⑤ "Non-central な正規分布に於ける二次形式統計量の独立性

所員　小　川　潤　次　郎

母平均が 0, 母分散 σ^2 の正規母集団

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma}\, e^{-\frac{x^2}{2\sigma}}$$

から抽出された大きさ n の任意標本 $x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n$ の二次形式として表わされる二つの統計量

$$\theta_1 = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\, x_i x_j\,, \qquad \theta_2 = \sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}\, x_i x_j \tag{1}$$

が統計的に独立である為の完全條件は、その係数行列 $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ に対して

$$AB = 0 \tag{2}$$

であることは良く知られてゐる。[1]

こゝでは、母集団が Non-central なときにも同様なことが成立つことを示す。即ち $x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n$ は夫々母集団

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\, e^{-\frac{(x_i-\xi_i)^2}{2\sigma^2}} \qquad i = 1, 2, \cdots\cdots, n$$

から抽出された任意標本として (1) なる統計量の独立性の條件を積率母函数で書下して見る。先づ同時分布の積率母函数 $\varphi(t_1, t_2)$

を計算しよう。

$$\varphi(t_1, t_2) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\right)^n \int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty} e^{t_1\theta_1 + t_2\theta_2 - \frac{1}{2\sigma}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \xi_i)^2} dx_1 \cdots dx_n$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma}\right)^n \int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty} \exp. -\frac{1}{2\sigma^2}\Big\{\sum x_i^2 - 2\sigma^2 t_1 \sum a_{ij} x_i x_j - 2\sigma^2 t_2 \sum b_{ij} x_i x_j - 2\sum \xi_i x_i + \sum \xi_i^2\Big\} dx_1 \cdots dx_n \qquad (3)$$

この積分を実行する為に、ベクトル記号を用いて

$$\mathfrak{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{\xi} = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix}$$

とおくと (3) の右辺の括弧内は

$$(\mathfrak{x}'\ 1)\begin{pmatrix} E - 2\sigma^2 t_1 A - 2\sigma^2 t_2 B & -\boldsymbol{\xi} \\ -\boldsymbol{\xi}' & \boldsymbol{\xi}'\boldsymbol{\xi} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathfrak{x} \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (4)$$

となる。今一次変換

$$\begin{bmatrix} \mathfrak{x} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E & \mathfrak{o} \\ \mathfrak{o} & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mathfrak{y} \\ 1 \end{bmatrix} \qquad (5)$$

に依つて積分変数を変換すれば (4) は

$$(\mathfrak{y}'\ 1)\begin{pmatrix} E & 0 \\ \mathfrak{o} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E - 2\sigma^2 t A - 2\sigma^2 t_2 B & -\boldsymbol{\xi} \\ -\boldsymbol{\xi} & \boldsymbol{\xi}'\boldsymbol{\xi} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E & \mathfrak{o} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathfrak{y} \\ 1 \end{pmatrix}$$

となるが、簡単の為に

$$C = E - 2\sigma^2 t_1 A - 2\sigma^2 t_2 B$$

とおくと、

$$\begin{pmatrix} E & 0 \\ \eta' & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C & -\xi \\ -\xi' & \xi'\xi \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E & \eta \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} C & C\eta-\xi \\ \eta'C-\xi' & \eta'C\eta-\xi'\eta-\xi'\eta-\eta'\xi+\xi'\xi \end{pmatrix} \quad (6)$$

となるから、今

$$\eta = C^{-1}\xi \quad (7)$$

と選べば、(6) の右辺は

$$\begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & -\xi' C^{-1}\xi+\xi'\xi \end{pmatrix} \quad (8)$$

となる。依って (3) は

$$\varphi(t_1,t_2)=\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma}\right)^n\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty} exp.-\frac{1}{2\sigma^2}(\mathfrak{y}'\ 1)\begin{bmatrix} C & \\ 0 & -\xi'C^{-1}\xi+\xi'\xi \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mathfrak{y} \\ 1 \end{bmatrix} dy_1\cdots dy_n$$

$$=|C|^{-\frac{1}{2}}\cdot exp.-\frac{1}{2\sigma^2}\left(-\xi'C^{-1}\xi+\xi'\xi\right) \quad (9)$$

書直して

$$\varphi(t_1,t_2)=|E-2\sigma^2t_1A-2\sigma^2t_2B|^{-\frac{1}{2}}\cdot exp-\frac{1}{2\sigma^2}\left(-\xi'C^{-1}\xi+\xi'\xi\right) \quad (10)$$

よって、Θ_1,Θ_2 の独立性條件は 次のようになる。

$$|E-2\sigma^2t_1A-2\sigma^2t_2B|^{-\frac{1}{2}}\cdot exp.-\frac{1}{2\sigma^2}\left(-\xi'C^{-1}\xi+\xi'\xi\right)$$

$$=|E-2\sigma^2t_1A|^{-\frac{1}{2}}|E-2\sigma^2t_2B|^{-\frac{1}{2}}exp.-\frac{1}{2\sigma^2}\left\{-\xi'(E-2\sigma^2t_1A)^{-1}\xi-\xi'(E-2\sigma^2t_2B)^{-1}\xi+2\xi'\xi\right\}$$

或は又 exp. を一方に集めて

$$\frac{|E-2\sigma^2t_1A||E-2\sigma^2t_2B|}{|E-2\sigma^2t_1A-2\sigma^2t_2B|}$$

$$=\exp.\frac{1}{\sigma^2}\left[-\xi'\left\{(E-2\sigma^2t_1A)^{-1}+(E-2\sigma^2t_2B)^{-1}-(E-2\sigma^2t_1A-2\sigma^2t_2B)^{-1}-E\right\}\xi\right]^{(11)}$$

が t_1, t_2 の任意の実数値に対して成立つことである。

次に (11)式と $AB=0$ とが同値であることを示さう。$AB=0$ ならば (11) の成立つことは明かであるから逆を云ふ。(2)

(11) 式の左辺、及び右辺の exp. の肩は共に t_1, t_2 の有理函数であることに注意して、一般に t_1, t_2 は複素数として考へる。先づ t_2 を固定して考へるとき、右辺の exp の肩が極を有すれば、それは真性特異点となる。よって左辺が有理函数であることに矛盾する。同様に t_1 を固定して考へて t_2 については極がない。よって、右辺は 1 なることが分る。よって

$$|E-2\sigma^2t_1A||E-2\sigma^2t_2B|=|E-2\sigma^2t_1A-2\sigma^2t_2B|$$

即ち

$$AB=0^{(3)}$$

となる。これで証明された訳である。

次の例は *trivial* であるが、このような場合にも *central* なときと同様に考へてよい。

$$p(x_i)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp.-\frac{(x_i-\xi)^2}{2\sigma^2}\quad ;\ i=1,2,\cdots\cdots,n$$

のとき、*Coefficient of Variation* の平方

$$v^2=\frac{\sum(x_i-\bar{x})^2}{N\bar{x}^2}$$

に於て、分母、分子の二次形式は独立である。

註

(1) 小川潤次郎：正規母集団に於ける一次形式二次形式及び双一次形式統計量の間の独立性に関して、統数研講求録 Vol.4. NO.1.

(2) この証明は鍋谷清治君に負ふものである。

(3) 註(1)の論文参照