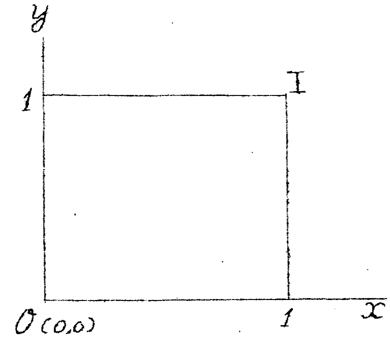
㉕ 函数方程式 $F(x, \theta_1+\theta_2)=F(F(x,\theta_1),\theta_2)$ について（Ⅱ）

東京女高師　　岩　村　　聯

§ 1

工藤氏の書かれた（Ⅰ）の條件も結果も断り無しに用いる。θ を parameter と考えて，$y=F(x,\theta)$ のグラフを屢〻利用する。図に頼つても危険の無いところでは，こまかい説明を省く。

そのグラフは右の正方形の中に入つていて，$\theta>0$ ならば対角線 OⅠの上側，$\theta<0$ ならば下側にあり，$\theta=0$ ならば OⅠに一致する。

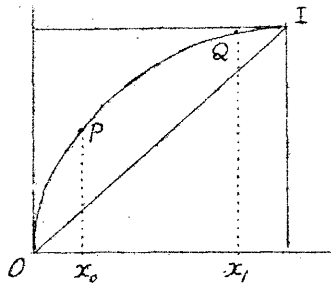


函数方程式からわかるように，$F(F(x,-\theta),\theta)=F(x,0)=x$ で，$F(x,-\theta)$ は $F(x,\theta)$ の逆函数，そのグラフは OⅠ に関して互に対称，したがつて，グラフは正方形の辺には O,Ⅰ 以外の点では触れない。

$\theta>0$ とすると，$F(x,\theta)$ は上に凸で単調増加だから右側，左側の偏微係数 $F_x^+(x,\theta)$, $F^-(x,\theta)$ が $0<x<1$ に於て存在して ≥ 0，実は上に言つた理由で

$$(10)\qquad 0<F_x^+(x,\theta)\leq F(x,\theta)\qquad (0<x<1)$$

$0<x_0<x_1<1$ なる x_0, x_1 を固定し $y_0=F(x_0,\theta)$, $y_1=F(x_1,\theta)$ として点 $P(x_0,y_0)$, $Q(x_0,y_0)$ を定める。$\theta\to 0$ のとき P, Q は対角線 OI に近づくから，直線 OP, IQ の勾配は 1 に近づく。$x_0\leq x\leq x_1$ のときは $F_x^+(x,\theta)$



はこの両勾配の間にあるから，次の $lemma$ を得る。

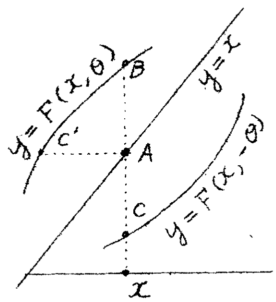
Lemma 2. $0<x_0<x_1<1$ なる x_0, x_1 を固定すると，$x_0 \leqq x \leqq x_1$ に於いて一様に $F_x^{\pm}(x,\theta) \to 1 \quad (\theta \to 0)$.

この $lemma$ によつて $x\ (0<x<1)$ を固定すると右図に於いて直線 BC' の勾配 $\to 1\ (\theta \to 0)$，したがつて $\overline{AB}/\overline{AC'} \to 1 \quad (\theta \to 0)$.

ところが $\overline{AB} = F(x,\theta) - F(x,0)$,

$\overline{AC'} = \overline{AC} = F(x,0) - F(x,-\theta)$

だから



Lemma 3. $0<x<1$ のとき

$$\frac{F(x,\theta)-F(x,0)}{F(x,-\theta)-F(x,0)} \longrightarrow -1 \qquad (\theta \to 0)$$

定理 IV. すべての $x\ (0<x<1)$ 及び θ に対して $F_x(x,\theta)$, $F_\theta(x,\theta)$ が存在して

$$F_\theta(x,\theta) = F_x(x,\theta)\cdot F_\theta(x,0).$$

証明　$\varepsilon \neq 0$ のとき，$F(x,\theta_1+\theta_2)=F(F(x,\theta_1),\theta_2)$ によつて，

$$(11)\begin{cases} \dfrac{F(x,\theta+\varepsilon)-F(x,\theta)}{\varepsilon} \\ = \dfrac{F(F(x,\varepsilon),\theta)-F(F(x,0),\theta)}{F(x,\varepsilon)-F(x,0)} \cdot \dfrac{F(x,\varepsilon)-F(x,0)}{\varepsilon} \end{cases}$$

いま x （$0<x<1$） を任意に固定すると，$F(x,\theta)$ が θ に関して単調増加だから，或る θ に於て $F_\theta(x,\theta)$ が存在する。

その θ を一つ取って（11）に於いて $\varepsilon \longrightarrow +0$ としてみると

$$\frac{F(x,\theta+\varepsilon)-F(x,\theta)}{\varepsilon} \rightarrow F_\theta(x,\theta)$$

$$F(x,\varepsilon) \longrightarrow F(x,0) = x \qquad (F(x,\varepsilon)>F(x,0))$$

$$\frac{F(F(x,\varepsilon),\theta)-F(F(x,0),\theta)}{F(x,\varepsilon)-F(x,0)} \rightarrow F_x^+(x,\theta)>0$$

（（11）参照）

によつて，（有限な）右側微係数

$$\lim_{\varepsilon\to+0} \frac{F(x,\varepsilon)-F(x,0)}{\varepsilon} = F_\theta^+(x,0)$$

の存在がわかる。

同様に $F_\theta^-(x,0)$ も存在するが，*Lemma* 3 によつてそれは $F_\theta^+(x,0)$ に等しい。

これで $F_\theta(x,0)$ の存在が知られた。

次に x，θ_0 を固定して $Z = Z(\theta)$ を

$$Z = F(x,\theta_0+\theta) = F(F(x,\theta_0),\theta)$$

と置き

$$x_0 = F(x,\theta_0)$$

と置くと

$$F_\theta(x_0,0) = Z'(0) \doteq \left[F_\theta(x,\theta_0+\theta)\right]_{\theta=0} = F_\theta(x,\theta_0)$$

となつて，$F_\theta(x,\theta_0)$ の存在がわかる。

故に，$0<x<1$ に於て常に $F_\theta(x,\theta)$ が有る。

（11）によつて，$F_\theta(x,0) \neq 0$ ならば $F_x(x,\theta)$ も存在して

$$F_\theta(x,\theta) = F_x(x,\theta)\cdot F_\theta(x,0)$$

となるわけである。

定理 V. $F_\theta(x,0)$ は $0<x<1$ に於いて上に凸で，$0<x<1$ に於て常に $F_\theta(x,0)>0$ である。

証明　先づ $F_\theta(x,0)\geq 0$ は明白，また，$x=\frac{1}{2}(x_0+x_1)$ ならば，$\theta>0$ に於て $F(x,\theta)\geq\frac{1}{2}\{F(x_0,\theta)+F(x_1,\theta)\}$ だから

$$\frac{F(x,\theta)-x}{\theta}\geq\frac{1}{2}\left\{\frac{F(x_0,\theta)-x_0}{\theta}+\frac{F(x_1,\theta)-x_1}{\theta}\right\},$$

こゝで $F(x,0)=x$ に注意し，$\theta\to 0$ とすれば
$F_\theta(x,0)\geq\frac{1}{2}\{F_\theta(x_0,0)-F_\theta(x_1,0)\}$，故に $F_\theta(x,0)$ は上に凸である。

そこで，或る x $(0<x<1)$ に於て $F_\theta(x,0)=0$ となれば恒等的に $F_\theta(x,0)=0$ となるが，(11) によつて

$$F_\theta^+(x,\theta)=F_x^+(x,\theta)\cdot F_\theta(x,0)$$

$$F_\theta^-(x,\theta)=F_x^-(x,\theta)\cdot F_\theta(x,0)$$

だから恒等的に $F_\theta(x,0)=0$ になつてしまい，恒等式 $F(x,\theta)=x$ が成立つて最初の條件に反する。

故に，常に $F_\theta(x,0)>0$ $(0<x<1)$ である。

定理 VI $F_x(x,\theta)$, $F_\theta(x,\theta)$ は共に x,θ の函数として $0<x<1$ に於て連続である。

証明　$F_\theta(x,0)$ は x の函数として凸だから連続，従つて，定理 IV により，$F_x(x,\theta)$ の連続性を示せばよい。

$0<x_0<1$ なる x_0 と任意の θ_0 を固定する。

$F(x,\theta) = F(F(x,\theta_0), \theta-\theta_0)$ の両辺を x で微分して

$$F_x(x,\theta) = F_x(x,\theta_0)\cdot F_x(F(x,\theta_0), \theta-\theta_0).$$

x の函数 $F(x,\theta_0)$ は上又は下に凸で微分可能だから $F_x(x,\theta_0)$ は連続．したがつて $x \to x_0$ のとき $F_x(x,\theta_0) \to F_x(x_0,\theta_0)$. またこのとき $F(x,\theta_0) \to F(x_0,\theta_0)$, $0 < F(x_0,\theta_0) < 1$.

故に *Lemma* 2 により，$x \to x_0$, $\theta \to \theta_0$ のとき

$$F_x(x,\theta) \longrightarrow F_x(x_0,\theta_0)$$

定理 VII. $F(x,\theta) = f^{-1}(f(x)+\theta)$
ただし f^{-1} は f の逆函数で，$f(x)$ は任意の予定積分

$$f(x) = \int \frac{dx}{F_\theta(x,0)}$$

この $f(x)$ は単調増加．逆に $0<x<1$ に於て凸で $K(x)>0$ なる任意の $K(x)$ を取つて

$$F(x,\theta) = f^{-1}(f(x)+\theta)$$
$$f(x) = \int \frac{dx}{K(x)}$$

と置けば $F(x,\theta)$ は我々の條件を充たし，$F_\theta(x,0) = K(x)$.

証　明　後半は明白．前半の証明のために $f(x)$ は

$$\int \frac{dx}{F_\theta(x,0)}$$ と定めて

$$G(x,\theta) = f^{-1}(f(x)+\theta)$$

と置くと，$f(G(x,\theta)) = f(x)+\theta$ から

$$G_\theta(x,\theta) = G_x(x,\theta)\,F_\theta(x,0)$$

を得る。

しかも，$G(x, \theta)$はこの定理の後半と定理VIにより連続な偏微係数を持つ。 $F(x, \theta)$も同様だから

$$\begin{vmatrix} F_x & F_\theta \\ G_x & G_\theta \end{vmatrix} = 0$$

により

$$F(x,\theta) = \omega(G(x,\theta))$$

と書かれる。 特に

$$x = F(x,0) = \omega(G(x,0)) = \omega(x)$$

従って

$$F(x,\theta) = G(x,\theta)$$

$F_\theta^+(x, 0)$ の存在の初等的証明を附記する。

$0 < x_0 < 1$ なる x_0 を固定して考える。

$0 < k_0 < 1 < k_1$ なる k_0, k_1 に対して $\varepsilon > 0$ を取って，

$\varepsilon > \theta > 0$ に於ては $k_0 < F_x^+(x_0, \theta) \leqq F_x^-(x_0, \theta) < k_1$ となるようにする。

$f(\theta) = F(x_0, \theta) - x_0$ と置き，$0 < \theta < \varepsilon$ の範囲だけで考える。 $0 < \theta < \theta + \theta_1 < \varepsilon$ のとき

$$f(\theta+\theta_1) - f(\theta) = F(x_0 + f(\theta_1), \theta) - F(x_0, \theta)$$

により

$$k_0 \cdot f(\theta_1) \leqq f(\theta+\theta_1) - f(\theta) \leqq k_1 f(\theta_1)$$

故に $0 < (n-1)\theta_1 < \varepsilon$ の範囲で

$$n k_0 f(\theta_1) \leqq f(n\theta_1) \leqq n k_1 f(\theta_1)$$

$\theta_0 > 0$ を固定し $n_\theta = [\theta_0/\theta]$ と置くと上式から

$$n_\theta f(\theta) \leqq f(\theta_0)/k_0, \quad f(\theta_0)/k_1 \leqq (n_\theta+1) f(\theta)$$

$\theta \to 0$ のとき $f(\theta) \to 0$ となり

$$f(\theta_0)/k_1 \leqq \underline{\lim}\, n_\theta f(\theta) \leqq \overline{\lim}\, n_\theta f(\theta) \leqq f(\theta_0)/k_0$$

$\theta_0/\theta \sim n_\theta$ から

$$\frac{1}{k_1}\frac{f(\theta_0)}{\theta_0} \leqq \underline{\lim}\, \frac{f(\theta)}{\theta} \leqq \overline{\lim}\, \frac{f(\theta)}{\theta} \leqq \frac{1}{k_0}\frac{f(\theta_0)}{\theta_0}$$

そこで $c = \overline{\lim}\, f(\theta)/\theta$ と置く。

$\delta > 0$, $k_0' < 1 < k_1'$ を任意に取る。$\varepsilon' > 0$ を適当にとって $0 < \theta_1 < \varepsilon'$ に於ては $k_0' < F_x^+(x, \theta_1) \leqq F_x^-(x, \theta_1) < k_1'$ となるようにし，斯様な θ_1 で $|c - f(\theta_1)/\theta_1| < \delta$ なるものを取れば，上と同様な予等式から

$$(c-\delta)/k_1' \leqq \underline{\lim}\, f(\theta)/\theta \leqq \overline{\lim}\, f(\theta)/\theta \leqq (c+\delta)/k_0'$$

を得る。

k_0', k_1' は 1 に充分近く，δ は 0 に充分近く取れるから

$$c = \lim f(\theta)/\theta .$$

故に $F_\theta^+(x_0, \theta)$ が存在する。