大きければ，吾々は $x_1, x_2, \cdots, x_n$ を固定した時，それらに対応する $y_1, y_2, \cdots, y_n$ の部分母集団 $\pi_1, \pi_2, \cdots, \pi_n$ を考えることに成る。定理の條件はこの場合次の I～V の各項で示される。

I.　$y_i = \alpha + \beta x_i + e_i \quad (i = 1, 2, \cdots, n)$ とすれば

[14]　$\mathcal{E}(y_i \mid x_i) = \alpha + \beta x_i$

即　$p_1 = \alpha, \quad p_2 = \beta$

$$(a_{i\alpha}) = \begin{pmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_n \end{pmatrix}$$

II.　$s = \mathrm{Rank}\,(a_{i\alpha}) = 2 < n$

III.　後の場合に適用出来るために

[15]　$\sigma_{y_i}^2 = \mathcal{E}(e_i^2 \mid x_i) = \sigma_i^2 = \sigma^2 / w_i$，即 $P_i = w_i$

但 σ^2 は未知或は既知，$w_i > 0$ は既知の常数

IV.　各 π_i からの一つの任意標本が y_i である。

V.　推定すべき母数は [13] より $\sum y = N\bar{y}_p = N\alpha + N\beta\bar{x}_p$

即ち　$b_1 = N, \quad b_2 = N\bar{x}_p$　（既知）

此処で必要な量を求めると

(a)　$G_{11} = \underset{i}{S}\, w_i \equiv Sw$

$G_{12} = G_{21} = Swx = \bar{x}_w \cdot Sw$

$G_{22} = Swx^2 = Sw(x - \bar{x}_w)^2 + \bar{x}_w^2 \cdot Sw$

$\therefore G = (Sw) \cdot Sw(x - \bar{x}_w)^2$

但し　$\bar{x}_w = Swx / Sw,\quad S \equiv \Sigma_{i=1}^{n}$

(b)　$H_1 = Swy = \bar{y}_w \cdot Sw$

$$H_2 = Swxy = Sw(x-\bar{x}_w)(y-\bar{y}_w) + \bar{x}_w \cdot \bar{y}_w \cdot Sw$$

但し　$\bar{y}_w = Swy / Sw$

(c)　$H_3 = Swy^2 = Sw(y-\bar{y}_w)^2 + \bar{y}_w^2 \cdot Sw$

故に　I〜V　の条件から　Markoff　の定理に依り

[A]
$$Y_e = -\frac{1}{G}\begin{vmatrix} 0 & \bar{y}_w \cdot Sw & Sw(x-\bar{x}_w)(y-\bar{y}_w) + \bar{x}_w \cdot \bar{y}_w \cdot Sw \\ N & Sw & \bar{x}_w \cdot Sw \\ N\bar{x}_p & \bar{x}_w \cdot Sw & Sw(x-\bar{x}_w)^2 + \bar{x}_w^2 \cdot Sw \end{vmatrix}.$$

$$= -\frac{1}{G}\begin{vmatrix} -N\bar{y}_w & 0 & Sw(x-x_w)(y-\bar{y}_w) \\ N & Sw & \bar{x}_w \cdot Sw \\ N(\bar{x}_p-\bar{x}_w) & 0 & Sw(x-\bar{x}_w)^2 \end{vmatrix}$$

$$= N\left\{ \bar{y}_w - (\bar{x}_w - \bar{x}_p)\frac{Sw(x-\bar{x}_w)(y-\bar{y}_w)}{Sw(x-\bar{x}_w)^2} \right\}$$

$$\therefore\quad \boxed{\begin{aligned} & Y_e = N\left\{ \bar{y}_w - b_w(\bar{x}_w - \bar{x}_p) \right\} \\ & \text{但し}\begin{cases} \bar{x}_w = \dfrac{Swx}{Sw}, \quad \bar{y}_w = \dfrac{Swy}{Sw} \\ b_w = \dfrac{Sw(x-\bar{x}_w)(y-\bar{y}_w)}{Sw(x-\bar{x}_w)^2} \end{cases} \end{aligned}} \qquad (12)$$

[B]
$$\nabla(Y_e) = -\frac{\sigma^2}{G}\begin{vmatrix} 0 & N & N\bar{x}_p \\ N & S_w & \bar{x}_w \cdot S_w \\ N\bar{x}_p & \bar{x}_w \cdot S_w & S_w(x-\bar{x}_w)^2+\bar{x}_w^2 \cdot S_w \end{vmatrix}$$

$$= \frac{N^2\sigma^2}{G}\left\{ S_w(x-\bar{x}_w)^2 + (\bar{x}_w-\bar{x}_p)^2 \cdot S_w \right\}$$

$$\therefore \quad \boxed{\nabla(Y_e) = N^2\sigma^2\left\{ \frac{1}{S_w} + \frac{(\bar{x}_w-\bar{x}_p)^2}{S_w(x-\bar{x}_w)^2} \right\}} \qquad (13)'$$

[D]. σ^2 が未知ならば $\nabla(Y_e)$ に対する不偏推定値 $v(Y_e)$ は次の式で与えられる。

$$v(Y_e) = \frac{N^2}{n-2}\,\frac{1}{G}\left\{ S_w(x-\bar{x}_w)^2 + (S_w)(\bar{x}_w-\bar{x}_p)^2 \right\}$$

$$\times \begin{vmatrix} S_w(y-\bar{y}_w)^2+\bar{y}_w^2 \cdot S_w & \bar{y}_w \cdot S_w & S_w(x-\bar{x}_w)(y-\bar{y}_w)+\bar{x}_w\bar{y}_w S_w \\ \bar{y}_w \cdot S_w & S_w & \bar{x}_w \cdot S_w \\ S_w(x-\bar{x}_w)(y-\bar{y}_w)+\bar{x}_w\bar{y}_w \cdot S_w & \bar{x}_w S_w & S_w(x-\bar{x}_w)^2+\bar{x}_w^2 \cdot S_w \end{vmatrix}$$

上式の行列式の値は

$$(S_w)\left[S_w(x-\bar{x}_w)^2 \cdot S_w(y-\bar{y}_w)^2 - \left\{ S_w(x-\bar{x}_w)(y-\bar{y}_w) \right\}^2 \right]$$

となるから

$$v(Y_e) = \frac{N^2}{n-2} \cdot S_w(y-\bar{y}_w)^2 \cdot (1-\gamma_w^2)\left\{ \frac{1}{S_w} + \frac{(\bar{x}_w-\bar{x}_p)^2}{S_w(x-\bar{x}_w)^2} \right\}$$

但し γ_w は x と y との荷重相関係数 即 $\gamma_w = \dfrac{S_w(x-\bar{x}_w)(y-\bar{y}_w)}{\{S_w(x-\bar{x}_w)^2 \cdot S_w(y-\bar{y}_w)^2\}^{\frac{1}{2}}}$

此処で標本に於る w_i を荷重とした時の最小自乗法的回帰直線を

$$\eta = a_w + b_w \xi$$

とし $\eta_{x_i} = a_w + b_w x_i \quad (i = 1, 2, \cdots, n)$

とすれば，標本残差平方和 $S^2 dw$ は

[15] $$S^2 dw = Sw(y - \eta_x)^2 = Sw(y - \bar{y}_w)^2 (1 - r_w^2)$$

であるから結局

$$\boxed{v(Ye) = N^2 \frac{S^2 dw}{n-2} \left\{ \frac{1}{Sw} + \frac{(\bar{x}_w - \bar{x}_p)^2}{Sw(x - \bar{x}_w)^2} \right\}} \quad (14)'$$

此処で $w_i = 1 \quad (i = 1, 2, \cdots, n)$ とおけば

$$\bar{x}_w = \bar{x}_s, \quad \bar{y}_w = \bar{y}_s$$

$$Sw(x - \bar{x}_w)^2 = S(x - \bar{x}_o)^2, \quad b_w = b, \quad Sw = n, \quad S^2 dw = S_d^2 .$$

となり，且つ $\sigma^2 = \mathcal{E}(e^2 \mid x)$ であることから

[16] $$\sigma_y^2 (1 - \rho^2) = \mathcal{E} \cdot \mathcal{E}(e^2 \mid x) = \sigma^2$$

であるから，上の [A], [B], [C] の結果から順次に (1), (2), (2)' を得る。

一方 $$y_i = \alpha + \beta x_i + e_i$$

$$\bar{e}_s = Se/n = \frac{1}{n} \underset{i}{S} e_i$$

とおけば [13] から

$$y - \bar{y}_s = \beta(x - \bar{x}_s) + (e - \bar{e}_s)$$

$$\bar{y}_s - \bar{y}_p = \beta(\bar{x}_s - \bar{x}_p) + \bar{e}_s$$

等の関係を得るが，之に依って b をかきかえると

$$b = \beta + \frac{S(x-\bar{x}_s)(e-\bar{e}_s)}{S(x-\bar{x}_s)^2}$$

これらの結果を（1）に代入して書き換えると

[17] $$Y_e - N\bar{y}_p = N\left\{\bar{e}_s - \frac{S(x-\bar{x}_s)(e-\bar{e}_s)}{S(x-\bar{x}_s)^2}(\bar{x}_s-\bar{x}_p)\right\}$$

又は

[18] $$Y_e \dot{-} \Sigma y = N.S\left\{\frac{1}{n} - \frac{(x-\bar{x}_s)}{S(x-\bar{x}_s)^2}(\bar{x}_s-\bar{x}_p)\right\}e$$

[18] に於ける e の係数の平方和は

[19] $$S\left\{\frac{1}{n} - \frac{(x-\bar{x}_s)}{S(x-\bar{x}_o)^2}(\bar{x}_s-\bar{x}_p)\right\}^2 = \frac{1}{n_1} + \frac{(\bar{x}_o-\bar{x}_p)^2}{S(x-\bar{x}_s)^2}$$

となっている。以上のことから x を固定した時の y の分布が正規型ならば，換言すれば e の分布が正規分布 $N(0,\sigma^2)$ ならば Y_e の條件附分布が

$$N\left(0,\ N^2\sigma^2\left\{\frac{1}{n} + \frac{(\bar{x}_o-\bar{x}_p)^2}{S(x-\bar{x}_s)^2}\right\}\right)$$

であることが分る。

又

$$S\left\{\frac{1}{n} - \frac{x-\bar{x}_s}{S(x-\bar{x}_s)^2}(\bar{x}_s-\bar{x}_p)\right\} \mp 1$$

であるから [18] の右辺の右の因数は e の或る荷重平均となっているのであるが，$n \to \infty$ のとき係数

$$\left\{(x-\bar{x}_s)(\bar{x}_s-\bar{x}_p)/S(x-\bar{x}_s)^2\right\} \to 0$$

であることが確率收斂の意味で保証されるから，n が大きい時は普通の標本平均 $S\frac{e}{n}$ であると考えられ，從ってその分布は正規分布に近似すると云うことが出來る。

[19] と $\varepsilon(e_i e_j / x) = 0 \quad (i \neq j)$ であることを使えば [18] か

ら直接に(2)を導くことが出来る。

なお，各 x_i に対する y_i の分布が正規であれば，(1)は，Fisher の意味で，最尤推定値であることは容易に示される。

次に，他の形式の推定値と比較するために，任意に抽出される $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ についての $V(Ye)$ の平均値，即ち，Ye が unbiased であるから Ye の條件なしの分散を求めよう。（2）から明らかに，これは x の母集団の分布に依存する。 x の分布の型を仮定しない場合一般に(2)の平均値は $\frac{1}{n}$ の冪級数として表わされるが，その最初の三項を取れば次のようになる。

$$\overline{V}(Ye) = \frac{N^2\sigma_y^2(1-\rho^2)}{n}\left\{1+\frac{1}{n}+\frac{3+2\gamma_1^2}{n^2}\right\} \qquad (3)$$

此処に γ_1 は Fisher の相対歪度(Measure of relative skewness)であつて，K_2，K_3 を夫々母集団の二次及三次の Tiele の半不変係数，或は K-moment(§2)とすれば

$$\gamma_1^2 = \frac{K_3^2}{K_2^3}$$

である。 一般に $K_2 = \sigma^2$， $K_3 = \mu_3$（平均のまわりの三次の積率）であるから γ_1 は普通の意味での歪度である。

特に x が正規分布をする場合には，$\gamma_1 = 0$ で且つ(2)に於る

$$n(n-1)\frac{(\overline{x}_s - x_p)^2}{S(x-\overline{x}_s)^2}$$

は自由度 $(1, n-1)$ の F 分布とする。従って

$$E\left\{\frac{n(\overline{x}_s-\overline{x}_p)^2}{S(x-\overline{x}_s)^2}\right\} = \frac{1}{n-3} = \frac{1}{n}+\frac{3}{n^2}+O\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

$$\therefore \quad \overline{V}(Y_e) = \frac{N^2\sigma_y^2(1-\rho^2)}{n}\left\{1+\frac{1}{n}+\frac{3}{n^2}+O\left(\frac{1}{n^3}\right)\right\}$$

となり，（3）と全じ order の近似度で一致する。

［（3）の証明］　$x-\overline{x}_p = X$，X の K-moment を K（$K_1=0$ を除き x の K-moment と一致する），k 統計量を k とすれば［4］から

［20］
$$\begin{cases} \overline{x}_s - \overline{x}_p = \dfrac{1}{n}S(x-\overline{x}_p) = k_1 \\ S(x-\overline{x}_s)^2 = S(X-\overline{X}_s)^2 = (n-1)k_2 \end{cases}$$

［21］
$$\therefore \quad \frac{(\overline{x}_s-\overline{x}_p)^2}{S(x-\overline{x}_s)^2} = \frac{1}{n-1}\,\frac{k_1^2}{k_2}$$

処で $\mathcal{E}(k_2) = K_1(k_2) = K_2$ であるから

［22］
$$V = \frac{k_2-K_2}{K_2}$$

とおけば　$\mathcal{E}(V) = K_1(V) = 0$　故に

$$\mathcal{E}(V^2) = \mu_2(V) = K_2(V) \qquad (\because [3]')$$
$$= K_2(k_2)/K_2^2 = K(2^2)/K_2^2 \quad (\because [12])$$

［23］
$$\therefore \quad \mathcal{E}(V^2) = \frac{1}{n}\frac{K_4}{K_2^2} + \frac{2}{n-1} \qquad (\because [10])$$

即　$\mathcal{E}(V)=0$，$\sigma_V^2 = O\left(\frac{1}{n}\right)$ であるから $|V|<1$ であることは略確実である。故に

$$\frac{k_1^2}{k_2} = \frac{k_1^2}{K_2}(1+V)^{-1} = \frac{k_1^2}{K_2}(1-V+V^2-\cdots\cdots) \quad (\text{一様，絶対})$$

［24］
$$\therefore \quad \mathcal{E}\left(\frac{k_1^2}{k_2}\right) = \frac{1}{K}\left\{\mathcal{E}(k_1^2) - \mathcal{E}(k_1^2V) + \mathcal{E}(k_1^2V^2) - \cdots\right\} \quad (\text{絶対})$$

如で　$\mathcal{E}(k_1^2) = \mu_2(k_1) = K_2(k_1)$　(∵[3]'4 $K_1(k_1) = k_1 = 0$)

[25]　$= K(1^2) = \frac{K_2}{n}$　(∵ O_2)

又　$\mathcal{E}(k_1^2 V) = \mu_{21}(k_1, V) = K_{21}(k_1, V)$　(∵ [8])

$= \frac{1}{K_2} K_{21}(k_1, k_2)$　(∵ [12])

[26]　$= \frac{1}{K_2} K(1^2 \cdot 2) = \frac{1}{n^2} \frac{K_4}{K_2}$　(∵ O_3 と同様に)

又，　$\mathcal{E}(k_1^2 V^2) = \mu_{22}(k_1, V)$

$= K_{22}(k_1, V) + K_2(k_1) K_2(V) + 2K_{11}^2(k_1, V)$

(∵ [3])

上と同様にして　$K_{22}(k_1, V) = \frac{1}{K_2^2} K(1^2 2^2)$

$= \frac{1}{n^3} \frac{K_6}{K_2^2} + \frac{4}{n^2(n-1)} \frac{K_4}{K_2} + \frac{4}{n^2(n-1)} \frac{K_3^2}{K_2^2}$

(∵ [10]4 O_3)

[27]　$K_{11}(k_1, V) = \frac{1}{K_2} K(1\,2) = \frac{1}{n} \frac{K_3}{K_2}$

$K_2(k_1) = K(1^2) = \frac{1}{n} K_2$

$K_2(V) = \frac{1}{n} \frac{K_4}{K_2^2} + \frac{2}{n-1}$

[28]　$\therefore\ \mathcal{E}(k_1^2 V) = \frac{2}{n^2} \frac{K_3^2}{K_2^2} + \frac{1}{n^2} \frac{K_4}{K_2} + \frac{2}{n(n-1)} K_2 + O\left(\frac{1}{n^3}\right)$

次に $K_{10} = K_{01} = 0$ のとき，一般式 [6] から得る。

[29]　$\mu_{23} = K_{23} + K_{20} K_{03} + 3K_{21} K_{02} + 6K_{11} K_{12}$

を使えば

$\mathcal{E}(k_1^2 V^3) = \mu_{23}(k_1, V)$

[30] $$= K_{23}(k_1, V) + K_2(k_1)K_3(V) + 3K_{21}(k_1, V)K_2(V) + 6K_{11}(k_1, V)K_{12}(k_1, V)$$

処で $K_{23}(k_1, V) = \dfrac{1}{K_2^3}K(1^2 2^3) = O\left(\dfrac{1}{n^4}\right)$ (∵[10]のO_3)

$K_3(V) = \dfrac{1}{K_2^3}K(2^3) = O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ (∵[10])

$K_2(k_1) = K(1^2) \doteqdot \dfrac{K_2}{n}$ (∵ O_2)

又[26]から、$K_{21}(k_1, V) = \dfrac{1}{K_2}K(1^2 2) = O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$

[23]から $K_2(V) = \dfrac{1}{K_2^2}K(2^2) = O\left(\dfrac{1}{n}\right)$

[27]から $K_{11}(k_1, V) = \dfrac{1}{n}\dfrac{K_3}{K_2}$

又 $K_{12}(k_1, V) = \dfrac{1}{K_2^2}K(1\,2^2) = O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ (∵[10]のO_3)

以上の結果を[30]に代入すれば

[31] $$\varepsilon(k_1^2 V^3) \doteqdot O\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

次に $K_{10} = K_{01} = 0$ のときは

$$\mu_{24} = K_{24} + K_{20}K_{04} + 4K_{21}K_{03} + 8K_{11}K_{13} + 6K_{22}K_{03} + 6K_{12}^2 + 3K_{20}K_{02}^2 + 12K_{11}^2K_{02}$$

を使えば、上と同様に評価を行って

$$\varepsilon(k_1^2 V^4) = O\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

であることが示される。

処で $|V| < 1$ とすれば $|k_1^2 V^h| \leq k_1^2 V^4$ $(h \geq 4)$ だから

$$|\varepsilon(k_1^2 V^h)| \leq \varepsilon|k_1^2 V^4| \leq \varepsilon k_1^2 V^4 = O\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

故に [31] の結果と併せて

[32] $$\mathcal{E}\left(k_1^2 V^{h}\right) = O\left(\frac{1}{n^3}\right) \qquad (h \geq 3)$$

ここで [25], [26], [28], [32], を [24] の右辺に代入すれば，この級数が絶対收斂だから

$$\mathcal{E}\left(\frac{k_1^2}{k_2}\right) = \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}\frac{K_4}{K_2^2} + \frac{1}{n^2}\frac{K_3^2}{K_2^3} + \frac{1}{n^2}\frac{K_4}{K_2^2} + \frac{2}{n(n-1)} + O\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

$$= \frac{1}{n} + \frac{2}{n^2} + \frac{\varphi_1^3}{n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

故に [21] から

$$\mathcal{E}\ \frac{(\bar{x}_0 - \bar{x}_p)^2}{S(x-\bar{x}_s)^2} = \frac{1}{n-1}\ \mathcal{E}\left(\frac{k_1^2}{k_2}\right)$$

$$= \frac{1}{n^2} + \frac{3}{n^3} + \frac{2\varphi_1^2}{n^3} + O\left(\frac{1}{n^4}\right)$$

この結果から (3)は直に導かれる。

§4. 回帰直線が原点を通る場合の推定量

母集団の回帰直線が原点を通る場合，residual variance が §3 に於けると同様に，一定 σ^2 であるとき，回帰推定値 Y_0を求めよう。このときは[13]に於て $\alpha=0$ なる場合と考えられる。そして Markoffの定理に依って Σyに対する最良不偏推定値として Y_0 が求められるのであるが，後に必要があるのでもう少し一般的に residual variance が荷重を持つ場合について最良不偏推定値を導いてみよう。先づ定理を成立させるに必要な條件は

[條件] I $\quad y_i = \beta x_i + e_i \quad (i = 1, 2, ----, n)$

とすれば　$\mathcal{E}(y_i \mid x_i) = \beta x_i$

即ち §1 に於ける p, a としては

$$p_1 = \beta, \quad (a_{i\alpha}) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

となっている。

II.　$s = \mathrm{Rank}\,(a_{i\alpha}) = 1$

III, IV　§3 に於けると同様

V.　推定すべき母数は

$$\sum y = N\bar{y}_p = N\beta\bar{x}_p, \quad \text{即ち} \quad b_1 = N\bar{x}_p$$

必要な量を求めると

(a) $G_{11} = Swx^2 = G$

(b) $H_1 = Swxy$

(c) $H_0 = Swy^2$

以上の條件から Markoff の定理に依って次の結果を得る。

[A]　$y_1, y_2, \cdots, y_n$ に依る $\sum y$ に対する最良不偏推定値 Y_{w0} は次の通り。

$$Y_{w0} = -\frac{1}{Swx^2} \begin{vmatrix} 0 & Swxy \\ N\bar{x}_p & Swx^2 \end{vmatrix}$$

$$= N\bar{x}_p \frac{Swxy}{Swx^2} = \left(\sum x\right) \frac{Swxy}{Swx^2}$$

[B] $$\mathrm{V}(Y_{w0}) = \frac{-\sigma^2}{Swx^2}\begin{vmatrix} 0 & N\bar{x}_p \\ N\bar{x}_p & Swx^2 \end{vmatrix}$$

$$= N^2\sigma^2\bar{x}_p^{\,2}/(Swx^2) = (\Sigma x)^2\sigma^2/(Swx^2)$$

[D] σ^2 が，未知のときは $\mathrm{V}(Y_{w0})$ の不偏推定値として

$$v(Y_{w0}) = -\frac{1}{n-1}\frac{1}{(Swx^2)^2}\begin{vmatrix} Swy^2 & Swxy \\ Swxy & Swx^2 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} 0 & N\bar{x}_p \\ N\bar{x}_p & Swx^2 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{N^2}{n-1}\bar{x}_p^{\,2}\ Swy^2\left\{1-\frac{(Swxy)^2}{(Swx^2)(Swy^2)}\right\}$$

上の結果に於て $w_1 = w_2 = --- = w_n = 1$ とおけば，residual variance が一定 σ^2 の場合の Σy に対する線型最良不偏推定値として

$$Y_0 = (\Sigma x)\frac{Sxy}{Sx^2}. \qquad (4)$$

Y_0 の分散は [16] を使って

$$\mathrm{V}(Y_0) = \frac{(\Sigma x)^2\sigma_y^2(1-\rho^2)}{Sx^2} \qquad (5)$$

$\mathrm{V}(Y_0)$ に対する不偏推定値として

$$v(Y_0) = \frac{Sy^2}{n-1}\left\{1-\frac{(Sy)^2}{(Sx^2)(Sy^2)}\right\}(\Sigma x)^2 \qquad (5)'$$

次に，$x_1, x_2, ----, x_n$ が任意に抽出された場合の Y_0 の分散を求めよう。それには (5) の平均値を求めればよい。此処で変数は Sx^2 だけであるが，[20] に依って

$$Sx^2 = (n-1)k_2 + n(k_1 + \bar{x}_p)^2$$

であつて，k統計量については相当複雑な式となるので，この場合は直接に求めた方が簡単である。

今　$Sx^2 = s_2$ とおき，xの原点及母平均に関する積率を夫々 ν, μ に依つて表わせば

[33] $$\begin{cases} \mathcal{E}(s_2) = n\mathcal{E}(x^2) = n\nu_2 \\ \mathcal{E}(s_2^2) = n\nu_4 + n(n-1)\nu_2^2 \end{cases}$$

故に $$U = \frac{s_2 - \mathcal{E}(s_2)}{\mathcal{E}(s_2)} = \frac{1}{n}\frac{s_2}{\nu_2} - 1$$ とおけば

[34] $$\begin{cases} \mathcal{E}U = 0 \\ \sigma_U^2 = \mathcal{E}U^2 = \dfrac{\mathcal{E}(s_2^2)}{n^2 K_2^2} - 1 = \dfrac{1}{n}\left(\dfrac{\nu_4}{\nu_2^2} - 1\right) \end{cases}$$

故に n が十分大ならば $|U| < 1$ なることは略確実である。従つて

$$\frac{1}{Sx^2} = \frac{1}{\mathcal{E}(s_2)}(1+U)^{-1} = \frac{1}{n\nu_2}(1 - U + U^2 - \cdots)$$

[35] $$\mathcal{E}\left(\frac{1}{Sx^2}\right) = \frac{1}{n\nu_2}(1 + \mathcal{E}U^2 - \mathcal{E}U^3 + \cdots)$$

如で $$\begin{cases} \mathcal{E}U^3 = \dfrac{1}{n^3\nu_2^3}\mathcal{E}(s_2^3) - \dfrac{1}{n^2\nu_2^2}\mathcal{E}(s_2^2) + 2 \\ \mathcal{E}U^4 = \dfrac{1}{n^4\nu_2^4}\mathcal{E}(s_2^4) - \dfrac{4}{n^3\nu_2^3}\mathcal{E}(s_2^3) + \dfrac{6}{n^2\nu_2^2}\mathcal{E}(s_2^2) - 3 \end{cases}$$

[36] $$\mathcal{E}(s_2^3) = n\nu_6 + 3n(n-1)\nu_4\nu_2 + n(n-1)(n-2)\nu_2^3$$

$$\mathcal{E}(s_2^4) = n\nu_8 + n(n-1)(4\nu_6\nu_2 + 3\nu_4^2) + 6n(n-1)(n-2)\nu_4\nu_2^2 + n(n-1)(n-2)(n-3)\nu_2^4$$

[34]，[36] から

$$[37]\quad\begin{cases}\mathcal{E}U^3 = \dfrac{3}{n}\dfrac{\nu_4}{\nu_2^2}-\dfrac{3}{n}+1-\dfrac{3}{n}\dfrac{\nu_4}{\nu_2^2}-3\left(1-\dfrac{1}{n}\right)+2+o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)=o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)\\ \mathcal{E}U^4 = \dfrac{6}{n}\dfrac{\nu_4}{\nu_2^2}+\left(1-\dfrac{6}{n}\right)-\dfrac{12}{n}\dfrac{\nu_4}{\nu_2^2}-4\left(1-\dfrac{3}{n}\right)+\dfrac{6}{n}\dfrac{\nu_4}{\nu_2^2}+6\left(1-\dfrac{1}{n}\right)\\ \qquad\qquad -3+o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)=o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)\end{cases}$$

$|U|<1$ だから $|\mathcal{E}(U^h)| \leqq \mathcal{E}|U|^h \leqq \mathcal{E}U^4 = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ $(h \geqq 4)$

故に [37] と併せて

$$[38]\qquad \mathcal{E}U^h = o\left(\frac{1}{n^2}\right)\qquad (h \geqq 3)$$

[34], [38], を [35] に代入すれば, [35] の級数は絶対収斂だから

$$[39]\qquad \mathcal{E}\left(\frac{1}{Sx^2}\right) = \frac{1}{n\nu_2}\left\{1+\frac{1}{n}\left(\frac{\nu_4}{\nu_2^2}-1\right)+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right\}$$

処で

$$\nu_2 = \sigma_x^2 + \bar{x}_p^2 = \bar{x}_p^2(1+C_x)$$

$$\nu_4 = \mu_4 + 4\bar{x}_p\mu_3 + 4\bar{x}_p^2\sigma_x^2 - \sigma_x^4$$
$$= \bar{x}_p^4\left\{(\gamma_2-3)C_x^2 + 4\gamma_1 C_x^{\frac{3}{2}} + 2C_x(2+C_x)\right\}$$

$$\text{但し}\begin{cases} C_x = \sigma_x^2/\bar{x}_p^2, \\ \gamma_1 = \mu_3/\sigma_x^3 \\ \gamma_2 = \mu_4/\sigma_x^4\end{cases}$$

であるからこれを [39] に代入すれば

$$\mathcal{E}\left(\frac{1}{Sx^2}\right) = \frac{1}{n\bar{x}_p^2(1+C_x)}\left\{1+\frac{1}{n}\frac{2C_x(2+C_x)}{(1+C_x)^2}+\frac{1}{n}\frac{C_x^2(\gamma_2-3)+4\gamma_1 C_x^{\frac{3}{2}}}{(1+C_x)^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right\}$$

故に x の分布が正規型をそう隔たらなければ, $\gamma_2 \fallingdotseq 3$, $\gamma_1 \fallingdotseq 0$ と考えて, (5) から

$$\bar{V}(Y_c) = \frac{N^2\sigma_y^2(1-\rho^2)}{n(1+C_x)}\left\{1+\frac{2C_x(2+C_x)}{n(1+C_x)^2}\right\}\qquad (6)$$

こゝで通常の，標本平均 $\bar{y}_s$ から作られる $N\bar{y}_p=\sum y$ の推定値（Sample mean estimate）

$$Y_s = N\bar{y}_s = \frac{N}{n} S y$$

を取るとこの分散は

$$\overset{u}{V}(Y_s) = N^2 \frac{\sigma_y^2}{n} \qquad (6)'$$

である。（3），（6），（6）′に依って各推定値の抽出誤差を比較すると次のようになる。

$$\frac{\bar{V}(Y_e)}{\bar{V}(Y_s)} = 1-\rho^2\ ; \quad \frac{\bar{V}(Y_0)}{\bar{V}(Y_s)} = \frac{1-\rho^2}{1+C_x}\ ; \quad \frac{\bar{V}(Y_0)}{\bar{V}(Y_e)} = \frac{1}{1+C_x} \qquad (7)$$

此処では $\frac{1}{n}$，$\frac{1}{n^2}$ を含む因数は n が大きいものとして省略してある。故に一般に大標本の場合は二つの回帰推定値は夫々通例の標本平均に依る推定値より精度がよいことが示されたわけである。更に母集団回帰が線型で，回帰直線が原点を通る場合には Y_0 は Y_e よりよく，x の変異係数が大きいほど著しい。

しかしながら，この結果については課せられた條件についてよく吟味しなければならない。（7）に依れば大標本の場合には平均的に Y_e の精度は Y_s のそれ以下になることはないことを示しているが，これは母集団の回帰が線型であることを前提としているのである。しかし §5 で示される如く，この條件は本質的なものでなく，線型回帰でない場合にも，大体に於て同じ結果に到達するのである。一方 Y_0 については回帰直線が原点を通ると云う條件は本質的なものであり，この條件が成立たない時は Y_0 は偏倚を持ち，標本の大さ n を適当に大きくとれば，Y_s，Y_e 共に Y_0 以上の精度を持つように出来ることが示される。

今母回帰直線が（0，α）を通るものとする。即［13］が成立つ

とする。

$$y - \alpha = \eta$$

とおけば

$$\eta = \beta x + e$$

であつて η の x に対する回帰直線が原点を通ることになるから

$$\Sigma \eta = \Sigma y - \Sigma \alpha = N(\bar{y}_p - \alpha)$$

に対する線型最良不偏推定値は（4）に依つて

$$\eta_0 = N\bar{x}_p \frac{S(x\eta)}{Sx^2}$$

又，residual variance は y についても η についても全じであるから（5），（6）に依り

$$V(\eta_0) = N^2 \bar{x}_p^2 \sigma_y^2 (1-\rho^2) / Sx^2$$

[40] $$V(\eta_0) = \frac{N^2 \sigma_y^2 (1-\rho^2)}{n(1+C_x)}$$

処でこの場合（4）に代る Y_0 を推定値として用いたとすれば，$y = \alpha + \eta$ を用いて

[41] $$Y_0 = N\bar{x}_p \frac{S(xy)}{Sx^2} = \eta_0 + N\bar{x}_p \left(\frac{Sx}{Sx^2}\right)\alpha$$

で，且 $\mathcal{E}(\eta_0) = \Sigma \eta = N(\bar{y}_p - \alpha)$ だから

$$\mathcal{E}(Y_0 | x) = N(\bar{y}_p - \alpha) + N\bar{x}_p \alpha \frac{n\bar{x}_s}{Sx^2}$$

$$= \Sigma y + N\left\{\bar{x}_p \alpha \frac{n\bar{x}_s}{Sx^2} - \alpha\right\}$$

故に

[42] $$B = N\alpha \left\{\bar{x}_p \frac{n\bar{x}_s}{Sx^2} - 1\right\}$$

とおけば　$\mathcal{E}(Y_0) = \sum y + \mathcal{E}(B)$

であつて，$\mathcal{E}(B)$が Y_0 の偏倚である。此処で[35]を導いたのと同様な平均値の評価を

$$\frac{n\bar{x}_s}{Sx^2} = \frac{Sx}{Sx^2} = \frac{1}{nV_2}\left\{ s_1 - s_1\bar{U} + s_1\bar{U}^2 - \cdots\cdots \right\}$$

但し　$s_1 = Sx,\ \bar{U} = (s_2 - nV_2)/nV_2,$
$s_2 = Sx^2$

に対して行えば

$$\mathcal{E}\left(\frac{n\bar{x}_s}{Sx^2}\right) = \frac{1}{nV_2}\left\{ n\bar{x}_p + O(1) \right\}$$

$$= \frac{1}{\bar{x}_p(1+C_x)} + O\left(\frac{1}{n}\right)$$

を得る。従って大標本の場合は

[42]　$$\mathcal{E}(B) \doteq N\alpha\left\{\frac{1}{1+C_x} - 1\right\} = -\frac{N\alpha C_x}{1+C_x}$$

$$\therefore\ \mathcal{E}(Y_0) \doteq \sum y - \frac{N\alpha C_x}{1+C_x} \qquad (8)'$$

次に[41]から

$$M.S.E.\ Y_0 = \mathcal{E}(Y_0 - \sum y)^2$$

$$= \mathcal{E}\left\{(\eta_0 - \sum y + N\alpha) + N\alpha\left(\bar{x}_p\frac{Sx}{Sx^2} - 1\right)\right\}^2$$

$$= \bar{V}(\eta_0) + \mathcal{E}(B^2)$$

$$= \frac{N^2\sigma_y^2(1-\rho^2)}{n(1+C_x)} + \mathcal{E}(B^2) \qquad (\because [40])$$

此処で $\mathcal{E}(B^2)$ に対する大雑把な評価を行うと[42]のBの分布はnが十分大きくなるに従つてその平均値[43]のまわりに安定して来るから，nが大きければ

$$\mathcal{E}(B^2)=\sigma_B^2+\{\mathcal{E}(B)\}^2 \fallingdotseq \{\mathcal{E}(B)\}^2=\frac{N^2\alpha^2 C_x^2}{(1+C_x)^2}$$

と考えてよい。従って（6）の代りに

$$M.S.E.\ Y_0=\frac{N^2\alpha^2 C_x^2}{(1+C_x)^2}+\frac{N^2\sigma_y^2(1-\rho^2)}{n(1+C_x)} \tag{8}$$

上に得た結果（6）′からは，回帰直線が原点を通らないのにも拘らず採用した Y_0 は標本の大さに係らない偏倚を持つことが分る。又（8）の第一項は Y_0 の持つ偏倚に依って生ずるのであるこれが又 n を大きくしても減少しないから $\alpha \neq 0$ のときは（3）及（6′）の右辺は n が十分大となれば（8）の右辺以下となる。

即ち Y_0 の精度は Y_e, Y_d の精度以下となるのである。故に Y_0 は精度は Y_e, Y_d の精度以下となるのである。故に Y_0 は回帰直線が原点を通ることが確実に分っていない限り余り信頼出来ないと云える。

§5. 回帰が非線型の場合の推定値

多くの実際問題に於ては y と x との関係については部分的な知識しか持合せのないことが通例であるから，若し母集団の回帰が線型であると確認出来ない場合に，§3 で述べた線型回帰推定値が如何に影響を受けるかを吟味するのは必要なことであろう。

今 y と x との関係が次の様であるとする。

$$\left\{\begin{array}{l} y=\alpha+\beta x+\xi+e \\ \mathcal{E}(e\mid x)=0 \\ \mathcal{E}(e^2\mid x)=\sigma^2 \end{array}\right. \tag{9}$$

但し α, β, σ^2 は未知の常数とし，ξ は x の非線型の函数と

する。　一般に母回帰曲線の方程式が $y = f(x)$ であれば，この曲線にあてはめられた最小自乗法的直線を $y=\alpha+\beta x$ とすれば，α, β は，$S = \mathcal{E}\left\{f(x)-\alpha-\beta x\right\}^2$ を最小にする様に定められるのであるから

$$\begin{cases} -\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial S}{\partial \alpha} = \mathcal{E}\left\{f(x)-\alpha-\beta x\right\} = \mathcal{E} f(x)-\alpha-\beta \bar{x}_p = 0 \\ -\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial S}{\partial \beta} = \mathcal{E}\left[x\left\{f(x)-\alpha-\beta x\right\}\right] = \mathcal{E} x f(x)-\alpha\bar{x}_p-\beta(\mathcal{E}x^2) = 0 \end{cases}$$

を満足する。そこで $\xi = f(x)-\alpha-\beta x$ とおけば

$$\mathcal{E}(\xi) = \mathcal{E} f(x)-\alpha-\beta\bar{x}_p = 0$$

$$\mathcal{E}\left\{(x-\bar{x}_p)(\xi-\mathcal{E}\xi)\right\} = \mathcal{E} x f(x)-\alpha\bar{x}_p-\beta\cdot(\mathcal{E}x^2) = 0$$

故に回帰曲線の方程式は

$$y = \alpha+\beta x+\xi$$

但し ξ は x の非線型の函数で，$\mathcal{E}(\xi)=0$, $\rho_{\xi x}=0$

の形にかきかえることが出来る。故に (9) に於る ξ については

$$\begin{cases} \bar{\xi}_p = \mathcal{E}(\xi) = 0 \\ \rho_{\xi x} = 0 \end{cases} \tag{9}$$

と仮定して一般性を失わない。

(9) は y は x の linear function $\alpha+\beta x$ と，non-linear な function ξ と，確率変数 e との三つの部分から成ることを示す。此処で又 residual variance σ^2 は，最小自乗法的回帰直線に関する residual variance $\sigma_y^2(1-\rho^2)$ と次の関係にあることが分る。

$$[44] \qquad \sigma^2 = \sigma_y^2(1-\rho^2)-\sigma_\xi^2$$

$$\text{但し} \quad \sigma_\xi^2 = \mathcal{E}(\xi-\bar{\xi}_p)^2 = \mathcal{E}\xi^2$$

何故ならば (9)(9')から　$\bar{y}_p = \alpha + \beta \bar{x}_p$

従って母回帰函数は

$$y - \bar{y}_p = \beta(x - \bar{x}_p) + \xi \qquad \text{となる。故に}$$

$$\therefore \ \sigma^2 = \mathcal{E}\{y - \bar{y}_p - \beta(x - \bar{x}_p) - \xi\}^2$$

$$= \mathcal{E}\{y - \bar{y}_p - \beta(x - \bar{x}_p)\}^2 - 2\mathcal{E}\xi\{(y - \bar{y}_p) - \beta(x - \bar{x}_p)\} + \mathcal{E}\xi$$

$$= \sigma_y^2(1 - \rho^2) - 2\mathcal{E}\xi\{\xi + e\} + \mathcal{E}\xi^2$$

$$= \sigma_y^2(1 - \rho^2) - \sigma_\xi^2 \qquad (\because \ \mathcal{E}(e\xi) = 0)$$

扨て(9)が成り立つとき

$$y_i - \alpha - \beta x_i - \xi_i = e_i$$

とおけば　$\bar{y}_s = \alpha + \beta \bar{x}_s + \bar{\xi}_s + \bar{e}_s$

$$\therefore \ y_i - \bar{y}_s = \beta(x_i - \bar{x}_s) + (\xi_i - \bar{\xi}_s) + (e_i - \bar{e}_s)$$

これから

$$[44]' \qquad b = \frac{S(x - \bar{x}_s)(y - \bar{y}_s)}{S(x - \bar{x}_s)} = \beta + \frac{S(x - \bar{x}_s)(\xi - \bar{\xi}_s)}{S(x - \bar{x}_s)} + \frac{S(x - \bar{x}_s)(e - \bar{e}_s)}{S(x - \bar{x}_s)}$$

であるから(1)に依つて興えられる Y_e は，

$$\bar{y}_s - \bar{y}_p = \beta(\bar{x}_s - \bar{x}_p) + \bar{\xi}_s + \bar{e}_s$$

であることを使えば

$$Y_e - \Sigma y = N\{(\bar{y}_s - \bar{y}_p) - b(\bar{x}_s - \bar{x}_p)\}$$

$$= N\left\{(\bar{\xi}_s + \bar{e}_s) + (\bar{x}_p - \bar{x}_s)\frac{S\xi(x - \bar{x}_s)}{S(x - \bar{x}_s)} + (\bar{x}_p - \bar{x}_s)\frac{Se(x - \bar{x}_s)}{S(x - \bar{x}_s)^2}\right\} \quad (10)$$

を満足することが分る。従つて，$\mathcal{E}(e \mid x) = 0$，$\mathcal{E}(\xi) = \bar{\xi}_p = 0$

なることから

$$\mathcal{E}(Y_e-\Sigma y\mid x)=N\left\{\bar{\xi}_s+(\bar{x}_p-\bar{x}_s)\frac{S\xi(x-\bar{x}_s)}{S(x-\bar{x}_s)}\right\}$$

$$\mathcal{E}(Y_e-\Sigma y)=-N\mathcal{E}\left\{(\bar{x}_s-\bar{x}_p)\frac{S\xi(x-\bar{x}_s)}{S(x-\bar{x}_s)^2}\right\} \qquad (10)'$$

となる。一般に ξ が x の非線型の函数であるから $\rho_{\xi x}=0$ ではあるが (10)′は，0 とはならないのである。換言すれば Y_e は Σy の推定値として偏倚を持つのである。この偏倚の大さは $O\left(\frac{1}{n^3}\right)$ を消略すれば

$$\mathcal{E}(Y_e-\Sigma y)=\frac{N}{n}\left\{-\frac{K_{12}}{\sigma_x^2}+\frac{1}{n}\frac{K_{14}}{\sigma_x^4}\right\} \qquad (11)$$

但し，K_{ij} は (ξ,x) の同時分布に於る K-moment である。であつて，K_{12} は本質的には ξ と x^2 との相関係数に依存する。しかしながら §4 に於て触れたように large sample の場合にはこの偏倚は無視出来る量となり得ることが (11) から分る。

［(11) 式の証明］　$x-\bar{x}_p=X$，$s_{ij}=S\xi^iX^j$ とおけば [4][9] から

$$\begin{cases}\bar{x}_s-\bar{x}_p=k_{01}\\ S(x-x_s)^2=(n-1)k_{02}\\ S\xi(x-\bar{x}_s)=(n-1)k_{11}\end{cases}$$

[45] $\quad\therefore\quad (\bar{x}_s-\bar{x}_p)\dfrac{S\xi(x-\bar{x}_s)}{S(x-\bar{x}_s)^2}=\dfrac{k_{01}k_{11}}{k_{02}}$

此処で $\mathcal{E}(k_{02})=K_{02}$ であるから $V=\dfrac{k_{02}-K_{02}}{K_{02}}$ とおけば [23] に依り $|V|<1$ としてよいから

$$\therefore\ \frac{k_{01}k_{11}}{k_{02}} = \frac{k_{01}k_{11}}{K_{02}}\left(1-V+V^2-V^3+\cdots\cdots\right)$$

[46] $$\therefore\ \mathcal{E}\left(\frac{k_{01}k_{11}}{k_{02}}\right) = \frac{1}{K_{02}}\left\{\mathcal{E}k_{01}k_{11} - \mathcal{E}k_{01}k_{11}V + \mathcal{E}k_{01}k_{11}V^2 - \cdots\right\}$$

此処で $\mathcal{E}(k_{01}) = K_1(k_{01}) = 0$

$\mathcal{E}(V) = K_1(V) = 0$

であることに注意し，(k_{01}, k_{11}, k_{02}) の仝時的分布に於る K-moment K_{ijk} を $K\begin{pmatrix}0^i & 1^j & 0^k\\ 1 & 1 & 2\end{pmatrix}$ と表わすことにすれば

[47] $$\mathcal{E}k_{01}k_{11} = \mu_{11}(k_{01}, k_{11})$$
$$= K_{11}(k_{01}, k_{11}) = K\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix} = \frac{1}{n}K_{12} \quad (\because O_3)$$

[48] $$\mathcal{E}k_{01}k_{11}V = \mu_{111}(k_{01}, k_{11}, V)$$
$$= K_{111}(k_{01}, k_{11}, V) \qquad (\because [1])$$
$$= \frac{1}{K_{02}}K\begin{pmatrix}0 & 1 & 2\\ 1 & 1 & 2\end{pmatrix} \qquad (\because [12]')$$

$K\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 2\end{pmatrix}$ を求めるには $K\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 2\end{pmatrix}$ を求めて，O_3 に依ればよい。処で [4] 及 [9] から

(i) $k_{11}k_{02} = (n-1)^{-2}(s_{11}s_{02} - n^{-1}s_{02}s_{10}s_{01} - n^{-1}s_{11}s_{01}^2 + n^{-2}s_{10}s_{01}^3)$

(ii) 次に $\mathcal{E}(k_{11}k_{02})$ を求める。そのために $s_{02}s_{10}s_{01}$ の如き積の平均値を求めるのであるが，このためには $\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 2 & 0 & 1\end{pmatrix}$ の $\binom{0}{1}$ 又は $\binom{1}{0}$ 以外の部分への分割，例えば $\binom{0}{2}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ に対して，各々の部分から出る横方向の数字の和 $\binom{0}{2}, \binom{1}{1}$ に対応して，$\mathcal{E}(s_{02}s_{10}s_{01})$ の展開式中に $n(n-1)\mu_{02}\mu_{11}$ なる

項が入ることが分る。ここで $\mu_{02}\mu_{11}$ の係数は，h 個の部分えの分割ならば $n(n-1)\cdots\cdots(n-h+1)$ を，更にその型への分割の方法が k 個あれば $kn(n-1)\cdots(n-h+1)$ を取ることになる。

例えば $\varepsilon(s_{10}s_{01}^3)$ に於て $\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&1&1\end{pmatrix}$ からの $\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix}$ に対応する $\mu_{11}\mu_{02}$ の係数は $3n(n-1)$ である。以上のことから次の表を得る。

	$n\mu_{13}$	$n(n-1)\mu_{11}\mu_{02}$	(i) に於る係数
$s_{11}s_{02}$	1	1	
$s_{02}s_{10}s_{01}$	1	1	$-n^{-1}$
$s_{11}s_{01}^2$	1	1	$-n^{-1}$
$s_{10}s_{01}^3$	1	3	n^{-2}

故に [48] から

$$\varepsilon(k_{11},k_{02})=(n-1)^{-2}\left\{n(1-n^{-1})^2\mu_{13}+n(n-1)(1-2n^{-1}+3n^{-2})\mu_{11}\mu_{02}\right\}$$

[49] $$=\frac{1}{n}\mu_{13}+\frac{n^2-2n+3}{n(n-1)}\mu_{11}\mu_{02}$$

(iii) 一方 $K_{10}=K_{01}=0$ だから [8] に依り

$$\begin{cases}\mu_{13}=K_{13}+3K_{11}K_{02}\\ \mu_{11}=K_{11}\\ \mu_{02}=K_{02}\end{cases}$$

これを [49] に代入すれば

[50] $$\varepsilon(k_{11},k_{02})=\frac{1}{n}K_{13}+\frac{n+2}{n-1}K_{11}K_{02}$$

(iv) 又，一般に

$\mu_{11} = K_{11} + K_{10}K_{01}$ だから，(k_{11}, k_{02})の同時分布に対して

$$\mu_{11}(k_{11}, k_{02}) = \mathcal{E}(k_{11}, k_{02})$$

$$= K_{11}(k_{11}, k_{02}) + K_{10}(k_{11}, k_{02})K_{01}(k_{11}, k_{02})$$

$$= K\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + K\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} K\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

[51] $$= K\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + K_{11}K_{02}$$

(v) [50], [51] の右辺と比較して，$K\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$について解けば

[52] $$K\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{n}K_{13} + \frac{2}{n-1}K_{11}K_{02}$$

故に §2., O_3 を用いて

$$K\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{n^2}K_{14} + \frac{2}{n-1}K_{12}K_{02} + \frac{2}{n-1}K_{11}K_{03}$$

従って [48] から

[53] $$\mathcal{E}k_0 k_{11} V = \frac{1}{n^2}\frac{K_{14}}{K_{02}} + \frac{2}{n(n-1)}K_{12} + \frac{1}{n(n-1)}\frac{K_{11}K_{03}}{K_{02}}$$

今の場合 $\mathcal{E}\xi(x-\bar{x}_p) = 0$ だから $\mu_{11} = K_{11} = 0$, 従って最后の項は要らないのであるが，O_3を適用するために $K_{11} = 0$と云うことを使わずに導いたのである。

§2. に於て述べられた[10]の如き，k－統計量の K－moment を與える公式は，上述の (i)～(v) の手順に依って求められたものなのである。

次に一般に $K_{100} = K_{001} = K_{010} = 0$ のときは[6] から

$$\mu_{112} = K_{112} + K_{110}K_{002} + 2K_{101}K_{011}$$

だから

$$\mathcal{E}k_{01}k_{11}V^2 = \mu_{112}(k_{01}, k_{11}, V^2)$$

$$= K_{112}(k_{01}, k_{11}, V^2) + K_{11}(k_{01}, k_{11})k_2(V)$$

$$+ 2K_{11}(k_{01}, V)K_{11}(k_{11}, V)$$

$$= \frac{1}{K_{02}^2}K\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0^2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} + \frac{1}{K_{02}^2}K\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}K\begin{pmatrix} 0^2 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{2}{K_{02}^2}K\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}K\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

此処で §2 [10], O_3 及 [52] から

$$K\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{n}K_{12}, \qquad K\begin{pmatrix} 0^2 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{n}K_{04} + \frac{2}{n-1}K_{02}^2$$

$$K\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{n}K_{13}, \qquad K\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{n}K_{03}$$

一方 [10] から $K\begin{pmatrix} 0^3 \\ 2 \end{pmatrix} = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ だから，当然 $K\begin{pmatrix} 1 & 0^2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ *)

であるべきで，従って O_3 から $K\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0^2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = O\left(\frac{1}{n^3}\right)$ であることは容易に分る。故に

$$[54] \quad \mathcal{E}k_{01}k_{11}V^2 = \frac{1}{n^2}\frac{K_{12}K_{04}}{K_{02}^2} + \frac{2}{n(n-1)}K_{12} + \frac{2}{n^2}\frac{K_{13}K_{03}}{K_{02}^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

---

*) [52] と全様にして求めた結果は

$$K\begin{pmatrix} 1 & 0^2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{n^2}K_{15} + \frac{8}{n(n-1)}K_{13}K_{02} + \frac{4}{n(n-1)}K_{11}K_{04} + \frac{4(n-2)}{n(n-1)^2}K_{12}K_{03} + \frac{8}{(n-1)^2}K_{11}K_{02}^2$$

此処で moment の性質から K_{ij} の第一の添字 i を第二のそれに j を加えたものを改めて K_{ij} とすれば [10] の $K(2^3)$ を得る。

$\mathcal{E} k_{01} k_{11} V^3$，$\mathcal{E} k_{01} k_{11} V^4$ に対しても全様の評価を行えば容易に

$$\mathcal{E} k_{01} k_{11} V^3 = O\left(\frac{1}{n^3}\right), \quad \mathcal{E} k_{01} k_{11} V^4 = O\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

であることが示される。従つて $|V| < 1$ であることから

[55] $\mathcal{E}(k_{01} k_{11} V^h) = O\left(\frac{1}{n^3}\right) \qquad (h \geq 3)$

故に[47],[53],[54],[55] を[46]に代入した結果から[45],(10)' を参照して

$$\mathcal{E}(Y_e - \Sigma y) = -\frac{N}{n}\left\{\frac{K_{12}}{K_{02}} - \frac{1}{n}\frac{K_{14}}{K_{02}^2} + \frac{1}{n}\frac{K_{12}K_{04}}{K_{02}^3} + \frac{2}{n}\frac{K_{13}K_{03}}{K_{02}^3} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right\}$$

x の分布が normal に近く，$K_{03} = K_{04} = 0$ と考えれば

$$\mathcal{E}(Y_e - \Sigma y) = \frac{N}{n}\left\{-\frac{K_{12}}{\sigma_x^2} + \frac{1}{n}\frac{K_{14}}{\sigma_x^4}\right\}$$

次に Y_e の Σy に対する平均自乗誤差を求めるために(10)を書き換えると

$$Y_e - \Sigma y = N\left\{\bar{e}_s - \frac{S e(x-\bar{x}_s)}{S(x-\bar{x}_s)^2}(\bar{x}_s - \bar{x}_p) + \bar{\xi}_s - \frac{S\xi(x-\bar{x}_s)}{S(x-\bar{x}_s)^2}(\bar{x}_s - \bar{x}_p)\right\} \qquad (10)'$$

ここで

$$A = N\left\{\bar{e}_s - \frac{S e(x-\bar{x}_s)}{S(x-\bar{x}_s)^2}(\bar{x}_s - \bar{x}_p)\right\}$$

$$B = N\left\{\bar{\xi}_s - \frac{S\xi(x-\bar{x}_s)}{S(x-\bar{x}_s)^2}(\bar{x}_s - \bar{x}_p)\right\}$$

とおく。此処で A の分布は x と e のみの分布に依つて定まるものであつて §3,[17] の右辺と同じものであるから，(2),(3) に依つて

[56] $\mathcal{E}(A^2) = \frac{N\sigma^2}{n}\left\{1+\frac{1}{n}+\frac{3+2\gamma_1^2}{n^2}\right\}$

又 $\mathcal{E}(e|x) = 0$ だから

[57] $\mathcal{E}(AB) = 0$

次に $\mathcal{E}(B^2)$ を今迄と同様な計算に依って $O(\frac{1}{n^2})$ 迄求めれば

[58] $\mathcal{E}(B^2) = \frac{N^2}{n}\sigma_\xi^2\left\{1+\frac{1}{n}\frac{2K_{21}K_{03}+K_{22}K_{02}+4K_{12}^2}{\sigma_x^4\sigma_\xi^2}\right\}$

この計算は相当煩雑であるので省略する。

[56], [57], [58] 及 (10)'' から

$$M.S.E.\ Ye = \mathcal{E}(Ye - \Sigma y)^2$$

$$= \frac{N}{n}(\sigma^2+\sigma_\xi^2)\left\{1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right\}$$

[44] を使えば

$$M.S.E.\ Ye = \frac{N}{n}(\sigma^2+\sigma_\xi^2)\left\{1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right\} \qquad (11)'$$

$$= \frac{N}{n}\sigma_y^2(1-\rho^2)\left\{1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right\}$$

故に大標本の場合について云うならば，母集団の回帰が線型でない時にも，理論上

$$\frac{M.S.E.\ Ye}{Y_s} = (1-\rho^2) \leq 1$$

である。しかしこのことは直に Ye が有効な推定値であることを意味するものではない。回帰曲線が直線に近いほど σ_ξ^2 は小さいわけで，従って Y_s に比較してそれだけ Ye の精度は上る。即ち抽出誤差は $N(\sigma^2+\sigma_\xi^2)/n$ から最小 $N\sigma^2/n$

まで減少し得る。換言すれば非線型成分 ξ の分散 σ_ξ^2 の大小に依つて Ye の精度の損失の大小が決るわけである。

回帰が線型でないために起る Ye の損失のうちの幾分かは，計算を忌わなければ回帰方程式[14]に x^2, x^3 等の項をつけ加えることに依って防ぐことが出来る。しかしこの場合には x の分布について $\overline{x}_p$ の他に他の知識が必要となる。例えば方程式を

$$y=\alpha+\beta x+\gamma x^2$$

とすれば，回帰推定値を構成するためには，$\overline{x}_p$ の他に次の量

$$\mathcal{E}(x^2)=\mathcal{E}(x-\overline{x}_p)^2+\overline{x}_p^2=\sigma_x^2+\overline{x}_p^2$$

従って σ_x^2 が既知としなければならない。これは実際問題に於て x の分布について略完全な知識が具わっている特殊な場合に限られ，しかもそのような場合には，上述のものに代る他の方法を考えた方がよいのである。（§8参照）

次に(2)′に示された Ye の分散の不偏推定値が如何なる影響を受けるかについて検討する必要がある。母集団の回帰が線型でない時には $S_d^2/(n-2)$ は $\alpha+\beta x$ に対する *residual variance* $\sigma_y^2(1-\rho^2)$ の不偏推定値ではなくなるのであるが，その偏倚は次に示される様に $\frac{1}{n}$ に比例するから，大標本の場合には(3)′を以て Ye の分散（平均自乗誤差）の不偏推定値と考えて差支ないのである。

［非線型回帰の場合の $\mathcal{E}(S_d^2)$］

$$S_d^2=S\left\{(y-\overline{y}_s)-b(x-\overline{x}_s)\right\}^2$$

に[44]′を代入して書きかえれば

$$S_d^2=S\Big[\Big\{(\xi-\overline{\xi}_s)-\frac{S(x-\overline{x}_s)(\xi-\overline{\xi}_s)}{S(x-\overline{x}_s)^2}(x-\overline{x}_s)\Big\}$$
$$+\Big\{(e-\overline{e}_s)-\frac{S(x-\overline{x}_s)(e-\overline{e}_s)}{S(x-\overline{x}_s)}(x-\overline{x}_s)\Big\}\Big]^2$$

これから

$$\mathcal{E}(S_d^2 \mid x) = (n-2)\sigma^2 + S\left\{(\xi-\bar{\xi}_s)-(x-\bar{x}_s)\frac{S(x-\bar{x}_s)(\xi-\bar{\xi}_s)}{S(x-\bar{x}_s)^2}\right\}^2$$

$$= (n-2)\sigma^2 + \left\{S(\xi-\bar{\xi}_s)^2 - \frac{\{S(x-\bar{x}_s)(\xi-\bar{\xi}_s)\}^2}{S(x-\bar{x}_s)^2}\right\}$$

[4], [9] に依れば

$$\begin{cases} S(\xi-\bar{\xi}_s)^2 = (n-1)k_{20} \\ S(x-\bar{x}_s)(\xi-\bar{\xi}_s) = (n-1)k_{11} \\ S(x-\bar{x}_s)^2 = (n-1)k_{02} \end{cases}$$

従って

$$\mathcal{E}(S_d^2 \mid x) = (n-2)\sigma^2 + (n-1)\left(k_{20} - \frac{k_{11}^2}{k_{02}}\right)$$

$$\therefore\ \mathcal{E}(S_d^2) = (n-2)\sigma^2 + (n-1)\left\{K_{20} - \mathcal{E}\left(\frac{k_{11}^2}{k_{02}}\right)\right\}$$

此処で $\mathcal{E}\left(\frac{k_{11}^2}{k_{02}}\right)$ は今迄と同様に求められるが *large sample* の場合には近似的に

$$\mathcal{E}\left(\frac{k_{11}^2}{k_{02}}\right) \doteqdot \frac{\mathcal{E}(k_{11}^2)}{\mathcal{E}(k_{02})}$$

であると考えてよい。処で $\mathcal{E}(k_{02}) = K_{02}$，又[10] を参照して

$$\mathcal{E}(k_{11}^2) = \frac{1}{n}K_{22} + \frac{2}{n-1}K_{11}^2 = \frac{1}{n}K_{22} \qquad (\because K_{11}=0)$$

であるから，結局大標の場合は

$$\mathcal{E}(S_d^2) = (n-2)\sigma^2 + (n-1)\left(\sigma_\xi^2 - \frac{1}{n}\frac{K_{22}}{\sigma_x^2}\right)$$

此処で [44]を使い，且つ $O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ を省略すれば

$$\mathcal{E}\left(\frac{S_d^2}{n-2}\right) = \sigma_y^2(1-\rho^2) + \frac{1}{n}\left(\sigma_\xi^2 - \frac{K_{22}}{\sigma_x^2}\right) \qquad //$$

上述のことから大標本の場合には，母集団の回帰が線型でなくとも、線型回帰推定値（1）は不偏であり，その分散の推定値(2)′

も亦た不偏であると云える。

小標本の場合に対しては上の議論に依つては明かにされていない点が多いのであるが Ye 及 Ye の平均自乗誤差に対する推定値は，共に偏倚があるものと思われる。

§6 荷重回帰の場合の推定値

今迄は x の変化につれて y の平均値のみが変化する場合について考えて来た。しかし実際問題に於て特に x の変動が相当大きい場合には，y の分散も亦た変化することを考慮に入れなければならない。一方実際問題に於て x と y の分散との関係が数学的に規定されていることは殆んどないと云えるのであるが，仮りに次の様に公式化されているとすれば，今迄の回帰理論を拡張することが出来る。即ち

$$[59]\quad \left\{\begin{array}{l} y_1 = \alpha + \beta x_1 + e \\ \mathcal{E}(y\,|\,x) = \alpha + \beta x \quad or \quad \mathcal{E}(e\,|\,x) = 0 \\ y_i - \alpha - \beta x_i = e_i \text{ に対して} \\ \mathcal{E}(e_i^2\,|\,x_i) = \sigma_i^2 = \dfrac{1}{w_i} = \dfrac{\lambda}{w_i'} \qquad (i = 1, 2, \cdots, n) \\ \qquad \text{但し } \lambda > 0 \text{ は未知，} w_i' \text{ は既知の常数} \end{array}\right.$$

の場合には $\Sigma y = N\bar{y}_p$ に対する，線型最良不偏推定値 Y_{we} は

$$Y_{we} = N\left\{\bar{y}_w - b_w(\bar{x}_w - \bar{x}_p)\right\} \tag{12}$$

$$\text{但し}\left\{\begin{array}{l} \bar{y}_w = \dfrac{S_{wy}}{S_w}\ ,\quad \bar{x}_w = \dfrac{S_{wx}}{S_w} \ (\text{荷重標本平均}) \\ b_w = \dfrac{S(x-\bar{x}_w)(y-\bar{y}_w)}{S(x-\bar{x}_w)^2} \end{array}\right.$$

で與えられ，x の標本値 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ を固定した場合の Y_{we}

の條件附分散は

$$V(Y_{wl}) = \lambda N^2 \left\{ \frac{1}{Sw} + \frac{(\bar{x}_w - x_p)^2}{Sw(x-\bar{x}_w)^2} \right\} \qquad (13)'$$

で與えられる。此処で若し residual variance σ_i^2 が完全に分っておれば $\lambda = 1$ とすることが出來るから

$$V(Y_{wl}) = N^2 \left\{ \frac{1}{Sw} + \frac{(\bar{x}_w - \bar{x}_p)^2}{Sw(x-\bar{x}_w)^2} \right\} \qquad (13)$$

此処で (12) に対しては荷重 w に比例する量 w_i' が既知であればよいわけであるが，(13) に対してはそうは行かない。このときには $V(Y_{wl})$ に対する不偏推定値 $S^2(Y_{we})$ は w_i' が分っているから

$$S^2(Y_{we}) = N^2 \frac{Sw'(y-Y)^2}{n-2} \left\{ \frac{1}{Sw'} + \frac{(\bar{x}_w - \bar{x}_p)^2}{Sw'(x-\bar{x}_w)^2} \right\} \qquad (14)$$

但し $Sw'(y-Y)^2$ は w' を荷重とした時の標本残差平方和

を取ればよい。

(12), (13), (14) を導くには §3 に於る[証明] 中の條件 III に於て $\sigma^2 = \lambda$ とおけば [A], [B], [C], より順次に (12), (13)' 及

$$S^2(Y_{we}) = N^2 \frac{Sd_w^2}{n-2} \left\{ \frac{1}{Sw} + \frac{(\bar{x}_w - \bar{x}_p)^2}{Sw(x-\bar{x}_w)^2} \right\} \qquad (14)'$$

但し $Sd_w^2 = Sw(y-Y)^2$, $Y = \bar{y}_w + b_w(x-\bar{x}_w)$

を得る。(14)' は w について 0 次の同次式であるから (14)' の $S^2(Y_{we})$ に於る w を w' でおきかえれば (14) を得る。

実際問題に於て上述の式を使うためには，先づ residual variance σ_i^2，従って weight w_i の推定値が必要である。このためには抽出された標本値，若くは利用出來る資料に依つて求めなければならないのであるが，Baker*) は最近 (1941)

*) ハ次頁

xが離散的変数の場合にこの問題について論じた。もっと一般的にはxは連続的変数とすべきであろう。しかしこの場合についてweightの推定という問題について詳細に論ずることは省略する。しかし荷重がxの変化と共に連続的に変化する場合にはその推定の第一段階としては，xの変域をいくつかの区間に分けることであろう。そして各々の区間に於る標本点にあてはめられたyのxに対する最小自乗法的回帰直線に依って推定出来る。この結果からxとそれに対するyのresidual varianceの関係が略々明かとなり，residual varianceをxの函数として與える近似的な連続曲線を得る。

分割された区間の数が多ければ多いほど上の函数を決定するために利用出来る点が多くなり，且つ一般に区間の巾が小さくなるから，一つの区間に於るxとyとの相関係数がnegligibleとなり，従ってyのresidual varianceは略々その区間内のyの級内分散に等しく，従って各区間毎に回帰直線をあてはめる手数が省けることになる。しかし一方では区間の数が増せば，一つ当りの区間内の標本点の数は減少するから，これから得るyの分散の推定値の精度は落ちるわけである。最も適当とされる区間の数を決めるには，更に研究を要するが，常識的に推せば，各区間毎に少く共20個の標本値が必要であろうと思はれるから，従って区間の数もこの考慮のもとに決められるべきであろう。

推定された荷重はもとより抽出誤差を伴うのであるが，これらの誤差は二つの結果を惹き起す。その一つはY_{we}には偏倚を生ずることはないが，正確な荷重が知られている場合ほど精度がよくないことである。精度の上のこの損失は(12)が線型最良

*) Journal of the Iowa Agricultural Experiment Station, Vol. 36, No. 500, 1941（筆者未見）

の推定値であることから理論上さけ得られぬわけであるが，上述の荷重に関する推定法はこの損失を出来るだけ少なくするためになされるものである。その第二のものは，稍々重大な結果であるが，(13)(14)は共に，$Y_w e$ に於て荷重として w の代りに w' を使った推定値 $Y_{w'}e$ の分散の推定値として不偏でなくなることである。しかもその偏倚は大標本の場合にも除かれないのである。今

$$Y_{w'}e = N\left\{\bar{y}_{w'} - b_{w'}(\bar{x}_{w'} - \bar{x}_p)\right\} \qquad (12)'$$

$$\text{但し}\left\{\begin{aligned} &\bar{y}_{w'} = \frac{Sw'y}{Sw'}, \quad \bar{x}_{w'} = \frac{Sw'x}{Sw'} \\ &b_{w'} = \frac{Sw'(x-\bar{x}_{w'})(y-\bar{y}_{w'})}{Sw'(x-\bar{x}_{w'})^2} \end{aligned}\right.$$

から §3 で [17] を導いたのと同様にして

$$[60] \qquad Y_{w'}e - N\bar{y}_p = N\left\{\bar{e}_{w'} - \frac{Sw'e(x-\bar{x}_{w'})}{Sw'(x-\bar{x}_{w'})^2}(\bar{x}_{w'} - \bar{x}_p)\right\}$$

此処で $\mathcal{E}(e_i \mid x_i) = 0$, $\mathcal{E}(e_i e_j \mid x_i, x_j) = \begin{cases} 0 & (i \neq j) \\ 1/w_i & (i = j) \end{cases}$

であることを使えば

$$\mathcal{E}\{Y_{w'}e - N\bar{y}_p \mid x\} = 0$$

従って $Y_{w'}e$ は不偏であることが分る。又

$$\mathcal{E}\{(Y_{w'}e - N\bar{y}_p)^2 \mid x\} = N\left\{S\left(\frac{w'^2}{w}\right)\Big/(Sw')^2 - 2\,\frac{S\frac{w'^2}{w}(x-\bar{x}_{w'})}{Sw'}\,\frac{(\bar{x}_{w'}-\bar{x}_p)}{Sw'(x-\bar{x}_{w'})^2} + \frac{S\frac{w'^2}{w}(x-\bar{x}_{w'})^2\cdot(\bar{x}_{w'}-\bar{x}_p)^2}{[Sw'(x-\bar{x}_{w'})^2]^2}\right\}$$

処で第二項，第三項は n が十分大きければ夫々 $1/n$, $1/n^2$ の order のと考えられるから，大標本の場合，$Y_{w'}e$ の分散は大凡

$$V(Y_{w'}e) = N^2 S\left(\frac{w'^2}{w}\right)\Big/(Sw')^2 \qquad (1$$

であると思われる。一方(13)に於て w を w' でおきかえれば

$$V'(Y_{w'e}) = N^2 \frac{1}{Sw'} \qquad (16)$$

又(14)からの推定値は $\mathcal{E}\left\{(y_i-Y_i)^2 \middle| x_i\right\}=\sigma_i^2=\frac{1}{w_i}$ であるから，平均的に

$$S^2(Y_{w'e}) = N^2 \frac{S(\frac{w'}{w})}{nSw'} \qquad (17)$$

この三つの式の値は $w_i'=w_i$ $(i=1,2,\cdots,n)$ のときには一致するが，(16)が(15)に一致するのは偶然に依る場合を除いては，一般にこの場合に限る。しかし(17)は $w_i'=\lambda w_i$ $(i=1,2,\cdots,n)$ の場合にも，常数 λ の任意の値に対して(15)と一致する。故に(16)に比べて(17)は過誤が少いと云える。故に又上に概説した weight の推定法が，単に相対的荷重の推定を目標としているやうな場合には，$Y_{w'e}$ の分散の推定値としては，(14)を使うべきである。更に推定された荷重の誤差の分布について必要な知識があれば，$Y_{w'e}$ の分散の推定値として(17)の持つ偏倚の大小について判断を下すことが出来よう。

(15)と(17)とは又，真の荷重がどうあろうと，$w_i'=\lambda$ $(i=1,2,\cdots,n)$，即ちどの w_i' もすべて等しく取れば一致する。しかもこの場合 $Y_{w'e}=Y_e$ であるから(17)に於て $w_i'=\lambda$ とおいて得る

$$S^2(Y_e)=N^2S\left(\frac{1}{w}\right)/n^2 \qquad (17)'$$

は(1)で与えられる回帰推定値 Y_e を用いた時のその分散の不偏推定値となっているのである。一方(14)は $w_i'=\lambda$ とおけば(2)'と一致する。処で(17)は(14)に，従って(17)'は(2)'に平均的に一致するのであるから，結局，非常によく使われる Y_e に対して，その分散に対する推定値を与える(2)'は，大標本の場合には，母集団の回帰が線型でない場合にも，又荷重を伴

っている場合にも，やはり不偏であることが確められたわけである．

荷重を推定して，それから荷重回帰推定値を構成するためには，相当の手間を要するので，果して荷重回帰推定値を用いることによって得る利益が，そのために要する手間を補うに十分のものであるかどうかは屢々問題となる処であろう。殊に荷重がそう違わないと考えられるときには，一尸予めかゝる検討をしておくことが必要であろう。先づ荷重を考えない Y_l を使った時の分散は (17)′ で与えられ，又 (13) から Y_{wl} の誤差の最小限として

$$V(Y_{wl}) = N^2/(Sw)$$

故に Y_{wl} の精度の Y_l の精度に対する比は

$$\frac{V(Y_{wl})}{V(Y_l)} = \frac{n^2}{(Sw)(S\frac{1}{w})} = \frac{n^2}{(S\sigma_i^2)(S\frac{1}{\sigma_i^2})} \qquad (18)$$

以下となることはない。此処で σ_i^2 $(i=1,2,\cdots,n)$ が，各々の x に対する y の分散 σ^2 の代表的な標本値であって，σ^2 の変動がそう著しくなければ，$\mathcal{E}(\sigma^2)=m$ とおけば

$$\frac{1}{\sigma^2} = \frac{1}{m}\left(1+\frac{\sigma^2-m}{m}\right)^{-1} \fallingdotseq \frac{1}{m}\left(1-\frac{\sigma^2-m}{m}+\frac{(\sigma^2-m)^2}{m}\right)$$

$$\therefore S\left(\frac{1}{\sigma^2}\right) \fallingdotseq n\,\mathcal{E}\left(\frac{1}{\sigma^2}\right) = \frac{n}{m}\left(1+\frac{\mathcal{E}(\sigma^2-m)^2}{m^2}\right) = \frac{n}{m}(1+C_v)$$

但し $C_v = \mathcal{E}(\sigma^2-m)^2/\mathcal{E}(\sigma^2)$

又 $S(\sigma^2) \fallingdotseq n\,\mathcal{E}(\sigma^2) = nm$

故に (18) から

$$\frac{V(Y_{wl})}{V(Y_l)} \fallingdotseq \frac{1}{1+C_v} \qquad (18)'$$

故に例えば σ_i^2 が x_i に比例するような場合には

$$\sigma_i^2 = k x_i$$

から　$m = k\bar{X}_p$,　$E(\sigma^2 - m)^2 = k^2 \sigma_x^2$,　$C_v = C_x$

従って σ_i^2 の変動がさほど大きくないような場合には，大凡

$$\frac{V(Y_{wl})}{V(Y_l)} = \frac{1}{1+C_x} \qquad (C_x = \sigma_x^2 / \bar{X}_p^2)$$

であると考えることが出来る。

§ 7. 比推定値

荷重回帰推定値の内で，或る型のものは特に計算が容易であつて，農業調査に於る穀類の収量を推定する様な問題に於て有用であることが既に示されている。若し荷重回帰直線が原点を通る場合の最良線型不偏推定値

Y_{wo} は

$$Y_{wo} = \frac{S w x y}{S w x^2} (\Sigma \cdot x) \tag{19}$$

で與えられる。これは §4 の［証明］の［A］に於て示されたものである。　此処で y_i の分散 σ_i^2 が x_i に比例するとすれば，$w_i = 1/(k x_i)$ から (19) は

$$Y_a = \frac{S y}{S x} (\Sigma x) \tag{20}$$

となり，Y_a は，所謂比推定値（*ratio estimate*）であつて，標本から得る x の単位当りの y の平均を全体に引き延ばしたものである。　Y_a は，Y_{wo} の特殊なものであるから，x を固定した時の y の平均及分散が共に x に比例するような母集団に対しては，Σy に対する $y_1, y_2, \cdots, y_n$ に依る線型最良不偏推定値である。　Goldburg (1942) は (x, y) の同時分布が任意の場合

の Ya の標本分布について次のことを示した。

Ya は $\sum y$ の推定値として不偏ではなく，偏倚の主要項は

$$E(Ya-\sum y)=\frac{\sum y}{n}\left\{Cx-\rho\sqrt{CxCy}\right\} \tag{21}$$

であり； Ya の平均自乗誤差の第一近似としては

$$M.S.E(Ya)=\frac{(\sum y)^2}{n}\left\{Cx+Cy-2\rho\sqrt{CxCy}\right\} \tag{22}$$

を得る。

この近似的結果は，例えば [24] を導く時と同様に Taylor 展開を使って容易に導かれる。

従って大標本の場合には偏倚と Ya の平均自乗誤差との比は $\frac{1}{\sqrt{n}}$ に比例すること，しかもこの比を ρ の函数としてみれば $\sqrt{Cx}\sqrt{n}$ を越すことが出来ないことが示される。

$Ys=N\bar{y}_s$ と Ya とは共に計算の容易な型の推定値としてよく用いられるので，この二つの精度を比較することは興味があるが，(22)を用いれば $M.S.E(Ya)\leqq V(Ys)$ であるためには $\rho\geqq\frac{1}{2}\sqrt{Cx/Cy}$ であることが必要且つ十分であることが容易に示される。

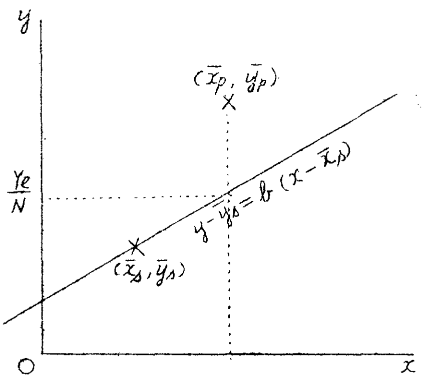
これ迄に述べられた種々の推定値及び差推定値

$$Yd=N\left\{\bar{y}_s\pm(\bar{x}_s-\bar{x}_p)\right\}$$

（但し複号は $\rho \gtrless 0$ に従って $\pm$ を取る）

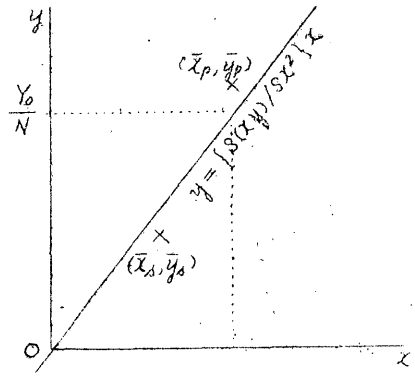
を幾何学的に表示すれば次の様になる。

$$Y_e = N\{\bar{y}_s - b(\bar{x}_s - \bar{x}_p)\}$$



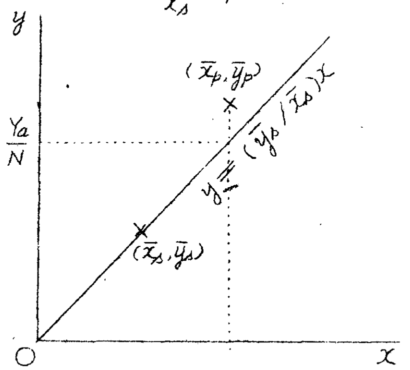
$y-\bar{y}_s = b(x-\bar{x}_s)$ は標本点にあてはめた最小自乗法的回帰直線

$$Y_0 = N\frac{Sxy}{Sx^2}\bar{x}_p$$



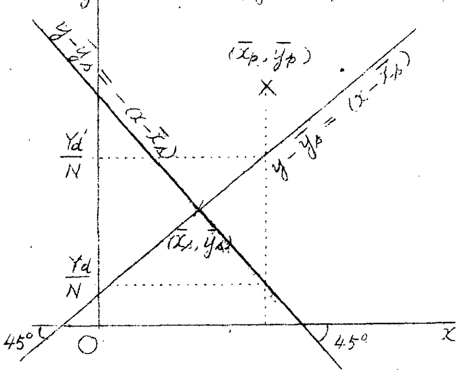
$y=\{Sxy/Sx^2\}x$ は O を通ると云う条件の下で標本点にあてはめた最小自乗法的回帰直線

$$Y_a = N\frac{\bar{y}_s}{\bar{x}_s}\bar{x}_p$$



$$Y_d = N\{\bar{y}_s + (\bar{x}_s - \bar{x}_p)\}$$

$$Y_d' = N\{\bar{y}_s - (\bar{x}_s - \bar{x}_p)\}$$



$$\varepsilon(Y_d - N\bar{y}_p) = 0$$

$$\varepsilon(Y_d - N\bar{y}_p)^2 = \frac{N^2\bar{y}_p^2}{n}\left\{C_y - 2|\rho|\sqrt{C_xC_y}\left(\frac{\bar{x}_p}{\bar{y}_p}\right) + C_x\left(\frac{\bar{x}_p}{\bar{y}_p}\right)^2\right\}$$

§8．層化の場合の推定値

若しすべての抽出単位について性質Xに関する分布表が利用出來る場合には，母集団がいくつかの適当な層に分割されΣyに対する推定値は各層毎のものを合成して作られる。この方法は既に述べたどの推定値に対しても適用出來るのであるが，此処では最も簡単な標本平均推定値Y_sについて述べることにする。

$n_1, n_2, \cdots\cdots, n_k$; $N_1, N_2, \cdots\cdots, N_k$を夫々$k$個の層の標本及母集団の抽出単位の数とする。すると$\Sigma y = N y_p$に対する線型最良不偏推定値は

$$Y_{gs} = N_1 \bar{y}_1 + N_2 \bar{y}_2 + \cdots\cdots + N_k \bar{y}_k \qquad (23)$$

で與えられ，この抽出誤差は

$$V(Y_{gs}) = \left(\frac{N_1^2 \sigma_1^2}{n_1} + \frac{N_2^2 \sigma_2^2}{n_2} + \cdots\cdots + \frac{N_k^2 \sigma_k^2}{n_k} \right) \qquad (24)$$

となる。此処で$\bar{y}_i$及σ_i^2は夫々第i層に於る標本平均，及yの層内分散である。Neymanに依って示された如く，n_iと$\Sigma n_i = n$（一定）なる條件のもとで変じ得る場合には，n_iが$N_i \sigma_i$に比例する様に各層に割当てた時$V(Y_{gs})$は最小となるのであるが，此処では比較を容易ならせるためにn個（一定）の標本が各層にat raudomに割当てられるものとする。すると$(n_1, n_2, \cdots, n_k)$は多項分布として

$$\begin{cases} \mathcal{E}(n_i) = n\dfrac{N_i}{N} \\ \mathcal{E}\left(n_i - n\dfrac{N_i}{N}\right) = n\dfrac{N_i}{N}\left(1 - \dfrac{N_i}{N}\right) \end{cases}$$

故に大標本の場合には $\left| (n_i - \frac{N_i}{N} n) / (n \frac{N_i}{N}) \right| < 1$ であることは略確実と見て

$$\frac{1}{n_i} = \frac{N}{nN_i} \left\{ 1 + \frac{n_i - np_i}{Np_i} + \left(\frac{n_i - np_i}{np_i} \right)^2 \right\} \quad (\text{但し } p_i = \frac{N_i}{N})$$

従って

$$\mathcal{E}\left(\frac{1}{n_i}\right) = \frac{N}{nN_i} \left\{ 1 + \frac{1}{(np_i)^2} \cdot n \frac{N_i}{N} \left(1 - \frac{N_i}{N}\right) \right\}$$

$$= \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} \right) \frac{N}{N_i} + \frac{1}{n^2} \left(\frac{N}{N_i} \right)^2$$

$$\therefore \ \mathcal{E}\left(\frac{N_i^2 \sigma_i^2}{n_i} \right) = \sigma_i^2 \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} \right) NN_i + \sigma_i^2 \frac{N^2}{n^2}$$

故に (24) から

$$\overline{V}(Y_{gs}) = \frac{N^2}{n} \left\{ \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(\sum \frac{N_i}{N} \sigma_i^2 \right) + \frac{k}{n} \left(\frac{1}{k} \sum \sigma_i^2 \right) \right\} \tag{25}$$

若し此処で，すべての戸内分散が等しければ

$$\overline{V}(Y_{gs}) = \frac{N^2 \sigma^2}{n} \left(1 + \frac{k-1}{n} \right) \tag{26}$$

となる。戸の数を増せば，戸内の x の変動が減じ，y の変動のうち，x の変動に依る部分 $\rho^2 \sigma_y^2$ が小さくなつて y の戸内分散は一般に減少する。しかし (26) に於る k を含む部分は k と共に増加し，k が一定の限度を越せば (26) は k が増加すれば減少し従って精度は却って悪くなる。(26) から戸内分散が等しい場合には，$(k-1)/n$ が例えば 0.05 以下の場合には，k を含む因数は左程重要ではない。これは例えば戸毎の標本の大さが平均 20 以上と云う場合に該当する。

(26) と (3) とを比較すると，線型回帰で且つ residual variance が一定の場合には Y_{gs} は Y_e よりいくらか精度が落ちることが分る。と云うのは戸内分散は residual variance 以下となることはなく，且つ附加項に於る $\frac{1}{n}$ の係数は Y_{gs} の方が Y_e のそれより大きいからである。このことは Y_e が線型最良不偏であると結論した同じ條件の下では Y_{gs} は単に線型不偏の推定

値であることからも当然予期される処である。しかし回帰が線型でない場合や，不連続であるような場合には，Y_{gs} の方がよくなるかも知れない。何故ならば y の変動の内，x との如何なる型の関連に依る部分も，適当な層を設ければ除き得るが，(11)′に依って明かな如く Y_l に依っては単に x との線型関係に依って生ずる変動 $\rho^2\sigma_y^2$ を除き得るに止まるからである。しかもこの場合 Y_{gs} は y と x との関係の如何に依らず不偏であると云う長所を持つ。

Y_{gs} の分散の不偏推定値としては (24) の σ_i^2 に層内標本分散 $\frac{1}{n_i-1}S(x_i-\bar{x}_i)^2$ を代用したものをとればよい。

仝様の比較が Y_{gs} と Y_{wl} との間にもなされる。Goldberg は

$$Y_{ga}=\sum_{i=1}^{k} N_i\bar{Y}_{ai}\ ,\qquad \bar{Y}_{ai}\ \text{は (20) に対応する層毎の標本和の比}$$

の性質について簡単に論じた。*) 又有限母集団に関して，最小自乗法的回帰直線のまわりの分散 $\sigma_y^2(1-\rho^2)$ の分析と云う立場から見ると，適当な條件のもとで層毎の回帰推定値を合成して得る Σy の推定値が，Y_s, Y_l のいづれよりもよくすることが出来，特に層内の回帰曲線が linear に近くなるように層化すれば，それだけよくなることが分る。**)

---

*) W. G. Cochran : Sample Survey Technique. (1948), § 9. 参照

**) 筆者：“相関を利用する推定法” 本講究録，第四巻第2号

仝　：“線型回帰推定値に対する層化法に関する注意” 本講究録，第四巻第9号

§ 9 注意と総括

以上各節に於て示されたいくつかの大標本の場合の近似について，それが適用出来る限界について何等指示されていないことについて，その弁明が必要と思はれるが不幸にしてそれらの限界は，xとyとの同時的変数分布に依存するものであり，従つてそれらの変数分布をいくつかの型に分類してからでなければはっきり定めることは出来ないのである。　その上実際の調査に於ては，標本の抽出方法によって偏倚が生ずる可能性があり，集つた調査票の不完全であることや，報告や記録の際の過誤なども考えに入れなければならない。しかしそう云った偏倚は，精度に影響を興えるものであるにも拘らず，抽出誤差の公式に依っては測り得ないものである。従って粗い近似に依る抽出誤差の公式も，実用上の目的に対しては十分であることが多いのである。

若し母集団に於る正しい回帰関係に対応する回帰推定値を取るならば，全じx（大さ）を持つ抽出單位に対しては全じ確率を持たせるようにすれば所謂任意抽出に依らない場合にもやはり不偏推定値を得るのである。そして例えばxと共にyの分散も増大するような型の母集団に対しては，抽出單位のxに比例する確率を興えて抽出することにすれば，一層よい推定値を得ることになる。しかし之に反して全じxを持つ單位の間で異つた確率を興えて抽出するようなことを行えば偏倚が入って来る。

上述の公式は，yとそれと相関のあるxとを取る限り，如何なる性質の測度についても適用出来ることは勿論である。例えば農業調査に於て，抽出單位は一定面積の土地であることが屢々あるが，その場合xとしてはその土地の農家の数，或は耕地面積，或はある作物の植付面積等，考えられているyと最も相

関の高い量をとればよいのである。

母集団から相当の部分が抽出される場合には，無限母集団の場合の論法が適用出来なくなるので，此の場合の正確な補正項を算出するために先づ第一の難点とされる処は，有限母集団に於る回帰を如何に定義するかと云うことである。

今 $y=\alpha+\beta x+e$ と表わすと，有限母集団の場合にも，無限母集団の場合に於けるように x と e との相関はないものとしたいのであるが，x のどの値に対しても e が無相関であるとするためには，條件の数が利用出来る e の値の数以上となり，従って今迄のような意味で x と e とが独立に分布すると考えるわけには行かない。これに代る近似法としては，当面の有限母集団を e と x とが独立な無限母集団からの一つの任意標本と考える方法であるが，既になされた研究と，Goldberg(1942) の研究に依れば，有限母集団に対する第一近似としては，抽出誤差に関する式 (2), (3), (22) 及び偏倚に関する式 (11), (21), に夫々 $(N-n)/n$ を乗じたものを，又 (24) には夫々の項に対応する $(N_i-n_i)/n_i$ を乗じたものを取ればよいことが示される。

Y_0 及 Y_{wl} に対しては更に研究が必要である。そのために難点とされる処はこの双方共が Fisher の意味で一致性を持たないことにある。之に反して Y_s, Y_e, Y_a, Y_{gs} はいづれも一致統計量なのである。

以上を要約すると，単位が持つ面積，或は大さと云うような調査の対象 y とは異る一つの性質 x が，単位毎に異るような母集団に対する抽出調査に於て考えられる母集団合計 Σy に対するいろいろの推定値について論じたのである。その多くは，y の x に対する回帰関係によって導かれたものであり，これらを計算に容易なものの順に並べれば次のようになる。

Y_s ; yの標本平均を延したもの

Y_a ; 標本に於るxの単位当りのyの平均を延したもの

Y_{gs} ; 層化された場合Y_sに重みをつけて合成したもの

Y_o ; 荷重を考えない線型回帰に基くもの

Y_e ; 全上

Y_{wo} ; 荷重線型回帰に基くもの

Y_{we} ; 全上

上の各推定値に対して，抽出誤差の比較によって，如何なる条件の下でどの推定値がどの位優れているかについて論じたのである。

(24. 8. 31)