㊼ k変数正規母集団における不等式について

研修生　池田　豊治

変量 $X_1, X_2, \cdots\cdots, X_k$ が k 変数正規分布をする時，

$$\varphi \equiv \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k} \frac{\Delta_{ij}}{\sigma_i \sigma_j}(X_i - \tilde{X}_i)(X_j - \tilde{X}_j)$$

は次式を満足する。

$$P_r\{\varphi \leqq \lambda^2 \Delta\} = \frac{1}{2^{\frac{k}{2}}\Gamma(\frac{k}{2})}\int_0^{\lambda^2}(\chi^2)^{\frac{k-2}{2}} e^{-\frac{\chi^2}{2}} d\chi^2$$

但し　$E\{X_i\} = \tilde{X}_i$

σ_i^2 ： X_i の分散

ρ_{ij} ： X_i と X_j との相関係数

$$\Delta = \begin{vmatrix} \rho_{11} & \rho_{12} & \cdots & \rho_{1k} \\ \rho_{21} & \rho_{22} & \cdots & \rho_{2k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \rho_{k1} & \rho_{k2} & \cdots & \rho_{kk} \end{vmatrix}$$

Δ_{ij} ： ρ_{ij} の餘因子，　$\lambda > 1$

この結果は，$\dfrac{\varphi}{\Delta}$ が，自由度 k の χ^2－分布をする事より得られる。これより次の定理が導かれる。

［定　理］　変量 $X_1, X_2, \cdots\cdots, X_k$ が k 変数正規分布をするならば

$$P_r\{|X_1-\widetilde{X}_1| \leqq \lambda\sigma_1, |X_2-\widetilde{X}_2| \leqq \lambda\sigma_2, \cdots\cdots, |X_k-\widetilde{X}_k| \leqq \lambda\sigma_k\}$$

$$> \frac{1}{2^{\frac{k}{2}}\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)} \int_0^{\lambda^2} (\chi^2)^{\frac{k-2}{2}} e^{-\frac{\chi^2}{2}} d\chi^2$$

但し　$\lambda > 1$　である。

この定理の証明は，$\varphi = \lambda^2\Delta$　とおく時，

これは，k 次元空間における楕円となり，此の楕円は

$$|X_i-\widetilde{X}_i| = \lambda\sigma_i \qquad i=1,2,\cdots\cdots,k$$

の表す直方体に内接する事を用いれば良い。

・定理の適用：

標本調査による幾つかの母平均の推定に就いて考察する。

母集団が $A_1, A_2, \cdots\cdots, A_N$ なる N 個の調査単位より成りその各々が，k 個の目印 character を持つものとする。

即ち　A_i　$(i=1,2,\cdots\cdots,N)$

の持つ目印を　$X_{i1}, X_{i2}, \cdots\cdots, X_{ik}$

とする。

此の N 個の調査単位より無作為に n 個を抽出し，

$$\frac{\sum_{i=1}^{N} X_{i1}}{N} = \widetilde{X}_1$$

$$\frac{\sum_{i=1}^{N} X_{i2}}{N} = \widetilde{X}_2$$

$$\frac{\sum_{i=1}^{N} X_{ik}}{N} = \widetilde{X}_k$$

なる母平均を推定するものとする。

n 個における k 個の目印のそれぞれの平均値は，n 個の抽出され方により変化し，変量と見られる。

これを，$\overline{X}_1$，$\overline{X}_2$ ------，$\overline{X}_k$ とする。

明かに

$$E\{\overline{X}_1\} = \widetilde{X}_1$$

$$E\{\overline{X}_2\} = \widetilde{X}_2$$

$$E\{\overline{X}_k\} = \widetilde{X}_k$$ である。

N が非常に大であり，n がかなり大である場合には，近似的に，$\overline{X}_1$，$\overline{X}_2$ ------，$\overline{X}_k$ は k 変数正規分布をするものと考えられる。

従つて，

$\overline{X}_i$ （$i = 1, 2,$ ------，k）の分散を $\sigma_{\overline{X}_i}^2$ とすれば，次式が近似的に成立する。

$$
P_r\left\{ |\bar{X}_1-\tilde{X}_1| \leqq \lambda\sigma_{\bar{X}_1},\ |\bar{X}_2-\tilde{X}_2| \leqq \lambda\sigma_{\bar{X}_2},\cdots\cdots,\ |\bar{X}_k-\tilde{X}_k| \leqq \lambda\sigma_{\bar{X}_k} \right\}
$$

$$
> \frac{1}{2^{\frac{k}{2}}\,\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)} \int_0^{\lambda^2} (\chi^2)^{\frac{k-2}{2}} e^{\frac{-\chi^2}{2}} d\chi^2
$$

$\tilde{X}_1$, $\tilde{X}_2$ ……… , $\tilde{X}_k$ の推定に，抽出した n 個より求めた $\bar{X}_1$, $\bar{X}_2$,……… , $\bar{X}_k$ を用い，同時推定の信頼域及び信頼度を上式により求めることが出来る。

(25. 4. 30)