~~(15) リテラシイ調査にあらはれた分布の型など(平均と標準偏差との関係)~~

(15)

論 文 紹 介 III

P.C.Tang : The power function of the analysis of variance test with tables and illustrations of their use. Statistical Research Memoirs Vol. II (1938)

I. はしがき

普通統計的假説の検定に用ひられるテストは所謂F－テストである。此論文の目的はF－テストの検定力(Power)を計算することある。

普通に出會ふ統計的假説の大部分をその Special Case として含むものは次に述べる所謂"一次假説"(Linear Hypothesis)(1) である。

假定:(a) N箇の統計的に独立な変量

$$x_1,\ x_2, \cdots\cdots ,\ x_N \qquad (1)$$

は夫々正規分布

$$p(x_i) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{(x_i-\xi_i)^2}{2\sigma^2}}, \quad i=1,2,\cdots,N \qquad (2)$$

従ふ。但し茲で

$$\xi(x_i) = \xi_i, \quad i = 1, 2, \cdots\cdots, N.$$

は未知ではあるが，凡ての x_i に共通である。

(b) ξ_i, $i=1,2,\cdots\cdots,N$ は s ($<N$) 箇の未知定数

$$\theta_1, \theta_2, \cdots\cdots, \theta_r, \theta_{r+1}, \cdots\cdots, \theta_s \qquad (3)$$

の一次形式である。即ち C_{ij} は既知定数として

$$\xi_i = C_{i1}\theta_1 + C_{i2}\theta_2 + \cdots\cdots + C_{is}\theta_s, \quad i=1,2,\cdots N \qquad (4)$$

表わされる。

(c) 行列 (C_{ij}) の階数は s である。

(d) $\theta_1, \theta_2, \cdots\cdots, \theta_s$ は凡べての実数値を，σ は凡ての正数値を取るものとする。

このとき，r 箇 ($r \leqq s$) の一次独立な $\theta_1, \cdots\cdots, \theta_s$ の一次形式

$$\Theta_i = b_{i1}\theta_1 + b_{i2}\theta_2 + \cdots\cdots + b_{is}\theta_s, \quad i=1,2,\cdots\cdots, r \qquad (5)$$

を考へて，これに対して特定の値 Θ_i^0, $i=1,2,\cdots\cdots,r$ を指定する假説

$$H_0 : \Theta_1 = \Theta_1^0, \ \Theta_2 = \Theta_2^0, \cdots\cdots, \Theta_r = \Theta_r^0 \qquad (6)$$

を一次假説 (Linear Hypothesis) と云ふ。

この一次假説の一般性を示す為に，幾つかの例を述べよう。[2]

例 1. $s=1$ とすれば，(4) 式は

$$\xi_i = \theta_1, \quad i=1,2,\cdots\cdots,N$$

であるから，(6) の假説 H_0 は

$$\theta_1 = \theta_1^0$$

となる。　$x_1, x_2, \cdots\cdots, x_N$ はある一つの正規母集團 $N(\theta_1, \sigma^2)$ から抽出された大さ N の任意標本（Random Sample）と考へられるから，H_0 は所謂 Student 假說である。

例 2.　$s = 2$ として，(4) 式を

$$\xi_1 = \xi_2 = \cdots\cdots = \xi_r = \theta_1$$

$$\xi_{r+1} = \xi_{r+2} = \cdots\cdots = \xi_N = \theta_2$$

として，假說 H_0 としては

$$\Theta_1 = \theta_2 - \theta_1 = 0$$

を取る。　このときは (1) の N 箇の變量は，二つの正規母集團

$$\pi_1 = N(\theta_1, \sigma^2), \quad \pi_2 = N(\theta_2, \sigma^2)$$

から抽出された二組の任意標本

$$x_1, x_2, \cdots\cdots, x_r$$

$$x_{r+1}, x_{r+2}, \cdots\cdots, x_N$$

とから成るものと考へられるから，假說 H_0 は π_1, π_2 の平均値が相等しいと云ふ一般化された Student 假說である。

例 3.　$s > 2$ として，$N = n_1 + n_2 + \cdots\cdots + n_s$，$(n_i > 1)$ とする。

$$\xi_1 = \xi_2 = \cdots\cdots = \xi_{n_1} = \theta_1$$

$$\xi_{n_1+1} = \xi_{n_1+2} = \cdots\cdots = \xi_{n_1+n_2} = \theta_2$$

- -

$$\xi_{n_1+\cdots+n_{s-1}+1} = \cdots\cdots = \xi_{n_1+\cdots\cdots+n_{s-1}+n_s} = \theta_s$$

として，假說 H_0 としては

$$Ⓗ_1 = \theta_1 - \theta_S = 0, \cdots\cdots, Ⓗ_{S-1} = \theta_{S-1} - \theta_S = 0$$

を取るならば，共通毋分散 σ^2 の S 箇の正規毋集團 $\pi_1, \pi_2 \cdots\cdots, \pi_S$ の毋平均が等しいと云ふ假説になる。

例 4.　　$S=2$ として，(4) としては

$$\xi_i = \theta_1 + \theta_2 y_i, \qquad i = 1, 2, \cdots\cdots, N$$

をとり，但し y_i は既知とする。こゝで次の三つの假説を考へる。

$$H_1 : \qquad \theta_1 = \theta_1^0$$

$$H_2 : \qquad \theta_2 = \theta_2^0$$

$$H_3 : \qquad \theta_1 + \theta_2 Y = X$$

勿論 θ_1^0, θ_2^0, X 及び Y は既知定数とする。

二つの特性 x, y を有する箇体から成る毋集團 π に於て，y の各値に対する x は，その平均

$$\xi_y = \theta_1 + \theta_2 y$$

の周りに標準偏差 σ の正規分布をして，σ は y と無関係であると假定すれば，π は部分毋集團 π_y の集合と考へられる。さうすれば x_i は部分毋集團 π_{y_i} から抽出された任意標本である。このとき方程式

$$\xi_y = \theta_1 + \theta_2 y$$

を x の y に関する回帰方程式と云ふ。

假説 H_1 は回帰方程式の定数項がある指定された値を取ると云ふことであり，假説 H_2 は x の y に関する回帰係数が指定された値を取ると云ふことである。假説 H_3 は X, Y を既知とした場合に θ_1，θ_2 の間に

$$\theta_1 + \theta_2 Y = X$$

なる関係が成立つと云ふことであつて，これは H. Schultz[3] や K. Iwaszkiewicz[4] が取扱つた場合である。

例 5.　　$s = 2r$ として，$N = n_1 + n_2 + \cdots + n_r$ $(r > 1)$ とする。今 (4) 式として

$$\xi_1 = \theta_1 + \theta_2 y_1,\ \xi_2 = \theta_1 + \theta_2 y_2,\ \cdots,\ \xi_{n_1} = \theta_1 + \theta_2 y_{n_1}$$

$$\xi_{n_1+1} = \theta_3 + \theta_4 y_{n_1+1},\ \cdots\cdots\cdots \qquad \xi_{n_1+n_2} = \theta_3 + \theta_4 y_{n_1+n_2}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\xi_{n_1+\cdots+n_{r-1}+1} = \theta_{2r-1} + \theta_{2r} y_{n_1+\cdots+n_{r-1}+1},\ \cdots\cdots,\ \xi_{n_1+\cdots+n_{r-1}+n_r} = \theta_{2r-1} + \theta_{2r} y_{n_1+\cdots+n_{r-1}+n_r}$$

として，次の二つの假說を考へる。

$$H_1 : \quad \Theta_k = \theta_{2k} - \theta_{2r} = 0. \qquad k = 1, 2, \cdots, r-1$$

$$H_2 : \begin{cases} \Theta_{2k-1} = \theta_{2k-1} - \theta_{2r-1} = 0 \\ \Theta_{2k} = \theta_{2k} - \theta_{2r} = 0 \end{cases} \qquad k = 1, 2, \cdots, r-1$$

これを統計的な言葉で述べれば次の如くなる。二つの特性 x, y を有する箇体より成る母集團 $\pi_1, \pi_2, \cdots\cdots, \pi_r$ に於て，x の y に關する回歸は Linear であることが分つて居り，更に，すべての母集團 π_i で y を指定したときは，x は分散 σ^2 の正規分布をなし，σ は y と無関係であるとする。この時 H_1 はすべての母集團に於ける回歸係數が相等しいことを云ひ，H_2 は更にその上に定数項迄相等しいことを云ふのである。

例 6.　$s=(n-1)+(k-1)+1=n+k-1$ として，(4)としては

$$\xi_{ij}=\theta_{..}+\theta_{i.}+\theta_{.j} \qquad i=1,2,\cdots,k\,;\,j=1,2,\cdots,n$$

$$\sum_i \theta_{i.}=\sum_j \theta_{.j}=0$$

これは所謂"乱塊法"（Randomized Block Experiment）であつて次の如く解釈する。一つの圃場を n 箇の小区劃に分って，これを B_1, B_2, ----, B_n とし，これに対して k 種類の処理法 T_1, T_2, ------, T_k を施し，T_i を B_j に施したときの収量を x_{ij} で表はす。

	B_1	B_2	----------	B_n
T_1	x_{11}	x_{12}	----------	x_{1n}
T_2	x_{21}	x_{22}	----------	x_{2n}
⋮	------	------	------	------
T_k	x_{k1}	x_{k2}	----------	x_{kn}

今此の圃場全体についての真の収量を $\theta_{..}$，処理法 T_i による効果 $\theta_{i.}$，小区劃 B_j による効果を $\theta_{.j}$ とすれば，一般に

$$x_{ij}=\theta_{..}+\theta_{i.}+\theta_{.j}+e_{ij}$$

と書ける。そうして誤差項 e_{ij} は平均 0 の周りに，圃場全体として共通な標準偏差 σ の正規分布をすると考へられる。この場合 σ は測定精度のようなものであるから，圃場全体を通じて一定となる如く実験を計画するのが当然であらう。

又 T_i による圃場全体の真の収量を $\Theta_{i.}$ とすれば

$$\theta_{..}=\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}\Theta_{i.}$$

$$\theta_{i\cdot} = \Theta_{i\cdot} - \theta_{\cdot\cdot}$$

であるから

$$\sum_{i=1}^{k} \theta_{i\cdot} = 0.$$

よつて今假説として

$$H_0: \quad \theta_{i\cdot} = 0, \qquad i = 1, 2, \cdots\cdots, k$$

を考へれば，これは処理法によつて收量に差異はないと云ふことになる。

問題を理論的に取扱ふ為には，H_0 を（6）の形にしておくよりも，次のようにした方が都合が良い。（5）の r 箇の方程式は一次独立であるから便宜上

$$\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots\cdots & b_{1r} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots\cdots & b_{2r} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{r1} & b_{r2} & \cdots\cdots & b_{rr} \end{vmatrix} \neq 0$$

とする。（5）を $\theta_1, \cdots\cdots, \theta_r$ に関して解いて（4）に代入すれば

$$\xi_i = a_{i1}\Theta_1 + \cdots\cdots + a_{ir}\Theta_r + a_{ir+1}\theta_{r+1} + \cdots\cdots + a_{is}\theta_s \tag{7}$$

となるから，従つて初めから $\Theta_1, \cdots\cdots, \Theta_r, \theta_{r+1}, \cdots\cdots, \theta_s$ を独立な S 箇の未知定数と考へてよい。

扨て，假説 $H_0: \theta_1 = \theta_1^0, \cdots\cdots, \theta_r = \theta_r^0$ に対する尤度比を求めよう。$x_1, \cdots\cdots, x_N$ に対する尤度函数は

$$\left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right)^N e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{N}(x_i - c_{21}\theta_1 - \cdots\cdots - c_{2s}\theta_s)^2}$$

であるから，先づ

(i)　$$S^2 = \sum_{i=1}^{N} (x_i - c_{i1}\theta_1 - \cdots\cdots - c_{is}\theta_s)^2 \tag{8}$$

を $\theta_1, \cdots\cdots, \theta_s$ の函数と考へて，これを最小ならしめる θ_i の値を $\hat{\theta}_i$ とし，その最小値（絶対的）を S_a^2 で表はす。

$$S_r^2 = \sum_{i=1}^{N} (x_i - c_{i1}\theta_1^0 - \cdots\cdots - c_{ir}\theta_r^0 - c_{ir+1}\hat{\theta}_{r+1}^{*} - \cdots\cdots - c_{is}\hat{\theta}_s^{*})^2 \tag{10}$$

又　$S_r^2 = S_a^2 + S_b^2$　とおく。

(iii)　$$L = \frac{S_a^2}{S_r^2} \tag{11}$$

とおくと，假説 H_0 が眞なるときの L の分布は

$$p(L \mid H_0) = \frac{1}{B(\frac{1}{2}f_1, \frac{1}{2}f_2)} L^{\frac{1}{2}f_2 - 1}(1-L)^{\frac{1}{2}f_1 - 1} \tag{12}$$

$$f_1 = r, \qquad f_2 = N - s$$

となる。[5]

一般に $0 \leq L \leq 1$ であるが，若し假説 H_0 が正しいならば $L = 1$ となるであらう。そこで $L < L_\varepsilon$ ならば H_0 は正しくないと考へる。但し L_ε は

$$P\{L < L_\varepsilon \mid \theta_1^0, \cdots, \theta_r^0\} = \int_0^{L_\varepsilon} p(L \mid H_0)\, dL = \varepsilon \tag{13}$$

から計算する。實際の標本から計算された L の値が L_ε より小ならば，假説 H_0 を棄却するのであるが，このとき H_0 が正しいにも拘らず，棄却される確率が ε である。これは第1種の過誤の確率と云はれるものである。このやうな統計的検定の場合には，更に一つの過誤を考慮しなくてはならないのであつて

それは，H_0が眞でなく，何か他の対立假說 H' が眞であるにも拘らず H_0が棄却されないことであつて，これは第２種の過誤と云はれるものである。第２種の過誤の確率は

$$P\left\{L > L_\varepsilon | H'\right\} = \int_{L_\varepsilon}^{1} p(L|H')\,dL$$

であつて，従つて

$$1 - \int_{L_\varepsilon}^{1} p(L|H')\,dL = \int_{c}^{L_\varepsilon} p(L|H')\,dL$$

は H' が眞であるとき H_0 を棄却する確率であつて，H_0 の眞僞を見分ける能力を測ると云ふ意味で E.S.Pearsin 及び J. Neyman に依つて H' に関する"検定力"（Power）と名づけられたものである。この論文ではかゝるテストの検定力を計算して表を作るのである。

II. S_a^2, S_r^2 の性質

(12)式の成立つことは幾何的な考察から簡単に分る(6)のであるが Power を計算する為には，実際用ひる変換をキチンと求めなければならない。

先づ x_1, x_2, -----, x_N の同時分布は

$$p(E|\theta_1, ---, \theta_5) = \left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right)^N e^{-\frac{S^2}{2\sigma^2}} \tag{14}$$

こゝで一次変換

$$y_j = a_{j1}x_1 + a_{j2}x_2 + ---- + a_{jN}x_N, \quad j = 1, 2, ---, N \tag{15}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1N} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2N} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{N1} & a_{N2} & \cdots & a_{NN} \end{vmatrix} \neq 0 \tag{16}$$

を（14）に施せば，$y_1, y_2, \cdots\cdots, y_N$ の同時分布は

$$p(E'|\theta_1, \cdots, \theta_s) = |\Delta|^{-1} \left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right)^N e^{-\frac{S'^2}{2\sigma^2}} \tag{17}$$

となる。但し S'^2 は S^2 に (15) を施したものである。こゝで若し

$$\mathcal{E}(y_j) = \eta_j, \quad j = 1, 2, \cdots\cdots, N \tag{18}$$

$$\mathcal{E}(y_j - \eta_j)^2 = \sigma^2 \tag{19}$$

$$\mathcal{E}\{(y_j - \eta_j)(y_k - \eta_k)\} = 0, \quad j \neq k \tag{20}$$

となるように y_j を選んだとすれば，(15) と (18) から

$$\eta_j = \sum_{\nu=1}^{N} a_{j\nu} \mathcal{E}(x_\nu) \tag{21}$$

従つて (19) より

$$\sigma^2 = \mathcal{E}(y_j - \eta_j)^2 = \sum_{\mu,\nu=1}^{N} a_{j\mu} a_{j\nu} \mathcal{E}\{(x_\mu - \mathcal{E}(x_\mu))(x_\nu - \mathcal{E}(x_\nu))\}$$

$$= \sigma^2 \sum_{\mu=1}^{N} a_{j\mu}^2$$

$$\sum_{\mu=1}^{N} a_{j\mu}^2 = 1, \quad j = 1, 2, \cdots\cdots, N \tag{22}$$

又 (20) より

$$\sum_{\mu=1}^{N} a_{j\mu} a_{k\mu} = 0, \qquad j \neq k \tag{23}$$

即ち行列 (a_{ij}) は直交行列でなければならないから

$$x_j = a_{1j} y_1 + a_{2j} y_2 + \cdots\cdots + a_{Nj} y_N, \quad j = 1, 2, \cdots, N \tag{24}$$

よつて,

$$\sum_{j=1}^{N} (x_j - \mathcal{E}(x_j))^2 = \sum_{j=1}^{N} \left(\sum_{\nu=1}^{N} a_{\nu j} (y_\nu - \eta_\nu) \right)^2$$

$$= \sum_{\mu,\nu} \sum_{j} a_{\mu j} a_{\nu j} (y_\mu - \eta_\mu)(y_\nu - \eta_\nu)$$

$$= \sum_{j=1}^{N} (y_j - \eta_j)^2 \tag{25}$$

となるから, $y_1, \cdots\cdots, y_N$ の同時分布は

$$p(E' | \theta_1 \cdots \theta_S) = \left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \right)^N e^{-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{j=1}^{N} (y_j - \eta_j)^2} \tag{17}$$

となる。こゝで特に

$$\eta_1 = \eta_2 = \cdots\cdots = \eta_{N-S} = 0 \tag{26}$$

$$\left.\begin{aligned} \eta_{N-S+1} &= B_{11} \theta_1 \\ \eta_{N-S+2} &= B_{21} \theta_1 + B_{22} \theta_2 \qquad , B_{tt} \neq 0 \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \eta_N &= B_{S1} \theta_1 + B_{S2} \theta_2 + \cdots\cdots + B_{SS} \theta_S , \end{aligned}\right\} \tag{27}$$

なるように (a_{ij}) を定めたとすれば,

$$\sum_{j=1}^{N} (y_j - \eta_j)^2 = \sum_{i=1}^{N-S} y_i^2 + \sum_{j=1}^{s} (y_{N-S+j} - B_{j1} \theta_1 - \cdots\cdots - B_{jj} \theta_j)^2 \tag{28}$$

と書ける。(26)，(27)を満足するように直交行列 (a_{ij}) を定められることを示さう。先づ

$$y_j = a_{j1}x_1 + a_{j2}x_2 + \cdots\cdots + a_{j,s+j}x_{s+j}, \qquad j = 1, 2, \cdots, N-s \tag{29}$$

とすれば，(26)から次の $s(N-s)$ 箇の條件式

$$\sum_{k=1}^{s+j} a_{jk}c_{ki} = 0, \qquad j = 1, 2, \cdots\cdots, N-s ; \quad i = 1, 2, \cdots\cdots, s \tag{30}$$

を得，又直交條件及び規準化條件から次の $\frac{1}{2}(N-s)(N-s-1)$ 箇の方程式

$$\sum_{k=1}^{s+m} a_{jk}a_{mk} = 0, \qquad m = 1, 2, \cdots\cdots, j-1 ; \quad j = 2, 3, \cdots, N-s \tag{31}$$

及び $(N-s)$ 箇の方程式

$$\sum_{k=1}^{s+j} a_{jk}^2 = 1, \qquad j = 1, 2, \cdots\cdots, N-s \tag{32}$$

が得られる。(29) の a_{ij} の数は $\frac{1}{2}(N-s)(N+s+1)$ で，それに対する方程式の数は

$$s(N-s) + \frac{1}{2}(N-s)(N-s-1) + (N-s) = \frac{1}{2}(N-s)(N+s+1)$$

であるから，a_{ij} は定め得る。
今 $j = 1$ とすれば，(30)式は

$$\left.\begin{aligned}
a_{11}c_{11} + a_{12}c_{21} + \cdots\cdots + a_{1s}c_{s1} &= -a_{1s+1}c_{s+1\,1} \\
a_{11}c_{12} + a_{12}c_{22} + \cdots\cdots + a_{2s}c_{s2} &= -a_{1s+1}c_{s+1\,2} \\
&\cdots\cdots\cdots \\
a_{11}c_{1s} + a_{12}c_{2s} + \cdots\cdots + a_{1s}c_{ss} &= -a_{1s+1}c_{s+1\,s}
\end{aligned}\right\} \tag{33}$$

となるから，これは $a_{11}, a_{12}, \cdots\cdots, a_{1s}$ に関して解いて

$$a_{1i} = a_{1,s+1}u_i, \qquad i = 1, 2, \cdots\cdots, s \tag{34}$$

これは（32）の $j=1$ の式に代入して

$$a_{1,s+1}^{2}\left(1+\sum_{i=1}^{s}u_i^2\right)=1 \tag{35}$$

よって

$$a_{1,s+1}=\pm\frac{1}{\sqrt{1+\sum_{i=1}^{s}u_i^2}} \tag{36}$$

(34) と (36) から a_{1j}，$j=1,2,\cdots\cdots,s+1$ は符号を度外視すれば一意的に定まることが分る。但しこゝで行列（c_{ij}）の階数が s なることから

$$A=\begin{vmatrix} c_{11} & c_{21} & \cdots\cdots & c_{s1} \\ c_{12} & c_{22} & \cdots\cdots & c_{s2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{1s} & c_{2s} & \cdots\cdots & c_{ss} \end{vmatrix}\neq 0 \tag{37}$$

としておく。次に $a_{21}, a_{22}, \cdots\cdots, a_{2s+2}$ を定める為には行列式

$$A_1=\begin{vmatrix} c_{11} & c_{21} & \cdots\cdots & c_{s1} & c_{s+1\,1} \\ c_{12} & c_{22} & \cdots\cdots & c_{s2} & c_{s+1\,2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{1s} & c_{2s} & \cdots\cdots & c_{ss} & c_{s+1\,s} \\ a_{11} & a_{12} & \cdots\cdots & a_{1s} & a_{1\,s+1} \end{vmatrix}=A\cdot a_{1s+1}^{-1}\neq 0 \tag{38}$$

であるからよい。一般に同様な論法によって

$$A_j=\begin{vmatrix} c_{11} & c_{21} & \cdots & c_{s+1\,1} & \cdots & c_{s+j\,1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{1s} & c_{2s} & \cdots & c_{s+1\,s} & \cdots & c_{s+j\,s} \\ a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1s+1} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{js+1} & \cdots & a_{js+j} \end{vmatrix}=A_{j-1}\cdot a_{j,s+j}^{-1}=A\cdot\prod_{i=1}^{j}a_{i,s+i}^{-1}\neq 0 \tag{39}$$

であるから，上のようにして順々に

$$a_{11}\ a_{12}\ \text{-----}\ a_{1s}\ a_{1s+1}$$
$$a_{21}\ a_{22}\ \text{----}\ a_{2s}\ a_{2s+1}\ a_{2s+2}$$
$$\text{------------------}$$
$$a_{m1}\ a_{m2}\ \text{----}\ a_{ms}\ a_{ms+1}\ a_{ms+2}\ \text{-----}\ a_{ms+m}$$

迄定められたとすれば

$$A_m = A\prod_{i=1}^{m} a_{i,s+i}^{-1} \neq 0$$

であるから

$$a_{m+1,1}\ a_{m+1,2},\ \text{---}\ a_{m+1,s}\ a_{m+1,s+1}\ \text{---}\ a_{m+1,s+m+1}$$

が符号を度外視して一意的に定められるのである。

このように定められた a_{jk} に対しては，確かに (30) より

$$\mathcal{E}(y_j) = \sum_{k=1}^{s+j} a_{jk}\mathcal{E}(x_k) = \sum_{k=1}^{s+j} a_{jk}\sum_{i=1}^{s} c_{ki}\theta_i = \sum_{i=1}^{s}\theta_i\sum_{k=1}^{s+j} a_{jk}c_{ki} = 0$$
$$j = 1, 2, \text{---}, N-s$$

又，(31)，(32) より

$$\mathcal{E}(y_j^2) = \sigma^2,\quad \mathcal{E}(y_j\, y_k) = 0,\ j \neq k.$$

次に $j = N-s+1,\ N-s+2,\ \text{----},\ N$ に対して

$$y_j = a_{j1}x_1 + a_{j2}x_2 + \text{-----} + a_{jN}x_N \tag{33}$$

として，これが (27) 及び直交行列の條件を満たすように a_{jk} を定めよう。その為には，先づ直交條件より

$$\sum_{k=1}^{N} a_{jk}a_{mk} = 0,\quad m = 1, 2, \text{---}, j-1;\ j = N-S+1, \text{---}, N \tag{34}$$

$$\sum_{k=1}^{N} a_{jk}^2 = 1,\quad j = N-s+1,\ N-s+2, \text{----}, N \tag{35}$$

又（27）より

$$\mathcal{E}(y_j)=\sum_{k=1}^{N} a_{jk}\,\mathcal{E}(x_k)=\sum_{i=1}^{S}\theta_i\sum_{k=1}^{N} a_{jk}c_{ki}\equiv\sum_{k=1}^{j-(N-S)} B_{j-(N-S),k}\,\theta_k \tag{36}$$

であるから，

$$\left.\begin{array}{l}\sum_{k=1}^{N} a_{jk}c_{k1}=B_{j-(N-S)\cdot 1}\\ \text{-----------}\\ \sum_{k=1}^{N} a_{jk}c_{k,j-(N-S)}=B_{j-(N-S),j-(N-S)}\\ \sum_{k=1}^{N} a_{jk}c_{ki}=0,\quad i>j-(N-S)\end{array}\right\} \tag{37}$$

先づ $j=N-s+1$ とすれば，$a_{N-s+1,j}$，$j=1,2,\cdots,N$ に対して次の聯立一次方程式 C_1 を得る。

$$C_1:\left.\begin{array}{l}a_{N-s+1,1}c_{12}+a_{N-s+1,2}c_{22}+\cdots+a_{N-s+1,N}c_{N2}=0\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\\ a_{N-s+1,1}c_{1s}+a_{N-s+1,2}c_{2s}+\cdots+a_{N-s+1,N}c_{Ns}=0\\ a_{N-s+1,1}a_{11}+a_{N-s+1,2}a_{12}+\cdots+a_{N-s+1,N}a_{1N}=0\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\\ a_{N-s+1,1}a_{N-s,1}+a_{N-s+1,2}a_{N-s,2}+\cdots+a_{N-s+1,N}a_{N-s,N}=0\end{array}\right\} \tag{38}$$

この聯立方程式の係数行列は

$$\left\{\begin{array}{llll}c_{12} & c_{22} & \text{-------} & c_{N2}\\ \text{-------} & & & \\ c_{1s} & c_{2s} & \text{-------} & c_{Ns}\\ a_{11} & a_{12} & \text{-------} & 0\\ \text{-------} & & & \\ a_{N-s} & a_{N-s,2} & \text{-------} & a_{N-s,N}\end{array}\right\} \tag{39}$$

若しこの行列の（$N-1$）次の小行列式がすべて0であるとすれば，それらは A_{N-s} の第一行の要素の餘因子と符号を度外視し

て一致するから，$A_{N-S}=0$となって矛盾が起る。故に$(N-1)$次の小行列式の中には少くとも一つ0でないものがある。よって，例へば(38)を$a_{N-S+1,k}$，$k\neq t$に関して解いて

$$a_{N-S+1,k}=u_k' \, a_{N-S+1,t} \qquad k\neq t \tag{40}$$

これを(35)に代入して

$$a^2_{N-S+1,t}\sum_{k=1}^{N}u_k^2=1 \qquad 但し \quad u_t\equiv 1$$

$$a_{N-S+1,t}=\frac{1}{\pm\sqrt{\sum_{k=1}^{N}u_k^2}} \tag{41}$$

となって，$a_{N-S+1,j}$，$j=1,2,---,N$. は符号を度外視して一意的に定まる。こゝで大切なことは

$$B_{11}=\sum_{k=1}^{N}a_{N-S+1,k}C_{k1}\neq 0 \tag{42}$$

なることである。何者，若し$B_{11}=0$とすれば，これと(38)と合せると$a_{N-S+1,j}$がすべて0ではない為には$A_{N-S}\neq 0$となるべきであるから。

今
$$a_{N-S+1,k}=Z_k, \qquad k=1,2,----,N$$

とおけば，規準化條件は

$$\sum_{k=1}^{N}a_{N-S+1,k}Z_k=1 \tag{43}$$

とかけるから，C_1と合せて

$$\bar{A}_{N-S+1}=\begin{vmatrix} C_{12} & C_{22} & ------- & C_{N2} \\ C_{13} & C_{23} & ------- & C_{N3} \\ --- & --- & ------- & --- \\ a_{N-S+1,1} & a_{N-S+1,2} & ------ & a_{N-S+1,N} \end{vmatrix}\neq 0 \tag{44}$$

である。　次に $a_{N-S+2,k}$, $k=1,2,\cdots,N$ が定まる。それは

$$\left.\begin{aligned}
&a_{N-S+2,1}c_{13}+a_{N-S+2,2}c_{23}+\cdots\cdots+a_{N-S+2,N}c_{N3}=0\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&a_{N-S+2,1}c_{1S}+a_{N-S+2,2}c_{2S}+\cdots\cdots+a_{N-S+2,N}c_{NS}=0\\
&a_{N-S+2,1}a_{11}+a_{N-S+2,2}a_{12}+\cdots\cdots+a_{N-S+2,N}a_{1S+1}=0\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&a_{N-S+2,1}a_{N-S+1,1}+\cdots\cdots\cdots\cdots+a_{N-S+2,N}a_{N-S+1,N}=0
\end{aligned}\right\}\tag{45}$$

(44)から前の論法と全く同様にして，(45)の係数行列の$(N-1)$次の小行列式の内には少くとも一つ0でないものがあることが分るからである。　このようにして順々に係数を定めて行くといつも

$$B_{ii}=\sum_{k=1}^{N}a_{N-S+i,k}\,c_{ki}\neq 0\tag{46}$$

なることが云へる。又逆にこのように定められた y_j に対しては確かに

$$\mathcal{E}(y_{N-S+t})=\eta_{N-S+t}=B_{t1}\theta_1+B_{t2}\theta_2+\cdots+B_{tt}\theta_t$$

$$\text{但し}\quad B_{tm}=\sum_{k=1}^{N}a_{N-S+t,k}\,c_{k\cdot m}$$

又 $\quad \mathcal{E}\{(y_j-\eta_j)(y_k-\eta_k)\}=0,\quad \mathcal{E}(y_j-\eta_j)^2=\sigma^2$

よって

$$S'^2=\sum_{i=1}^{N-s}y_i^2+\sum_{i=N-S+1}^{N}\Big(y_i-\sum_{k=1}^{i-N+S}B_{i-N+S,k}\,\theta_k\Big)^2\tag{47}$$

となる。よって

$$S_0^2=\sum_{i=1}^{N-s}y_i^2\tag{48}$$

假說 H_0 : $\theta_1=\theta_1^0,\cdots,\theta_r=\theta_r^0$ の下に於ける S'^2 の最小値

を考へるには，（47）の右辺の第二項を書き直して

$$\sum_{i=N-S+1}^{N-S+r}(y_i-\sum_{k=1}^{\varepsilon-N+S}B_{i-N+S,k}\,\theta_k^0)^2$$
$$+\sum_{i=N-S+r+1}^{N}(y_i-\sum_{k=1}^{r}B_{i-N+S,k}\,\theta_k^0-\sum_{k=r+1}^{i-N+S}B_{i-N+S,k}\,\theta_k)^2 \qquad (49)$$

として見れば

$$S_r^2 = S_a^2 + S_b^2$$
$$S_b^2 = \sum_{i=N-S+1}^{N-S+r}(y_i-\sum_{k=1}^{i-N+S}B_{i-N+S,k}\,\theta_k^0)^2 \qquad (50)$$

よつて，S_a^2/σ^2 は自由度 $f_2=N-S$ の χ^2 分布に従ひ，若し H_0 が眞ならば，S_b^2/σ^2 は自由度 $f_1=r$ の χ^2 分布に従つて，互に独立である。

H_0 が眞でなければ，S_b^2 の分布は χ^2 にはならぬ。

$$Z_i = y_{N-S+i} - \sum_{k=1}^{i} B_{ik}\,\theta_k^0 \qquad (51)$$

とすれば

$$\mathcal{E}(Z_i) = \sum_{k=1}^{i} B_{ik}(\theta_k-\theta_k^0) = d_i \qquad (52)$$

とおくと，

$$S_b^2 = \sum_{i=1}^{r} Z_i^2 \qquad (53)$$

は所謂 "*non-central square*" の和であつて，その分布は

$$\lambda = \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{r} d_i^2 \qquad (54)$$

のみに関係する。それは S_b^2 の特性函数を計算すると

$$\varphi(t)=E(e^{itS_b^2})=\left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right)^r\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}}_{r}e^{it\Sigma z_i^2-\frac{1}{2\sigma^2}\Sigma(Z_i-d_i)^2}dZ\cdots dZ_r \tag{55}$$

$$-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{r}\left\{(1-2it)Z_i^2-2d_iZ_i+d_i^2\right\}$$

$$=-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{r}\left\{(1-2it)\left(Z_i-\frac{d_i}{1-2it}\right)^2+d_i^2-\frac{d_i^2}{1-2it}\right\}$$

$$=\frac{2it}{2\sigma^2(1-2it)}\sum_{i=1}^{r}d_i^2-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_i\left[\sqrt{1-2it}\left(Z_i-\frac{d_i}{1-2it}\right)\right]^2.$$

より

$$\varphi(t)=(1-2it)^{-\frac{r}{2}}\cdot e^{\frac{2it}{1-2it}\lambda} \tag{56}$$

であるから。

$\sum_{i=1}^{r}d_i^2$ の計算法

$$S_b^2=\sum_{i=1}^{r}\left(y_{N-s+i}-\sum_{k=1}^{i}B_{ik}\theta_k^\circ\right)^2$$

であるから，y_{N-s+i} にその平均値 $\sum_{k=1}^{i}B_{i,k}\theta_k$ を代入すれば，

$\sum d_i^2$ が求められることに着目する。

$$\sum_{k=1}^{i}B_{ik}\theta_k=\sum_{k=1}^{i}\sum_{h=1}^{N}a_{N-s+i,k}C_{hk}\theta_k$$

$$=\sum_{h=1}^{N}a_{N-s+i,h}\sum_{k=1}^{i}C_{hk}\theta_k \tag{57}$$

であつて，$k>i$ のときは

$$\sum_{h=1}^{N}a_{N-s+i,h}\sum_{k=i+1}^{r}C_{hk}\theta_k\equiv 0 \tag{58}$$

これを(57)に加えて

$$\sum_{k=1}^{i} B_{ik}\theta_k = \sum_{h=1}^{N} a_{N-s+i,h} \sum_{k=1}^{r} C_{hk}\theta_k \quad i=1,2,\cdots,s \tag{59}$$

よつて S_b^2 で y_{N-s+i} を $\sum_{k=1}^{i} B_{ik}\theta_k$ でおきかへることは，$x_h, h=1,2,\cdots,N$ を

$$\sum_{k=1}^{r} C_{hk}\theta_k, \qquad h=1,2,\cdots,N$$

でおきかへればよい。

計算例 I 乱塊法

$$\xi_{ij} = \theta_{..} + \theta_{i.} + \theta_{.j} \tag{60}$$

として假說 H_0 としては $\theta_{i.}=0$，$(i=1,2,\cdots,k)$，即ち処理による差異はないとする。

$$S^2 = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{k}(x_{ij}-\theta_{..}-\theta_{i.}-\theta_{.j})^2 \tag{61}$$

S^2 を最小（絶対的！）にするパラメーターの値は

$$\hat{\theta}_{..}=x_{..},\ \hat{\theta}_{i.}=x_{i.}-x_{..},\ \hat{\theta}_{.j}=x_{.j}-x_{..} \tag{62}$$

よつて

$$S_a^2 = \sum_j\sum_i(x_{ij}-x_{i.}-x_{.j}+x_{..})^2 \tag{63}$$

假說 H_0 の下で S^2 を最小（相対的！）にするパラメーターの値は

$$\hat{\theta}^*_{..} = x_{..},\quad \hat{\theta}^*_{.j} = x_{.j}-x_{..} \tag{64}$$

よつて

$$S_r^2 = \sum_j \sum_i (x_{ij} - x_{.j})^2 = \sum_j \sum_i (x_{ij} - x_{i.} - x_{.j} + x_{..})^2 + \sum_i n(x_{i.} - x_{..})^2$$

$$= \quad S_a^2 \qquad\qquad + \quad S_b^2 \tag{65}$$

H_0 のある対立假説 H' の下で λ を求めるには，S_b^2 で x_{ij} を $\theta_{i.}$ でおきかへればよいから，従つて $x_{..}$ を 0 でおきかへる。

$$\lambda = \frac{n}{2\sigma^2} \sum_i \theta_{i.}^2 \tag{66}$$

後で表の計算のためには

$$\phi = \sqrt{\frac{2\lambda}{k}} = \sqrt{\frac{\sum_i \theta_{i.}^2}{k}} \Bigg/ \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \tag{67}$$

を用ひた方が便利である.

III. S_b^2 の分布

$S_b^2 = \sum_{i=1}^{r} z_i^2$ で，z_i は平均値 d_i の周りに，標準偏差 σ で正規分布をする変数であるから，これは χ^2 分布ではない。今この分布を χ'^2 分布と名づけてこれを求めよう。

$$p(z_1, z_2, \cdots, z_r) = \frac{e^{-\lambda}}{(\sigma\sqrt{2\pi})^r} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}\left(\sum_{k=1}^{r} z_k^2 - 2\sum_{k=1}^{r} d_k z_k\right)\right] \tag{68}$$

直交変換によつて，$z_1, \cdots, z_r$ を $w_1, \cdots\cdots, w_r$ に変換して

$$w_1 = \left(\sum_{k=1}^{r} d_k^2\right)^{-\frac{1}{2}} \sum_{k=1}^{r} d_k z_k \tag{69}$$

とすれば

$$p(w_1,\cdots,w_r)=\frac{e^{-\lambda}}{(\sigma\sqrt{2\pi})^r}\exp.\left[-\frac{1}{2\sigma^2}\left(\sum_{k=1}^{r}w_k^2-2\sigma w_1\sqrt{2\lambda}\right)\right] \quad (70)$$

こゝで

$$\chi'^2=\frac{1}{\sigma^2}\sum_{k=1}^{r}w_k^2,\quad \chi^2=\frac{1}{\sigma^2}\sum_{k=2}^{r}w_k^2 \quad (71)$$

とおくと，χ^2 と w_1 との同時分布は

$$\underset{d\chi^2 dw_1}{\overset{\wedge}{p(\chi^2,w_1)}}=\frac{e^{-\lambda}}{(\sigma\sqrt{2\pi})^r}\exp.\left[-\frac{1}{2\sigma^2}(\sigma^2\chi^2+w_1^2-2\sigma\sqrt{2\lambda}\cdot w_1)\right]\underset{\sum_{k=2}^{r}w_k^2=\sigma^2\chi^2}{\overset{dw_1\cdot d}{\wedge}}\int\cdots\int dw_2\cdots dw_k$$

$$=\frac{e^{-\lambda}}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\frac{1}{2}r-\frac{1}{2})2^{\frac{1}{2}r}\cdot\sigma}(\chi^2)^{\frac{1}{2}(r-3)}\exp.\left[-\frac{1}{2\sigma^2}(\sigma^2\chi^2+w_1^2-2\sigma\sqrt{2\lambda}\cdot w_1)\right]dw_1 d\chi^2 \quad (72)$$

$$\chi'^2=\chi^2+\frac{w_1^2}{\sigma^2} \quad (72)$$

であるから

$$\chi^2=\chi'^2\cos^2\theta,\quad \frac{w_1}{\sigma}=\chi'\sin\theta\quad ,-\frac{\pi}{2}\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{2} \quad (73)$$

とおくと

$$p(\chi'^2,\theta)=\frac{e^{-\lambda}}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\frac{1}{2}r-\frac{1}{2})2^{\frac{1}{2}r}}(\chi'^2)^{\frac{1}{2}(r-3)}\cos^{r-2}\theta\exp\left[-\frac{1}{2}(\chi'^2-2\sqrt{2\lambda\chi'^2}\cdot\sin\theta)\right] \quad (74)$$

ところで

$$\int_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi}\cos^{r-2}\theta\cdot e^{\sqrt{2\lambda\chi'^2}\cdot\sin\theta}d\theta=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(2\lambda\chi'^2)^m}{(2m)!}\int_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi}\cos^{r-2}\theta\sin^{2m}\theta d\theta$$

$$=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(2\lambda\chi'^2)^m}{(2m)!}B\left(\frac{1}{2}r-\frac{1}{2},m+\frac{1}{2}\right)$$

$$= \sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{1}{2}r-\frac{1}{2}\right)\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!\,\Gamma\left(\frac{r}{2}+m\right)}\left(\frac{1}{2}\lambda\chi'^2\right)^m \tag{75}$$

$$(2m)! = \frac{1}{\sqrt{\pi}}2^{2m}m!\,\Gamma\left(m+\frac{1}{2}\right)$$

よつて

$$p(\chi'^2) = \frac{1}{2}e^{-\lambda}\left(\frac{1}{2}\chi'^2\right)^{\frac{1}{2}r-1}e^{-\frac{1}{2}\chi'^2}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{1}{2}\lambda\chi'^2\right)^m}{m!\,\Gamma\left(\frac{1}{2}r+m\right)} \tag{76}$$

若しも $\lambda=0$ ならば，これは χ^2 分布

$$p(\chi^2) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\chi^2\right)^{\frac{1}{2}r-1}e^{-\frac{1}{2}\chi^2}$$

となる。

IV. χ'^2 分布の性質と変動係数 (Coefficient of variation)の平方の分布

(A) χ'^2 分布の加法性

$$\chi_1'^2 = 2y_1, \quad \chi_2'^2 = 2y_2 \tag{77}$$

を夫々自由度 f_1, f_2 の non-central square の和とし，夫々の λ を λ_1, λ_2 とする。若しこれらが互に独立ならば，y_1, y_2 の同時分布は

$$p(y_1,y_2)=\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{\lambda_1^i\lambda_2^j e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}{j!\;i!}\;\frac{y_1^{\frac{1}{2}f_1+i-1}\,y_2^{\frac{1}{2}f_2+j-1}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}f_1+i\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}f_2+j\right)}e^{-(y_1+y_2)} \tag{78}$$

こゝで

$$w = y_1+y_2 = \frac{1}{2}\left(\chi_1'^2+\chi_2'^2\right) \tag{79}$$

として，変換

$$y_1 = y_1, \quad y_2 = w - y_1 \tag{80}$$

を施して，y_1に関して0から∞まで積分すれば

$$p(w) = \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{\infty} \frac{\lambda_1^i \lambda_2^j e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}{j!\ i!} \frac{w^{\frac{1}{2}(f_1+f_2)+i+j-1}}{\Gamma(\frac{1}{2}(f_1+f_2)+i+j)} \cdot e^{-w} \tag{81}$$

こゝで

$$\frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)} w^{\frac{1}{2}(f_1+f_2)+m-1}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}(f_1+f_2)+m\right)}$$

の係数は

$$\sum_{i+j=m} \frac{\lambda_1^i \lambda_2^j}{i!j!} = \frac{(\lambda_1+\lambda_2)^m}{m!}$$

であるから

$$p(w) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\lambda_1+\lambda_2)^m e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}{m!\ \Gamma(\frac{1}{2}(f_1+f_2)+m)} w^{\frac{1}{2}(f_1+f_2)+m-1} e^{-w} \tag{82}$$

となつて，自由度 f_1+f_2，$\lambda=\lambda_1+\lambda_2$ なる χ'^2分布となる。

（B）二つの互に独立なχ'^2分布の商の分布

$$u = \frac{\chi_1'^2}{\chi_2'^2} \text{。} \tag{83}$$

の分布は

$$p(u) = \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{\infty} \frac{\lambda_1^i \lambda_2^j e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}{i!j!\ B(\frac{1}{2}f_1+i, \frac{1}{2}f_2+j)} \left(\frac{u}{1+u}\right)^{\frac{1}{2}f_1+i-1} \left(\frac{1}{1+u}\right)^{\frac{1}{2}f_2+j+1} \tag{84}$$

(C) 変動係数の平方 v^2 の exact distribution.

N 箇の独立な変量 $x_1, x_2, \cdots, x_N$ は夫々分布

$$p(x_i) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x_i-\xi)^2}, \quad i=1,2,\cdots,N$$

に従ふとき，

$$v^2 = \frac{\sum_{i=1}^{N}(x_i - x_.)^2}{N x_.^2} \quad (\text{Coeff. of Variation の平方}) \tag{85}$$

の exact な分布を求めること。

分子は $f_1 = N-1$，$\lambda_1 = 0$ であるから

$$\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{N}(x_i - x_.)^2$$

は自由度 $N-1$ の χ^2 分布に従ふ。

分母は $f_2 = 1$，$\lambda_2 = N\xi^2/2\sigma^2 = N/2V^2$. 但し

$$V = \frac{\sigma}{\xi}$$

は母集団の Coeff. of Variation である。よつて分母は自由度 1，$\lambda_2 = N/2V^2$ なる χ'^2 分布に従ふ。よつて (84) によつて

$$p(v^2) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\lambda_2^j e^{-\lambda_2}}{j!\,B\left(\frac{1}{2}(N-1), j+\frac{1}{2}\right)} \left(\frac{v^2}{1+v^2}\right)^{\frac{1}{2}N-\frac{3}{2}} \left(\frac{1}{1+v^2}\right)^{j+\frac{3}{2}} \tag{86}$$

となる。[7]

（D）変量 x が group に分割されておて，第 j 番目の group の第 i 番目の観測値を x_{ij} ; $i=1,2,\cdots,n_j$, $j=1,2,\cdots,k$ とし，これは

$$p(x_{ij})=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\,e^{-\frac{1}{2\sigma}(x_{ij}-\xi_{j.})^2} \qquad (87)$$

$$n_1+n_2+\cdots\cdots+n_k=N$$

に従ふものとすれば，この観測値全体の変動係数は

$$v'^2=\frac{1}{N x_{.j}^2}\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{n_j}(x_{ij}-x_{..})^2$$

$$=\frac{1}{N x_{..}^2}\sum_{j=1}^{k}n_j(x_{.j}-x_{..})^2+\frac{1}{N x_{..}^2}\sum_{j=1}\sum_{i=1}(x_{ij}-x_{.j})^2$$

$$=\quad v_1^2 \qquad\qquad + \quad v_2^2 \qquad (88)$$

と分けられて，v_1 は group の平均の変動に基因する変動－群間変動（Between group variation）の変動係数推定値であり，v_2 は群内変動（Within group variation）の変動係数の推定値である。

これに対応する母集団の変動係数は

$$V'^2=\frac{\sigma'^2}{\xi^2}=\frac{1}{N\xi^2}\sum_{j=1}^{k}n_j\delta_j^2+\frac{\sigma^2}{\xi^2}$$

$$=\quad V_1^2 \qquad + \; V_2^2 \qquad (89)$$

但し $\quad \bar{\xi}=\frac{1}{N}(n_1\xi_1+n_2\xi_2+\cdots+n_k\xi_k)$

$$\delta_j=\xi_j-\bar{\xi},\quad j=1,2,\cdots,k$$

若しも δ_j の凡ては 0 でないならば，$\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{n_j}(x_{ij}-x_{..})^2$ は "non-central squares" の和であるから v'^2 の exact な分布は

$$p(v'^2)=\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{\lambda_1^i\lambda_2^j\, e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}{i!\,j!\,B(\frac{1}{2}f+i,\frac{1}{2}+j)}\left(\frac{v'^2}{1+v'^2}\right)^{\frac{1}{2}f+i-1}\left(\frac{1}{1+v'^2}\right)^{j+\frac{3}{2}} \qquad (90)$$

$$f=N-1,\quad \lambda_1=\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{j=1}^{k}n_j\delta_j^2=\frac{NV_1^2}{2V_2^2},\quad \lambda_2=\frac{N\xi^2}{2\sigma^2}=\frac{N}{2V_2^2} \qquad (91)$$

V. E^2 の分布と確率の積分

$u=S_b^2/S_a^2$ の分布を求めるには，(84) 式で $f_1=r$，$f_2=N-s$，$\lambda_1=\lambda$，$\lambda_2=0$ とおけばよい。

そこで　$E^2=\dfrac{u}{1+u}$ なる変換をして，E^2 の分布は

$$p(E^2\,|\,\lambda)=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{\lambda^i\, e^{-\lambda}}{i!\,B(\frac{1}{2}f_1+i,\frac{1}{2}f_2)}(E^2)^{\frac{1}{2}f_1+i-1}(1-E^2)^{\frac{1}{2}f_2-1} \qquad (92)$$

となる。假説 H_0 の有意水準を求めるには

$$P_1=\int_{E_\varepsilon^2}^{1}p(E^2\,|\,\lambda=0)\,dE^2=0.01 \text{ 又は } 0.05 \qquad (93)$$

から，E_ε^2 を求め，これを $E_{0.01}^2$ 又は $E_{0.05}^2$ と書く。この値は K. Pearson の *Tables of the Incomplete Beta Function* (1934) から *Tang* は求めてある。

H_0 の対立假説（*Alternative Hypothesis*）H' が眞なるとき，それにも拘らず H_0 を棄却しない確率（第２種の過誤の

確率） P_{II} は

$$P_{II} = \int_0^{E_\varepsilon} p(E^2|\lambda)\, dE^2 \tag{94}$$

(92) の右辺の級数は一様収斂であるから，項別に積分して，

$$P_{II} = \int_0^{E_\varepsilon^2} p(E^2|\lambda)\, dE^2 = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\lambda^i e^{-\lambda}}{i!}\ I_{E_\varepsilon^2}\left(\tfrac{1}{2}f_1 + i, \tfrac{1}{2}f_2\right) \tag{95}$$

f_2 が偶数のときは漸化式を作ることが出来る。そのためには

$$a = \frac{1}{2}f_1,\quad b = \frac{1}{2}f_2,\quad x = E_\varepsilon^2$$

とすれば，部分積分によつて

$$I_x(a+i,b) = \frac{1}{B(a+i,b)} \sum_{j=0}^{b-1} \frac{\Gamma(a+i)\Gamma(b)}{\Gamma(a+i+j+1)\Gamma(b-j)}\, x^{a+i+j}(1-x)^{b-j-1} \tag{96}$$

(96) を (95) に代入して

$$P_{II} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\lambda^i e^{-\lambda}}{i!} \frac{1}{B(a+i,b)} \sum_{j=0}^{b-1} \frac{\Gamma(a+i)\Gamma(b)}{\Gamma(a+i+j+1)\Gamma(b-j)}\, x^{a+i+j}(1-x)^{b-j-1}$$

$$= \sum_{i=0}^{b-1} \frac{\Gamma(a+b)\cdot e^{-\lambda}}{\Gamma(b-i)\cdot\Gamma(a+i+1)}\, x^{a+i}(1-x)^{b-i-1}\cdot F(a+b; a+i-1, \lambda x) \tag{97}$$

但し

$$F(\alpha,\beta,x) = 1 + \frac{\alpha}{1\cdot\beta}x + \frac{\alpha(\alpha+1)}{1\cdot 2\cdot\beta\cdot(\beta+1)}x^2 + \cdots\cdots \text{超幾何級数} \tag{98}$$

Kummer の 公式

$$F(\alpha,\beta,x) = e^x\cdot F(\beta-\alpha,\beta,-x) \tag{99}$$

を用ひるために(97)で $b-i-1$ を i とかくと

$$P_{II} = \sum_{i=0}^{b-1} \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(i+1)\Gamma(a+b-i)} e^{-\lambda(1-x)} x^{a-b-i-1} (1-x)^{i} \cdot F(-i, a+b-i, -\lambda x) \tag{100}$$

こゝで超幾何級数に関する恒等式

$$F(\alpha, \beta, x) = \frac{\beta - x}{\beta} F(\alpha+1, \beta+1, x) + \frac{x(\alpha+1)}{\beta(\beta+1)} F(\alpha+2, \beta+2, x)$$

を用ひて

$$\left. \begin{aligned} & T_0 = 1, \quad T_1 = (a+b-1+\lambda x)\frac{1-x}{x} \\ & T_i = \frac{1-x}{ix}\left\{(a+b-i+\lambda x)T_{i-1} + \lambda(1-x)T_{i-2}\right\} \end{aligned} \right\} \tag{101}$$

とおけば

$$P_{II} = e^{-\lambda(1-x)} x^{a+b-1} \sum_{i=0}^{b-1} T_i \tag{102}$$

となる。

f_2 が奇数の場合には漸化式は求められないが，$f_2 > 5$ のときは P_{II} の値は補間法によって充分精密に求められる。

$f_2 = \infty$ の場合

(92)式に Stirling の公式

$$\Gamma(n) = n^{n-\frac{1}{2}} e^{-n} \sqrt{2\pi}\, e^{\frac{\theta}{12n}} . \qquad (0<\theta<1)$$

を適用すれば，E^2 の分布は χ'^2 の分布となる。更に若し假説 H_0 が正しければ，$\lambda = 0$ だから，χ'^2 は χ^2 分布となり，その有意水準 χ_ε^2 は χ^2-表から求められる。

$l_\varepsilon = \frac{1}{2}\chi_\varepsilon^2$ とおくと，このときは

$$P_{II} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\lambda^i e^{-\lambda}}{i!} \Gamma\left(\frac{l_\varepsilon}{\sqrt{a+i}}, a+i-1\right) \tag{103}$$

$a = \frac{1}{2} f_1$, $\Gamma(u.p)$ は K. Pearson の Tables of the Incomplete Gamma Function で $I(u.p)$ と書かれた積分のことである。

表の作り方は下記の通り。附表. I. II. 参照

$E^2_{0.01}$ 及び $E^2_{0.05}$ に対応する P_{II} の計算法

(a) 有意水準 $E^2_{0.01}$ 及び $E^2_{0.05}$ の値を小数点以下4桁迄正しく求める。

(b) f_2 が20迄の偶数であるときは，P_{II} は(102)式から計算する。その結果の或ものは(95)式を用いてCheckした。

(c) $f_2 = 30$ のときは，(95)式によつて P_{II} を計算した。

(d) $f_2 = \infty$ のときは，(103)式によつた。

(e) (b) (c) (d) の計算では最後の結果が小数点以下4桁迄正しく出るやうに，途中数値は充分精密に取つた。

(f) $f_2 = 60$ のときは Harmonic interpolation を用い(95)式でcheckした。

(g) f_2 が奇数の場合には，大抵のとき6箇の点を取つてInterpolationをやる。$f_2 = 1, 3, 5$ のときは除外した。

(h) f_1 の範囲は1から8迄とする。

(i) このようにして計算された表全般に亘つて，先づ f_2 に関する階差を作り，次に f_1 に関する階差を作つて験算をした。

但し表では λ の代りに

$$\phi = \sqrt{\frac{2\lambda}{f_1+1}}$$

を用いた。

VI 應用

応用例を述べる前に Linear Hypothesis の検定を総括すると次のようになる。

$$\xi_i = c_{i1}\theta_1 + c_{i2}\theta_2 + \cdots + c_{is}\theta_s, \quad i = 1, 2, \cdots, N$$

に於て $\theta_1, \cdots, \theta_r$ を $\theta_1^0, \cdots, \theta_r^0$ と指定する假説 H_0 として，x_i は分布法則

$$p(x_i) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x_i - \xi_i)^2}, \quad i = 1, 2, \cdots, N$$

に従ふとするとき，假説 H_0 を検定するには次のようにする。

(a) $$S^2 = \sum_{i=1}^{N}(x_i - c_{i1}\theta_1 - c_{i2}\theta_2 - \cdots - c_{is}\theta_s)^2$$

の絶対的最小値 S_a^2 を求める。

(b) 假説 H_0 の下に於ける S^2 の相対的最小値 S_r^2 を求める。

(c) $$E^2 = \frac{S_r^2 - S_a^2}{S_r^2} = \frac{S_b^2}{S_a^2 + S_b^2}$$

又は

$$Z = \frac{1}{2}\left[\log_e \frac{S_b^2}{f_1} - \log_e \frac{S_a^2}{f_2}\right], \quad f_1 = r, \ f_2 = N - s$$

を計算する。

(d) E^2 が $E_{0.01}^2$ 又は $E_{0.05}^2$ より大となるとき假説 H_0 を棄却する。この場合に H_0 が眞でなくて，$\theta_1, \cdots, \theta_r$ に H_0 の場合と異る値を指定する対立假説 H' が眞であるにも拘らず，H_0 が棄却されないと云ふことがあり得る。

H' が眞であるとき，H_0 を棄却しない確率は P_{II} であつて，それは次のようにして求める。

(e) $2\lambda\sigma^2$ は $S_b^2 = S_r^2 - S_a^2$ で x_i の代りに $\sum_{k=1}^{r} c_{ik}\theta_k$ を代

入したのであることから λ を計算する。

(f)

$$f_1 = r, \quad f_2 = N-s, \quad \phi = \sqrt{\frac{2\lambda}{f_1+1}}$$

として附表第Ⅰ及びⅡ表から P_{II} を求める。

$1-P_{II}$ は H_0 が真ならざるとき，これを此検定方式が識別する能力の測度と考へられる。

乱塊法（Randomized Block Experiment）の場合には ϕ の意味は簡単である。

小区劃（Block）の数 n 処理法（Treatment）の種類 k で処理法による差異があるとして，これを δ_i（$i=1,2,\cdots,k$）とする。今 δ_i は第 i 処理法による収量と k 箇の処理法による収量の平均の差とすれば

$$\sum_{i=1}^{k} \delta_i = 0$$

圃場全体についての母分散を σ^2 とすれば

$$\phi = \sqrt{\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}\delta_i^2} \Big/ \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

で，これは処理効果の標準偏差の平均処理効果の標準偏差に対する比である。

例へば，4種の処理法（$k=4$）を比較するためにReplication 5（$n=5$）として δ_i は

$$-5, \quad -4, \quad 3, \quad 6$$

とする。これは圃場の真の収量に対する百分率である。過去の経験によつて σ は約 10％ なることが分つてゐるとすれば

$$\phi = \sqrt{\frac{25+16+9+36}{4}} \Big/ \frac{10}{\sqrt{5}} = 1.04$$

そこで　$f_1 = 3, \quad f_2 = 12 \quad \phi = 1.04$

として，第Ⅱ表で 5 %の水準に対して P_{11} を求めると

$$P_{11} = 0.7$$

である。このときの Power は，

$$1 - P_{11} = 0.3$$

註及び参考文献

(1) Stanisław Kołodziejczyk: On an important class of statistical hypotheses Biomerika. 27. 161. (1935)

(2) Stanisław Kołodziejczyk: ibid.

(3) H. Schultz: Th standard error of a forecast from a curve. Journal of the Am. Stat. Association. Vol. 25. (1930)

(4) K. Iwaszkiewicz: Sur la généralisation de le méthode de corrélation partiell pour le cas où la variable éliminée nèstpas mesurable.

Kwartalnik Statystyczny. Vol. 9. Z. 3 Waesgawa. (1932)

(5) この証明に関しては，S. S. Wilks. Math. Stat. Chap. VIII. § 8. 3 参照

又小川潤次郎：正規回帰の理論及び其の応用に就 統数研講究録 Vol. 3. No. 21-22. 1948. 参照

(6)　上記，小川の論文参照

(7)　non-central な場合でも，$\sum_{i=1}^{N}(x_i - x_{\cdot})^2$ と $x_{\cdot}^2$ とは統計的に独立であることは確める必要がある。