⑳ 条件附確率に関する一注意

高野　金作

（Ω, F, P）を確率空間とし，$\Omega_1 = \{\xi\}$ を任意の抽象空間，F_1 をその部分集合の完全加法族，$R_n = \{\eta\}$ を n 次元ゆうくりっど空間，B_n をそのぼれる集合の系（$n = 1, 2, \cdots\cdots$），Ω_1 と R_n との直積空間を Ω_2，そこに於けるすべての矩形集合（$A \times B$; $A \in F_1$, $B \in B_n$）を含む最小の完全加法族を F_2 とする。

（Ω, F, P）の上の（Ω_1, F_1）-確率変数を x，（R_n, B_n）-確率変数を y とし，更に Ω_3 を任意の抽象空間，F_3 をその部分集合の完全加法族とし，Ω_2 から Ω_3 への F_2 − 可測（F_3）なる写像を $f(\xi, \eta)$ とする。

x の確率法則を P_x で表す。（以上記号については伊藤清先生の‘確率論の基礎’参照）

然る時は，任意の $E \in F_3$ に対し $P_x(N) = P(x \in N) = 0$ なる $N \in F_1$ が存在し，$\xi \notin N$ ならば次の等式が成立つ。

$$(1) \qquad P\{f(x, y) \in E / x = \xi\} = P\{f(\xi, y) \in E / x = \xi\}$$

左辺は $x = \xi$ なる条件の下に於ける事象‘$f(x, y) \in E$’の条件附確率であり，右辺は $x = \xi$ なる条件の下に於ける y の条件附確率法則 $P_{y/x=\xi}[E_n]$ が $E_n = \{\eta ; f(\xi, \eta) \in E\}$ に於てとる値である。

Ω_3 が ユークリッド空間の場合には，左辺も $x=\xi$ なる條件の下に於ける $f(x,y)$ の條件附確率法則 $P_{f(x,y)/x=\xi}[E]$ が集合 $E\in F_3$ に於てとる値とみてよいことは云ふまでもない。

等式（1）は，例えばマルコフ過程の議論等に於て，当然のこととして，よく用いられているけれども，一応やはり証明を要することである。

直観的には尤もらしく見えても，條件附確率乃至條件附確率法則の定義から直ちに云えることではないからである。

（1）が成立するものとして，特に

$$(\Omega_3, F_3)\equiv(\Omega_2, F_2)\quad , \quad f(\xi,\eta)\equiv(\xi,\eta)$$

とおけば，任意の $M\in F_2$ に対し

$$P\{(x,y)\in M/x=\xi\}=P\{y\in M_\xi/x=\xi\}$$

茲に　$M_\xi=\{\eta\,;(\xi,\eta)\in M\}$

従つて

$$(2)\qquad P\{(x,y)\in M\}=\int_{\Omega_1}P\{y\in M_\xi/x=\xi\}P_x(d\xi)$$

を得る。

逆に吾々は（2）から（1）を導き出すことが出来る。

証明　　$E_1\in F_1$ とし

$$M=\{(\xi,\eta)\,;\,f(\xi,\eta)\in E\,;\,\xi\in E_1\}\in F_2$$

とおけば

$$\int_{E_1}P\{f(x,y)\in E/x=\xi\}p_x(d\xi)$$
$$=P\{f(x,y)\in E,\ x\in E_1\}$$
$$=P\{(x,y)\in M\}$$

$$= \int_{\Omega_1} P\{ y \in M_\xi / x = \xi \} p_x(d\xi)$$

$$= \int_{E_1} P\{ f(\xi, y) \in E / x = \xi \} p_x(d\xi)$$

$E_1 \in F_1$ は任意であるから，p_x 測度 0 の ξ 集合を除いて（1）が成立つ．

（2）の成立については，例へば，河田敬義先生の「確率論」定理 3．35 を参照のこと。

（1）の系．　x と y とが独立ならば，任意の $E \in F_3$ に対し p_x 測度 0 の ξ 集合を除いて，次の等式

$$P\{ f(x, y) \in E / x = \xi \} = P\{ f(\xi, y) \in E \}$$

が成立つ。

（1950．4．23）