㉗ 正常分布 $p(x\cdot y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\exp\Big[$

$-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left\{\frac{(x-a)}{\sigma_1^2}-\frac{2\rho(x-a)(y-b)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(y-b)^2}{\sigma_2^2}\right\}\Big]$ に関する

假設 $a-b=\theta_1$, の検定, 及び, $a-b$ の

區間推定法について。

東京高師教授　小西　勇雄

[A] 点 (x, y) の元確率法則が上記の如きとき, $\xi=x-y$, $\eta=y$ に依て定まる点 (ξ, η) の元確率法則は次の如くなる。

$$p(\xi,\eta)=\frac{1}{2\pi\theta_4\theta_5}\exp\left[-\frac{(\xi-\theta_1)^2}{2\theta_4^2}-\frac{(\eta-\theta_2\xi-\theta_3)^2}{2\theta_5^2}\right]\cdots(1)$$

但し, $\theta_1=a-b$　　$\theta_4^2=\sigma_1^2-2\rho\sigma_1\sigma_2+\sigma_2^2$　$(\theta_4>0)$

$\theta_2=\frac{\rho\sigma_1\sigma_2-\sigma_2^2}{\theta_4^2}$　　$\theta_5^2=\frac{(1-\rho^2)\sigma_1^2\sigma_2^2}{\theta_4^2}$　$(\theta_5>0)$

$\theta_3=b-\theta_1\theta_2$

証　$\frac{\partial(\xi,\eta)}{\partial(x,y)}=1$,　$-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left\{\frac{(x-a)^2}{\sigma_1^2}-\frac{2\rho(x-a)(y-b)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(y-b)^2}{\sigma_2^2}\right\}$

$$=-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left\{\frac{(\xi-\theta_1)^2}{\sigma_1^2}-\frac{2(\sigma_1\rho-\sigma_2)}{\sigma_1^2\sigma_2}(\xi-\theta_1)(\eta-b)+\frac{\sigma_1^2-2\rho\sigma_1\sigma_2+\sigma_2^2}{\sigma_1\sigma_2}(\eta-b)^2\right\}$$

$$= -\frac{(\xi-\theta_1)^2}{2(\sigma_1^2-2\rho\sigma_1\sigma_2+\sigma_2^2)} - \frac{\sigma_1^2-2\rho\sigma_1\sigma_2+\sigma_2^2}{2\sigma_1^2\sigma_2^2(1-\rho^2)}\left\{\eta - b - \frac{\rho\sigma_1\sigma_2-\sigma_2^2}{\sigma_1^2-2\sigma_1\sigma_2+\sigma_2^2}(\xi-\theta_1)\right\}^2$$

$$= -\frac{(\xi-\theta_1)^2}{2\theta_4^2} - \frac{1}{2\theta_5^2}\left\{\eta-\theta_2\xi-\theta_3\right\}^2$$

$$\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2} = \theta_4\theta_5$$

より (1) の成立つことがわかる。

［B］ 元確率法則が (1) で与へられているとき，$2n$ 次元の見本空間 W に於ける見本点 $E\,(\xi_1,\cdots,\xi_n,\eta_1,\cdots\eta_n)$ の元確率法則を

$$p(E\,|\,\theta_1,\theta_2,\theta_3,\theta_4,\theta_5) = \left(\frac{1}{2\pi\theta_4\theta_5}\right)^n \exp\left\{-\frac{\Sigma(\xi_i-\theta_1)^2}{2\theta_4^2} - \frac{\Sigma(\eta_i-\theta_2\xi_i-\theta_3)^2}{2\theta_5^2}\right\} \cdots (2)$$

とし，W に於ける領域 ω に対し，$E\in\omega$ なる確率と

$$\beta(\theta_1,\cdots,\theta_5\,|\,\omega) = P(E\in\omega\,|\,\theta_1\cdots\theta_5) = \int_\omega p(E\,|\,\theta_1,\cdots,\theta_5)\,dW \cdots (3)$$

とする。

ω を假設 $\theta_1=\theta_1'$ に対する確率 α の棄却領域，即ち

$$\beta(\theta_1',\theta_2,\cdots\theta_5\,|\,\omega) = \alpha \quad (\theta_2,\cdots,\theta_5 \text{ は任意}) \cdots (4)$$

とすれば

$$\int_\omega \frac{\Sigma(\xi_i-\theta_1')^2}{\theta_4^2}\,p(E\,|\,\theta_1',\theta_2,\theta_3,\theta_4,\theta_5)\,dW = n\alpha \quad \text{------} (5)$$

証. $\beta(\theta_1',\theta_2\cdots\theta_5|\omega)$ は θ_4 に関係なく一定の値をもつから

$$\frac{\partial}{\partial\theta_4}\beta(\theta_1',\theta_2\cdots\theta_5\,|\,\omega) = \int_\omega \frac{\partial}{\partial\theta_4}p(E\,|\,\theta_1',\theta_2\cdots\theta_5)\,dW = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial\theta_4}\, p(\mathrm{E}\,|\,\theta_1'\cdots) = p(\mathrm{E}\,|\,\theta_1'\cdots)\cdot\frac{\partial}{\partial\theta_4}\log p(\mathrm{E}\,|\,\theta_1'\cdots)$$

$$= p(\mathrm{E}\,|\,\theta_1'\cdots)\left\{\frac{\Sigma(\xi_i-\theta_1)^2}{\theta_4^3}-\frac{n}{\theta_4}\right\}$$

$$\therefore\ \int_\omega \frac{\Sigma(\xi_i-\theta_1)^2}{\theta_4^3}\, p(\mathrm{E}\,|\,\theta_1'\cdots\theta_5)\,dW = \int_\omega \frac{n}{\theta_4}\, p(\mathrm{E}\,|\,\theta_1'\cdots\theta_5)\,dW$$

θ_4 は，積分変数に関係しないから

$$\int_\omega \frac{\Sigma(\xi_i-\theta_1)^2}{\theta_4^2}\, p(\mathrm{E}\,|\,\theta_1'\cdots\theta_5)\,dW = n\int_\omega p(\mathrm{E}\,|\,\theta_1'\cdots\theta_5)\,dW = n\alpha$$

[C]

$$\omega_0 = \left[\mathrm{E}\,\middle|\,\frac{|\bar{\xi}-\theta_1'|}{\sqrt{\frac{\Sigma(\xi_i-\bar{\xi})^2}{n(n-1)}}} \geqq t_0\right]$$ 即ち

$$\begin{cases} \mathrm{E}\in\omega_0 \text{ ならば } & \dfrac{|\bar{\xi}-\theta_1'|}{\sqrt{\frac{\Sigma(\xi_i-\bar{\xi})^2}{n(n-1)}}} \geqq t_0, \\ \mathrm{E}\notin\omega_0 \text{ ならば } & \qquad〃 \qquad < t_0 \end{cases}$$ なる領域 ω_0

は假設 $\theta_1=\theta_1'$ に対する確率 α の Neyman の意味のB型の不偏棄却領域である。

但し $\displaystyle\int_{-t_0}^{t_0} p(t)\,dt = 1-\alpha.$ 　$p(t)$ は自由度 $n-1$ の Student の t の確率とする。

証．ω_0 の條件 $\dfrac{|\bar{\xi}-\theta_1'|}{\sqrt{\frac{\Sigma(\xi_i-\bar{\xi})^2}{n(n-1)}}} \geqq t_0$ 　$\bar{\xi}=\dfrac{1}{n}\Sigma\xi_i$

を書きかえると

$$n(n-1)(\bar{\xi}-\theta_1')^2 \geqq t_0^2 \sum(\xi_i-\bar{\xi})^2 = t_0^2 \sum(\xi_i-\theta_1')^2 - nt_0^2(\bar{\xi}-\theta_1)^2$$

$$n(n-1+t_0^2)(\bar{\xi}-\theta_1')^2 \geqq t_0^2 \sum(\xi_i-\theta_1')^2$$

$$(n-1+t_0^2)\left\{\sum(\xi_i-\theta_1')\right\}^2 \geqq nt_0^2 \sum(\xi_i-\theta_1')^2$$

$$\therefore \quad \omega_0 = \left[E \mid \left\{\sum(\xi_i-\theta_1')\right\}^2 \geqq k \sum(\xi_i-\theta_1')^2 \right] \text{-----} (6)$$

$$\text{但し} \quad k = \frac{n t_0^2}{n-1+t_0^2}$$

ω_0 は $\xi_1, \cdots, \xi_n$ のみについての條件で定められている。
従って ω_0 の空间 $(\xi_1, \cdots, \xi_n)$ えの射影を ω_1 とかけば

$$\beta.(\theta_1, \theta_2 \cdots \theta_5 \mid \omega_0) = \int_{\omega_0} p(E \mid \theta_1, \theta_2 \cdots \theta_5)\, dW$$

$$= \int_{\omega_1} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int p(E \mid \theta_1, \cdots)\, d\eta_1 \cdots d\eta_n \right) d\xi_1 \cdots d\xi_n$$

$$= \int_{\omega_1} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\theta_4} \right)^n \exp\left(- \frac{\sum(\xi_i-\theta_1)^2}{2\theta_4^2} \right) d\xi_1 \cdots d\xi_n \text{--} (7)$$

依て Student test の性質より

$$\beta(\theta_1', \theta_2 \cdots \theta_5 \mid \omega) = \alpha \qquad (8)$$

$$\frac{\partial}{\partial\theta_1} \beta(\theta_1, \theta_2 \cdots \theta_5 \mid \omega)_{\theta_1=\theta_1'} = 0 \qquad (9)$$

$(\theta_2 \cdots \theta_5$ は任意$)$

が $\omega = \omega_0$ としたときに成立する。
今，(8)，(9) をみたす ω をとれば [B] より (5) が成立つ。
また

$$\frac{\partial^2}{\partial\theta_1^2} \beta(\theta_1 \theta_2 \cdots \theta_5 \mid \omega) = \int_{\omega} \frac{\partial^2}{\partial\theta_1^2} p(E \mid \theta_1 \theta_2 \cdots)\, dW$$

$$= \int_{\omega} \frac{\partial}{\partial\theta_1} \left(\frac{\sum(\xi_i-\theta_1)}{\theta_4^2} p(E \mid \theta_1 \cdots) \right) dW$$

$$= \int_{\omega} \left\{ \left(\frac{\Sigma(\xi_i - \theta_1)}{\theta_4^2} \right)^2 - \frac{n}{\theta_4^2} \right\} p(\mathrm{E} | \theta_1 \cdots) dW$$

より

$$\therefore \quad \frac{\partial^2}{\partial \theta_1^2} \beta(\theta_1 \theta_2 \cdots \theta_5 | \omega)_{\theta_1 = \theta_1'} = \left(\int_{\omega} \left(\frac{\Sigma(\xi_i - \theta_1')}{\theta_4^2} \right)^2 p(\mathrm{E} | \theta_1' \cdots) dW - n\alpha \right) \times \frac{1}{\theta_4^2}$$

一方

$$\int_{\omega_0} \frac{(\Sigma(\xi_i - \theta_1'))^2}{\theta_4^2} p(\mathrm{E} | \theta_1' \cdots) dW - \int_{\omega} \frac{\Sigma(\xi_i - \theta_1')^2}{\theta_4^2} p(\mathrm{E} | \theta_1' \cdots) dW$$

$$= \int_{\omega_0 - \omega} \quad \text{〃} \quad - \int_{\omega - \omega_0} \quad \text{〃}$$

ω_0 の定めかたから (6) によリ

$$\geqq \int_{\omega_0 - \omega} \frac{k \Sigma(\xi_i - \theta_1')^2}{\theta_4^2} p(\mathrm{E} | \theta_1' \cdots) dW - \int_{\omega - \omega_0} \frac{k \Sigma(\xi_i - \theta_1')^2}{\theta_4^2} p(\mathrm{E} | \theta_1' \cdots) dW$$

$$= \int_{\omega_0} \quad \text{〃} \quad - \int_{\omega} \quad \text{〃}$$

$$= kn\alpha - kn\alpha = 0$$

$$\therefore \quad \int_{\omega_0} \frac{(\Sigma(\xi_i - \theta_1'))^2}{\theta_4^2} p(\mathrm{E} | \theta_1' \cdots) dW > \int_{\omega} \frac{(\Sigma(\xi_i - \theta_1'))^2}{\theta_4^2} p(\mathrm{E} | \theta_1' \cdots) dW$$

$$\therefore \quad \frac{\partial^2}{\partial \theta_1^2} \beta(\theta_1 \cdots \theta_5 | \omega_0)_{\theta_1 = \theta_1'} \geqq \frac{\partial^2}{\partial \theta_1^2} \beta(\theta_1 \cdots \theta_5 | \omega) \qquad (10)$$

即ち ω_0 は (8)(9) をみたし，(8)(9) をみたす任意の ω に対し (10) の関係が成立するから ω_0 は B 型の不偏棄却領域である。

D　以上のことを

$$p(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2(1-\rho^2)}\exp\left[-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left\{\frac{(x-a)^2}{\sigma_1^2}-\frac{2\rho(x-a)(x-b)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(y-b)^2}{\sigma_2^2}\right\}\right] \tag{11}$$

にもどしていえば

假設　$a-b=\theta_1$　の検定には，見本点（$x_1, \cdots x_n, y_1, \cdots y_n$）が

$$\frac{|\bar{x}-\bar{y}-\theta_1|}{\sqrt{\dfrac{S_x^2-2rS_xS_y+S_y^2}{n-1}}}\geqq t_\alpha$$

但し　$\int_{-t_\alpha}^{t_\alpha}p(t)dt=1-\alpha$,　$p(t)$は自由度 $n-1$ の student の t-分布

のとき，假設を棄てることにすれば，之は危険率αのB型の不偏検定であることがわかる。

また　見本点（$x_1, \cdots, x_n, y_1, \cdots y_n$）を得たとき

$$\bar{x}-\bar{y}-t_\alpha\sqrt{\frac{S_x^2-2rS_xS_y+S_y^2}{n-1}}\leqq a-b\leqq\bar{x}-\bar{y}+t_\alpha\sqrt{\quad〃\quad}$$

なる区間に依て　$a-b$　の値を推定す。