(19) 母集団における変換と一機推定値について

東京女高師

工藤 弘吉

§1. 序　一つの parameter をふくむ母集団分布，$f(x|\theta)$においては parameter の推定量として最も効力のあるもの即ち most efficiency なものをとることが望ましいのであるが，必ずしも常にそういうものをとるとは限らない。例えば真の分布の parameter の値が或る特定の値 θ_0 であるとき，偶然にも常に θ_0 なる値をとる推定量即ち $\hat{\theta}(x) \equiv \theta_0$ がその θ_0 に対して最も効力のあるものであることは間違いない。けれども，この様な推定量は我々の採用する所ではない。それは真の値が θ_0 であるかどうかわからないからであつて，もし真の値が θ_0 とは非常に異つてゐる場合はその efficiency は極めて小さくなつてしまうからである。それではそのわからない真の分布に対する推定量のうちでどんなものがよいかと，真の分布の parameter の値がどんな値であつても推定量 $\hat{\theta}(x)$ の efficiency に変化のないものがほしい筈である。そのためには真の値が如何なる値であつてもそれに近いある範囲内に推定される確

率が真の分布にはかゝわらない様な推定量であることがのぞましい。この様な意味で真の値が $\theta = \theta_0$ のときの $\hat{\theta}$ の分布函数が $\theta = 0$ のときの $\hat{\theta} - \theta_0$ の分布函数と等しいとゆう性質をもつ推定量を考えた方がよい。この様な推定量のことを私は一様推定量と名づけた。

以上の様な一様推定量では母集団常数と推定量の分布との間に代数的に isomorph 且つある意味で連続な関係を見ることが出来るが，推定量の分布は母集団の分布から induce されるのであるから母集団分布と parameter には又同じ関係が見られる。ところが，平均を常数とする正規分布，分散を parameter とする正規分布等の例を考えてみればこれらの parameter は母集団における変換の parameter と見ることが出来る。即ち母集団常数と分布との間には母集団内の one parameter な変換群を媒介として互に関係づけられる場合である。今ここで目的とするのはこう云う場合であつてこれによつて変換群から一様推定値を作るのである。

更にこうして作られた一様推定量はその分布が極めて簡単に定まつてくるので，それは分布 $f(x|\theta_1)$ と分布 $f(x|0)$ との間の検定力函数（本講究録第四巻二号103頁）$\beta(\alpha|\theta)$ によつて定まる。即ちその作られた一様推定量に対して適当な α を定めるとき $\gamma(\alpha|\theta) = 1 - \beta(\alpha|\theta)$ がその分布函数となる。これは甚だ便利なことであつて $\gamma(\alpha|\theta)$ なる函数の値を適当ないくつかの θ, α について表を作つておけばこの推定量の分布は勿論検定力函数の性質よりわかる分布に関するいろいろなことがわかつて来る。

ところが $\gamma(\alpha|\theta)$ は

$$(1.1)\qquad \gamma(\gamma(\alpha|\theta_1)|\theta_2) = \gamma(\alpha|\theta_1 + \theta_2)$$

なる函数方程式を満すのであつてこの函数方程式の解は岩村

聯氏によつて非常によくその性質がわかりこのことだけからかなり多くの問題は解決してしまう。しかし又一方から上の様な変換によつて一様推定値が作られるためにはKoopmanの函数[1)]でなければならないとゆうことがわかつた。従つてかなり一般的な議論をしたつもりであつた次実はKoopmanの函数とゆう非常に極限された分布でしかなかつた訳である。

現代統計数学における最も基本的な問題としての仮設検定論，信頼度理論，母数推定論においてはある意味で密接な関係があると考えられてある。そのうちで前二者はこの関係は明かにされてあるが後者との関係はあまり明かとは云えない。殊にその方法論的な面ではやゝ趣を異にしてある。推定値の発見法としての最尤法は特に他の問題とは全く無関係である様に思われる。しかしこれらの点についてもここでは割合はつきりした統一がとれている様に見える。検定論において作られた検定力函数が直ちに推定値の分布函数としての意味をもつことがこゝでもつともその関係を端的に現わすものであろう。

なお，こゝではone parameterの場合のみを考えているが，many parameterの場合に拡張出来るかどうか？と云うことが残された問題であろう。

§ 2. 分布のparameterとdissipative Transformation.

空間 Ω，Borel 集合族 $\mathcal{B}$，その上で定義された確率分布 $P(E)$（ $E \in \mathcal{B}$, $0 \leq P(E) \leq 1$ ）は與えられたものとする。

1). Koopman, American Transact. of Math. Soc. vol. 39 (1936)

定義イ）　Ω 全体を Ω 全体に一対一に移す変換 σ が measurable とゆうのは

$$E \in \mathfrak{B} \text{ ならば } \sigma E \in \mathfrak{B},\ \sigma^{-1} E \in \mathfrak{B}.$$ [2]

定義ロ）　Ω の measurable な変換 σ に対して次の様な measurable な変換 σ^θ がすべての実数 θ に対して定義される。

i）　$\sigma^0 x = x,\quad \sigma^1 x = \sigma x,\quad \sigma^{-1}(\sigma x) = x$

ii）　$\sigma^{\theta_1+\theta_2} x = \sigma^{\theta_1}(\sigma^{\theta_2} x)$ なる結合法則で実数の和の群と isomorph

iii）　収斂実数列 $\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_n$ 及びその極限 θ に対してすべての空でない $E\ (\in \mathfrak{B})$ について空でない極限 $\lim_{n\to\infty} \sigma^{\theta_n} E\ (\in \mathfrak{B})$ が存在して

$$\sigma^{\theta} E = \lim_{n\to\infty} \sigma^{\theta_n} E \quad \text{である。}$$

この様なとき σ を無限に分解可能とゆう。

定義ハ）　$\mathfrak{B}$ の上で定義された確率分布 $F(E)$ に対して

(2.1)　$$\sigma F(E) = F(\sigma^{-1} E) \qquad \text{for all } E \in \mathfrak{B}$$

と定義された確率分 $\sigma F(E)$ を σ による F の変換分布とゆう。

與えられた確率分布 $P(E)$ に対して無限に分解可能な変換 σ^θ による変換分布 $\sigma^\theta P$ の集合 $\{\sigma^\theta P\,;\ -\infty < \theta\ \infty\} = \mathfrak{h}$ において σ^θ は $\mathfrak{h}$ 内の一対一な変換として one parameter group を作る。この $\mathfrak{h}$ を假説型，θ をこの假説型 $\mathfrak{h}$ の母数

(parameter)と云う.

定義二) σを無限に分解可能な変換とするとき,假設型 $\mathfrak{h}_y=\{\sigma^\theta P\}$ の任意の二つの確率分布 $\sigma^\theta P$, σP が互に絶対連続なとき σ は P に対して絶対連続(P-a.c)とゆう.

P-a.c.な変換 σ をもつ假設型 $\mathfrak{h}_y$ の確率分布 $\sigma^\theta P$, $\sigma^{\theta'} P$ に対して

$$(2.2)\qquad \sigma^{\theta'}P(E)=\int_E f(\omega\mid\theta,\theta')\,\sigma^\theta P(d\omega),\ (\omega\in\Omega, E\in\mathfrak{B})$$

なる確率密度函数(p.d.f)$f(\omega\mid\theta,\theta')$ は θ,θ' に対して定まる[4]。$\sigma^\theta P$, P に対する確率密度函数 $f(\omega\mid 0,\theta)$ を簡単に $f(\omega\mid\theta)$ とかくとき

$$\sigma^\theta P(E)=\int_E f(\omega\mid\theta)P(d\omega),\quad P(E)=\int_E \frac{\sigma^\theta P(d\omega)}{f(\omega\mid\theta)}$$

であるから

$$(2.3)\qquad \sigma^{\theta'}P(E)=\int_E \frac{f(\omega\mid\theta')}{f(\omega\mid\theta)}\,\sigma^\theta P(d\omega)$$

即ち

$$(2.4)\qquad f(\omega\mid\theta,\theta')=\frac{f(\omega\mid\theta')}{f(\omega\mid\theta)}$$

と考えることが出来る。(measure(P)zero の違いがあつても $f(\omega\mid\theta,\theta')$ をはじめから都合よくとればよい。以後特記しないかぎり常に成立する様に書いてもあやまりない)
又 $f(\omega\mid 0)\equiv 1$ 今 $\theta'\geqq\theta$ なる θ,θ' に対しては

$$(2.5)\qquad [\,\omega\mid f(\omega\mid\theta')/f(\omega\mid\theta')\geqq k\,]=Q_k$$

なる形の集合の族 $\{Q_k\}$ を考えるとき,これより次の様な集合族 $\mathfrak{R}(\theta,\theta')$ を作ることが出来る。[2)3)]

4) くわしくは P-measure zero をのぞいては定まる.

i) $0 \leqq \alpha \leqq 1$ なるすべての α に対して一つ只一つの $R_\alpha \in \mathbb{R}$ がある。

ii) $R_\alpha \in \mathcal{B}$

iii) $R_0 =$ 空集合 , $R_1 = \Omega$

iv) $P(R_\alpha) = \alpha$

v) $\alpha_1 > \alpha_2$ なら $R_{\alpha_1} \supset R_{\alpha_2}$ 。

この集合族 $\mathbb{R} = \{R_\alpha ; 0 \leqq \alpha \leqq 1\}$ を対立假設 $(\sigma^\theta P, \sigma^{\theta'} P)$ の棄却域系と呼ぶ

定義ホ) 棄却域系 $\mathbb{R}$ が θ, θ' $(\theta' > \theta)$ の値の如何に関せず集合族として一致する様に作れるとき変換 σ は *dissipative* と云う。

さて Ω の n 箇の直積空間 Ω^n , その上で $\mathcal{B}$ から作られたBorel集合族 $\mathcal{B}^n$, $\mathcal{B}^n$ 上に P から作られた確率分布を P^n とする。 σ を Ω の上の変換とするとき Ω^n 内で σ から作られた変換を又同じく σ と書き

$$(2.5) \quad \sigma : \omega = (\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n) \in \Omega \to \sigma\omega = (\sigma\omega_1, \sigma\omega_2, \cdots, \sigma\omega_n)$$

(但、$\omega_i \in \Omega$)

とする。そのとき次のことが云える。 i) σ が Ω で *measurable* ならば Ω^n でも *measurable* である。 ii) Ω で無限に分解可能なら σ^θ: $\omega = (\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n) \to \sigma^\theta\omega = (\sigma^\theta\omega_1, \sigma^\theta\omega_2, \cdots, \sigma^\theta\omega_n)$ として又無限に分解可能である。 又 iii) Ω^n での σ^θ による P^n の変換分布 $\sigma^\theta P^n$ は Ω の確率分布から Ω^n へ導入された確率

---

1) $\theta < \theta'$ なるときは Q_k は $[\omega | f(\omega|\theta)/f(\omega|\theta') \leqq k.]$ とおいてもよい。

2) 前掲本講究録 Vol. 4. No. 3 p.p 108-109 この操作を完備化すると名づける。

3) この作り方は一意的ではない. 尚これには條件 (C.C) が必要である。

(C.C) 任意の集合 A $(\in \mathcal{B}, P(A) > 0)$ に対して $P(A) > p$ ならば $B \in \mathcal{B}$ があつて $P(B) = p$ とすることが出来る.

分布 $(\sigma^{\theta}P)^n$ に等しい。 i) ii) は明らかであるから iii) の証明をする。 $\mathcal{B}^n$ の基本集合

$$J = I_1 \times I_2 \times \cdots \times I_n \quad (I_i \in \Omega,\ i = 1, 2, \cdots, n)$$

に対しては

$$\sigma^{\theta}P^n(J) = P^n(\sigma^{-\theta}J) = P^n[(\sigma^{-\theta}I_1) \times (\sigma^{-\theta}I_2) \times \cdots \times (\sigma^{-\theta}I_n)]$$

$$= P(\sigma^{-\theta}I_1) \cdot P(\sigma^{-\theta}I_2) \cdots P(\sigma^{-\theta}I_n)$$

$$= \sigma^{\theta}P(I_1) \cdot \sigma^{\theta}P(I_2) \cdots \sigma^{\theta}P(I_n)$$

より明らかである。

又 $\sigma^{\theta}P$ と $\sigma^{\theta'}P$ とが互に絶対連続であれば

$$\sigma^{\theta'}P = \int f(\omega \mid \theta, \theta')\, \sigma^{\theta}P(d\omega)$$

とおくことが出来，$f(\omega \mid \theta, \theta') \neq 0$ である。従って

$$\sigma^{\theta'}P^n = (\sigma^{\theta'}P^n) = \int \prod_{i=1}^{n} f(\omega_i \mid \theta, \theta')\, \sigma^{\theta}P^n(d\omega)$$

(但 $\omega = (\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n)$)

で $\prod_{i=1}^{n} f(\omega_i \mid \theta, \theta') \neq 0$ であるから $\sigma^{\theta'}P^n$ と $\sigma^{\theta}P^n$ とは互に絶対連続である。 従って σ が Ω で P-a.c なら又 Ω^n でも P^n-a.c である。そして $\sigma^{\theta}P = \int f(\omega \mid \theta) P(d\omega)$ とするとその p.d.f は

$$(2.6) \qquad \prod_{i=1}^{n} \frac{f(\omega_i \mid \theta')}{f(\omega_i \mid \theta)}$$

となる。

注　意 (2.7)　P が実数の集合 R 或は Euclid n 次元空間の上で定義された確率分布とし，ルベーグ測度について絶対連続とし

$$P(E) = \int_E p(x)\, dm(x)$$

とする。

$\Omega^* = [x \mid p(x) \neq 0]$，$\mathcal{B}^* =$ ルベーグ可測集合のうち Ω^* の部分集合ばかりよりなる集合族とする。そのとき P(E) は，

Ωの上で定義された確率密度であり，σがΩ^*をΩ^*に写す一対一可測，無限に分解可能な対応とする。このときはΩ^*以外の点にまでσを拡張することが出来る。それはΩ^*以外の点では不変変数をσとしてΩ^*の内ではσそのまゝとする。こうして定義されたσに対して，$\sigma^\theta m(E)=m(\sigma^{-\theta}E)$とおく。$\sigma^\theta m$，$\sigma^{\theta'} m$が$\theta$；$\theta'$の如何に関せず互に絶対連続なるとき$\sigma$を絶対連続な変数（a.c）と云う．すると

<u>σがmに関して絶対連続な確率分布Pに対してP-a.cなるための必要充分條件はa.cなることである。</u>

証　明：　充分性：

$$\sigma^\theta m(E)=\int_E \mu(x,\theta)dm$$

とおくと

$$\sigma^\theta P(E)=P(\sigma^{-\theta}E)=\int_{\sigma^{-\theta}E}p(x)\,dm(x)=\int_E p(\sigma^{-\theta}x)\,dm(\sigma^{-\theta}x)$$

$$=\int_E p(\sigma^{-\theta}x)\,\sigma^\theta m(dx)=\int_E p(\sigma^{-\theta}x)\mu(x,\theta)\,m(dx)$$

$$=\int_{E\cap\Omega^*} p(\sigma^{-\theta}x)\mu(x,\theta)\,m(dx)$$

$$=\int_{E\cap\Omega^*}\frac{p(\sigma^{-\theta}x)\mu(x,\theta)}{p(x)}P(dx)=\int_E f(x|\theta)P(dx);$$

但

$$f(x|\theta)=\frac{p(\sigma^{-\theta}x)\mu(x,\theta)}{p(x)},\quad x\in\Omega^*;$$

$$=0,\qquad x\bar{\in}\Omega^*$$

又$\mu(x,\theta)$も$p(\sigma^{-\theta}x)$もΩ^*では零ではなく且
$\sigma^\theta P(R-\Omega^*)=0$（Rは空間全体）であるから

$$P(E) = \int_E \frac{p(x)}{p(\sigma^{-\theta}x)\mu(x,\theta)}\, dP$$

故に P, $\sigma^{\theta}P$ は互に絶対連続. $\sigma^{\theta}P$, $\sigma^{\theta'}P$ については, $\sigma^{\theta'}P$ と P とも互に絶対連続なることより明らか。

必要性：

$$\sigma^{\theta}m(E) = m(\sigma^{-\theta}E) = \int_{\Omega^*\cap(\sigma^{-\theta}E)} \frac{P(dx)}{p(x)} + m[(\sigma^{-\theta}E) - \Omega^*]$$

であるが σ は $R - \Omega^*$ では不変変数であるから, $\sigma^{-\theta}E - \Omega^* = E - \Omega^*$. 故に $m[(\sigma^{-\theta}E) - \Omega^*] = m(E - \Omega^*)$. 従って

$$\sigma^{\theta}m(E) = \int_{\Omega^*\cap E} \frac{P(d\sigma^{-\theta}x)}{p(\sigma^{-\theta}x)} + m(E - \Omega^*)$$

$$= \int_{\Omega^*\cap E} \frac{\sigma^{\theta}P(dx)}{p(\sigma^{-\theta}x)} + m(E - \Omega^*)$$

$$= \int_{\Omega^*\cap E} \frac{f(x|\theta)}{p(\sigma^{-\theta}x)}\, dp(x) + m(E - \Omega^*)$$

$$= \int_E \mu(x|\theta)\, dm(x);$$

但し $\mu(x|\theta) = \dfrac{p(x)f(x|\theta)}{p(\sigma^{-\theta}x)}$, $x \in \Omega^*$;

$= 1$, $\quad x \bar{\in} \Omega^*$.

従って前と同様に必要性も云える。

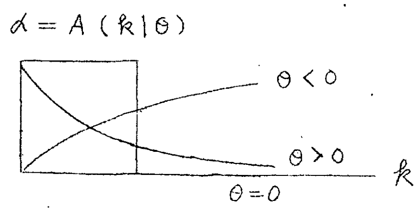
§ 3. Dissipative な変換

この§では特に明記されないかぎり，Ω, $\mathfrak{B}$, P, ω, $f(\omega|\theta)$ etc. は夫々 Ω^*, $\mathfrak{B}^n$, P^n, $(\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n)$, $\prod_{i=1}^{n} f(\omega_i|\theta)$ etc. と考える。又変換 σ は無限に分解可能 P-a.c. である可測変換とする。

σ が dissipative であるとする。そのときは $\mathbb{R}$ を作る代表的な方法として (2.5) の代りに $\theta \geqq 0$ なるとき $[\omega | f(x|\theta) \geqq k] = Q_k$; $\theta < 0$ なるとき $[\omega | f(x|\theta) \leqq k] = Q_k$ なる $\{Q_k ; 0 \leqq k < \infty\}$ より $\mathbb{R} = \{R_\alpha\}$ をつくる。そして R_α を $P(R_\alpha) = \alpha$ なるものとする。このとき k に対して α が一意的にきまるから此の関係を

$$\alpha = A(k|\theta)$$

とおくと $A(k|\theta)$ は $\theta > 0$ なるときは単調減少で $A(0|\theta)=1$, $A(\infty|\theta) = 0$; $\theta < 0$ なるときは単調増加で $A(0|\theta) = 0$, $A(\infty|\theta) = 1$, $\theta = 0$ なるときは $k \leqq 1$ で $A(k|0) = 1$, $k < 1$ で $A(k|0) = 0$,



この様な $A(k|\theta)$ に対して $k(\alpha|\theta)$ を次の様に定義する:

$\theta \neq 0$ ならば

i) k に対して $\alpha = A(k|\theta)$ が一意的に定まるときは $k(\alpha|\theta) = k$,

ii) k で $A(k|\theta)$ が不連続なら,

$\theta > 0$ で $A(k-0|\theta) \geqq \alpha \geqq A(k+0|\theta)$

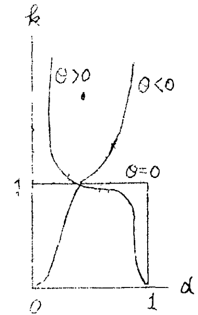
$\theta < 0$ で $A(k-0|\theta) \leqq \alpha \leqq A(k+0|\theta)$ なる α に対しては $\qquad k(\alpha|\theta) = k$

iii) 或る區間で $A(k|\theta)$ が constant ($\equiv \alpha$) なるときは $k(\alpha|\theta) = \inf\{k;\ A(k|\theta) = \alpha\}$.

$\theta = 0$ なら $k(\alpha|0) \equiv 1$, $\quad 0 \leqq \alpha \leqq 1$.

(この様な函数 $k(\alpha|\theta)$ を簡単に k—函数と呼ぶことにする.) そのとき k 函数は $[0.1]$ で定義された単調函数で $\theta > 0$ なら減少, $\theta < 0$ なら増加, $\theta = 0$ なら $\equiv 1$,

尚又 $\sigma^{\theta}P = \int f(\omega|\theta)\,dP$ より



(3.1) $\qquad \sigma^{\theta}P(R_{\alpha}) = \int_{0}^{\alpha} k(\alpha|\theta)\,d\alpha.$ [1)]

この不定積分は α の函数であり θ を parameter と見て, $\gamma(\alpha|\theta)$ と書き, 假説型 $\mathcal{H}$ における変換 σ の表現函数と云う。即ち

(3.2) $\qquad \gamma(\alpha|\theta) = \sigma^{\theta}P(R_{\alpha}) = \int_{0}^{\alpha} k(\alpha|\theta)\,d\alpha$

更に

$$\sigma^{\theta'}P(\sigma^{-\theta}E) = \int_{\sigma^{-\theta}E} f(\omega|\theta')\,P'(d\omega) = \int_{E} f(\sigma^{-\theta}\omega|\theta')\,P(d\sigma^{-\theta}\omega)$$

$$= \int_{E} f(\sigma^{-\theta}\omega|\theta')\,\sigma^{\theta}P(d\omega)$$

であるから (2.3) より

(3.3) $$f(\sigma^{-\theta}\omega|\theta') = \frac{f(\omega|\theta'+\theta)}{f(\omega|\theta)}$$

故に $\theta > 0$ なるとき

$$\sigma^{\theta}R_{\alpha} = [\sigma^{\theta}\omega \mid f(\omega|\theta') \geqq k] = [\omega \mid f(\sigma^{-\theta}\omega|\theta') \geqq k]_{0 \leq k < \infty}$$

なる　すべての集合から棄却域系　を定めることが出来る。σ が dissipative なことから適当に完備化(2) すれば $\mathcal{R}$ と一致させることが出来る。従って $R_\alpha \in \mathcal{R}$ ならば $\sigma^\theta R_\alpha \in \mathcal{R}$ なる様に出来る。$\theta < 0$ のときも同様であるからすべての θ について $R_\alpha \in \mathcal{R}$ ならば $\sigma^\theta R_\alpha \in \mathcal{R}$ なる様 $\mathcal{R}$ を定めることが出来る。そして

(3.4)　　$P(\sigma^\theta R_\alpha) = \sigma^{-\theta} P(R_\alpha) = \gamma(\alpha \mid -\theta)$

であるから

(3.5)　　$\sigma^\theta R_\alpha = R_{\gamma(\alpha)-\theta)}$

従って

(3.6)　　$\gamma(\alpha \mid \theta + \theta') = \gamma(\gamma(\alpha \mid \theta) \mid \theta') = \gamma(\gamma(\alpha \mid \theta') \mid \theta)$

何となれば

$$\gamma(\alpha \mid \theta + \theta') = \sigma^{\theta+\theta'} P(R_\alpha) = \sigma^\theta P(\sigma^{-\theta'} R_\alpha)$$

$$= \sigma^\theta P(R_{\gamma(\alpha \mid \sigma')}) = \gamma(\gamma(\alpha \mid \theta') \mid \theta)$$

(3.6) より

(3.7)　　$\gamma(\alpha \mid 0) = P(R_\alpha) = \alpha$

従って

(3.8)　　$\gamma(\alpha_1 \mid \theta) = \alpha_2$　なら　$\gamma(\alpha_2 \mid -\theta) = \alpha_1$

1) この函数 $k(\alpha \mid \theta)$ は $\omega \in R_\alpha - \bigcup_{\alpha' < \alpha} R_{\alpha'}$ で $f(\omega \mid \theta) = k(\alpha \mid \theta)$ almost everywhere (P) であるから f を最初からこの様にとっておいてもよい

2) 16頁脚註 2) 参照

更に既に引用した本講究録 Vol.4 NO.3.[1] P.110の対立假設 $(\sigma^{\theta}P, P)$（但 $\theta>0$）の検定力函数[2]を $\beta(\alpha|\theta)$ とすると、その定義によって

(3.9) $$\beta(\alpha|\theta)=\sigma^{\theta}P(\Omega-R_{\alpha})$$

であるから

(3.10) $$\gamma(\alpha|\theta)=1-\beta(\alpha|\theta), \qquad \theta>0$$

更に $-\theta<0$ に対しては（3.8）によって $\gamma(\alpha|\theta)$ は $\gamma(\alpha|-\theta)$ の α に関する逆函数であるから

$$\beta(\alpha|-\theta)=\gamma(1-\alpha|-\theta)$$

とおくと $\beta(\alpha|-\theta)$ は $(P,\sigma^{\theta}P)$ の検定力函数となる。

然るに録4－⑨において $\beta(\alpha|\theta)$ は α に関して単調減小，上＝凹な連続函数なることがしめされてゐるから $\gamma(\alpha|\theta)$ も単調増加，$\theta>0$ なら上＝凸，$\theta>0$ なら上＝凹，$\theta=0$ なるときは（3.7）から $\gamma=\alpha$ な連続函数である。（$P, \sigma^{\theta}P$ は互に絶対連続だから $\beta(\alpha|\theta)$ 従って $\gamma(\alpha|\theta)$ は $[0,1]$ で連続となる）

そこで（3.6）より（3.2）を利用して

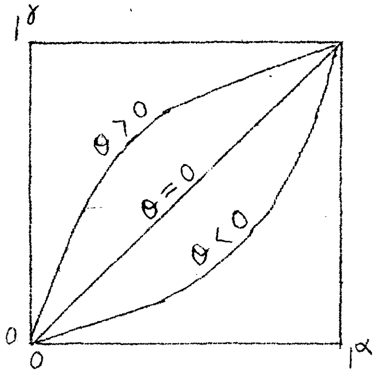
$$\int_0^{\alpha}k(\alpha|\theta+\theta')\,d\alpha=\int_0^{\gamma(\alpha|\theta)}k(\alpha|\theta')\,d\alpha$$

$\gamma(\alpha|\theta)=\alpha'$ とおくと $d\alpha'=\gamma(d\alpha_0|\theta)=k(\alpha|\theta)\,d\alpha$。

---

1) この報告は今後〃録4－⑨〃と引用する

2) この定義は Neyman－Pearson の power function の訳語と同じであるが全く別物である。Wilks mathematical statistics 参照；



であるから

$$= \int_0^\alpha k(\gamma(\alpha|\theta)(\theta')\, k(\alpha|\theta)\, d\alpha,$$

即ち

(3.11) $$\frac{k(\alpha|\theta+\theta')}{k(\alpha|\theta)} = k(\gamma(\alpha|\theta)|\theta')$$

γは θの値如何に関せず単調増加で kは $\theta'>0$ なら減少 $\theta'<0$ な増加であるから $k(\gamma(\alpha|\theta)|\theta')$ 即ち (3.11) によつて $\dfrac{k(\alpha|\theta+\theta')}{k(\alpha|\theta')}$ は $\theta'>0$ なら単調減少, $\theta'<0$ なら単調増加である.

さて、$\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4$,を固定するとき $k(\alpha|\theta_1)/k(\alpha|\theta_2)$ と $k(\alpha|\theta_3)/k(\alpha|\theta_4)$ との関係をあらわす函数を

(3.12) $$F(k_1|\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4) = k_2$$

とする。即ち $k(\alpha|\theta_1)/k(\alpha|\theta_2)$, $k(\alpha|\theta_3)/k(\alpha|\theta_4)$ は

(3.13) $$F\left(\frac{k(\alpha|\theta_1)}{k(\alpha|\theta_2)} \,\middle|\, \theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4\right) = \frac{k(\alpha|\theta_3)}{k(\alpha|\theta_4)}$$

を満す。但し Fは k_1 に対して k_2 が必ず対応するとは限らないが、

i) $\left.\begin{array}{l}\theta_1 > \theta_2,\ \theta_3 > \theta_4 \\ \theta_1 < \theta_2,\ \theta_3 < \theta_4\end{array}\right\}$ ならFは単調増加である。

何となれば $k(\alpha|\theta)/k(\alpha|\theta')$ はこの場合 αの単調函数であるから.

ii) $\left.\begin{array}{l}\theta_1 < \theta_2\ ,\ \theta_3 > \theta_4 \\ \theta_1 > \theta_2\ ,\ \theta_3 < \theta_4\end{array}\right\}$ ならFは単調減少である。

何となれば $k(\alpha|\theta)/k(\alpha|\theta')$ は $\theta > \theta'$ なら α の単調減少，$\theta < \theta'$ なら単調増加であるから

iii) θ_1, θ_2 が何であっても，$\theta_3 = \theta_4$ なら $F \equiv 1$

何となれば $k(\alpha|\theta_3)/k(\alpha|\theta_4) \equiv 1$ であるから

iv) $\theta_1 = \theta_2$, $\theta_3 \neq \theta_4$ なら F は不定

V) 特に $\theta_1 = \theta_3$, $\theta_2 = \theta_4$ なら $F(k) = k$

これは i) の特別な場合であるが，このときは(3.13)から明らか.

vi) 次の函数方程式を満す

(3.14) $$F(F(k|\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4)|\theta_3, \theta_4, \theta_5, \theta_6)$$
$$= F(k|\theta_1, \theta_2, \theta_5, \theta_6).$$

これも (3.13)より明らか、

$k(\alpha|\theta)$ と $f(\omega|\theta)$ との関係を考察するとき[1] 又 $f(\omega|\theta_1)/f(\omega|\theta_2)$ と $f(\omega|\theta_3)/f(\omega|\theta_4)$ も同様(3.12)を満すことは明らかであらう。即ち

(3.15) $$F\left(\frac{f(\omega|\theta_1)}{f(\omega|\theta_2)}\,\middle|\,\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4\right) = \frac{f(\omega|\theta_3)}{f(\omega|\theta_4)}$$

---

1) 1頁脚註 1) より

逆に無限に分解可能な P.a.c な可測変換 σ が Ω に定義されそれによる Ω の確率分布 P の変換分布からなる假設型の p.d.f を $f(\omega|\theta)$ とする。即ち

$$\sigma^{\theta}P(E)=\int_E f(\omega|\theta)\,dP$$

とする。そのときそれらの比 $f(\omega|\theta')/f(\omega|\theta)$ が i)—vi) を満す函数 (3.12) を満すとき 即ち (3.13) が成立するとき σ は *dissipative* である。何となれば

$$\left[\omega \,\middle|\, \frac{f(\omega|\theta_1)}{f(\omega|\theta_2)} \geq k\right]=Q_k \qquad (\text{但 } \theta_1>\theta_2)$$

とするとき $\{Q_k\}$ は $(\sigma^{\theta_1}P,\sigma^{\theta_2}P)$ の検定域系となる。F の性質 i) より $\theta_3>\theta_4$ とすれば

$$Q_k=\left[\omega \,\middle|\, \frac{f(\omega|\theta_3)}{f(\omega|\theta_4)} \geq F(k;\theta_1,\theta_2,\theta_3,\theta_4)\right]$$

であるから，$\{Q_k\}$ は $(\sigma^{\theta_3}P,\sigma^{\theta_4}P)$ の検定域系でもある。このことからそれらの検定域系の完備化されたものは θ_1,θ_2 の如何に関せず $(\theta_1>\theta_2)$ 一致する。従って σ は *dissipative* である。

定理 I. 確率分布の σ による変換分布からなる假設型の p.d.f. を $f(\omega|\theta)$ とするとき σ が *dissipative* なるための必要充分條件は $k_1=(f(\omega|\theta_1)/f(\omega|\theta_2))$ 及び $k_2=(f(\omega|\theta_3)/f(\omega|\theta_4))$ が次の 6 つの條件を満す方程式 $F(k_1|\theta_1,\theta_2,\theta_3,\theta_4)=k_2$ を満すことである。（但 $F>0$）

i) $\theta_1>\theta_2,\ \theta_3>\theta_4$ 或は $\theta_1<\theta_2,\ \theta_3<\theta_4$ なら F は単調増加

ii) $\theta_1<\theta_2$, $\theta_3<\theta_4$ 或は $\theta_1>\theta_2$, $\theta_3>\theta_4$ ならFは単調減少

iii) θ_1,θ_2が何であっても $\theta_3=\theta_4$ なら $F\equiv 1$

iv) $\theta_1=\theta_2$, $\theta_3\neq\theta_4$ ならF不定

v) 特に $\theta_1=\theta_3$, $\theta_2=\theta_4$ なら $F(k)=k$

vi) $F(F(k\mid\theta_1,\theta_2,\theta_3,\theta_4)\mid\theta_3,\theta_4,\theta_5,\theta_6)=F(k\mid\theta_1,\theta_2,\theta_5,\theta_6)$

§4. *dissipative* な変換と *Koopman* の分布

σが$\Omega^{(n)}$の上で *dissipative* な変換であるとする　$(n=1,2\cdots\cdots)$

そのとき

(4.1)　$$\sigma^\theta P(E)=\int_E f(\omega\mid\theta)\ P(d\omega)$$

とするとき

(4.2)　$$\sigma^\theta P^n(E)=\int_E\prod_{i=1}^n f(\omega_i\mid\theta)\ P^n(d\omega)\qquad \omega=(\omega_1,\omega_2,\cdots\cdots,\omega_n)$$

であるから、定理Iによって、すべてのnに対して定理Iの函数

$F_n(k\mid\theta_1,\theta_2,\theta_3,\theta_4)$があって

(4.3)　$$F\left(\prod_{i=1}^n\frac{f(\omega_i\mid\theta_1)}{f(\omega_i\mid\theta_2)}\ \Big|\ \theta_1,\theta_2,\theta_3,\theta_4\right)=\prod_{i=1}^n\frac{f(\omega_i\mid\theta_3)}{f(\omega_i\mid\theta_4)},\quad(n=1,2,3,\cdots)$$

$\theta=(\theta_1,\theta_2,\theta_3,\theta_4)$, $F_1(k\mid\theta_1,\theta_2,\theta_3,\theta_4)=F(k\mid\theta)$ と簡単に書くならば

$f(\omega\mid\theta_3)$　に対して

(4.4)　$$F_n\left(\prod_{i=1}^n k_i\mid\theta\right)=\prod_{i=1}^n F(k_i\mid\theta)$$

なる函数方程式をF_n,Fは満足しなければならない。此の方程式

(4.4)を解くために　$F_n(k\mid\theta)>0$, $k>0$　なることに注意して

$\log k=y$, $\log F(k\mid\theta)=u(y\mid\theta)$, $\log F_n(k\mid\theta)=u_n(y\mid\theta)$

とおくなら，方程式 (4.4) は

(4.5) $$u_n\left(\sum_{i=1}^{n} y_i \mid \theta\right)=\sum_{i=1}^{n} u(y_i \mid \theta)$$

となる。次にこの方程式を解こう。

$y_1=y$, $y_i=0$ $(i=2,3,\cdots\cdots,n)$ とすると

$$u_n(y \mid \theta)=u(y \mid \theta)+(n-1)\,u(0 \mid \theta)$$

$u(y \mid \theta)-u(0 \mid \theta)=v(y \mid \theta)$ とおくと

$$u_n(y \mid \theta)-n\,u(0 \mid \theta)=v(y \mid \theta)$$

$y=\sum_{i=1}^{n} y_i$ とおくと，

$$\begin{aligned} v(\Sigma y_i \mid \theta) &= u_n(\Sigma y_i \mid \theta)-n\,u(0 \mid \theta) \\ &= \Sigma\, u_n(y_i \mid \theta)-n\,u(0 \mid \theta) \\ &= \sum_{i=1}^{n}\left(u(y_i \mid \theta)-u(0 \mid \theta)\right) \end{aligned}$$

であるから

(4.6) $$v(\Sigma y_i \mid \theta)=\Sigma\, v(y_i \mid \theta)$$

これはよく知られた函数方程式であって，F が単調函数なることより u 従って v も単調函数となりその解は一意的にきまる。(4.6)の解は $v(y \mid \theta)=A(\theta)\,y$，　但し $A(\theta)=v(1 \mid \theta)$.

従って (4.5) の解は一意的に

(4.7) $$u(y \mid \theta)=A(\theta)\,y+B(\theta),\quad \text{但}\ B(\theta)=u(0 \mid \theta)$$

更に $A(\theta)=A(\theta_1,\theta_2,\theta_3,\theta_4)$，$B(\theta)=B(\theta_1,\theta_2,\theta_3,\theta_4)$ が形を決定する。

F の條件 v) より　$u(y \mid \theta_1,\theta_2,\theta_1,\theta_2)=y$　であるから

$$A(\theta_1,\theta_2,\theta_1,\theta_2)\,y+B(\theta_1,\theta_2,\theta_1,\theta_2)=y$$

より

(4.8) $A(\theta_1, \theta_2, \theta_1, \theta_2) = 1$

(4.9) $B(\theta_1, \theta_2, \theta_1, \theta_2) = 0$

又 vi) より $u(u(y\mid\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4)\mid\theta_3, \theta_4, \theta_5, \theta_6)$

$= u(y\mid\theta_1, \theta_2, \theta_5, \theta_6)$ だから

$$A(\theta_3, \theta_4, \theta_5, \theta_6)\{A(\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4)y + B(\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4)\} + B(\theta_3, \theta_4, \theta_5, \theta_6)$$
$$= A(\theta_1, \theta_2, \theta_5, \theta_6)y + B(\theta_1, \theta_2, \theta_5, \theta_6)$$

故に

(4.10) $A(\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4)\cdot A(\theta_3, \theta_4, \theta_5, \theta_6) = A(\theta_1, \theta_2, \theta_5, \theta_6)$

(4.11) $A(\theta_3, \theta_4, \theta_5, \theta_6)\,B(\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4) + B(\theta_3, \theta_4, \theta_5, \theta_6) = B(\theta_1, \theta_2, \theta_5, \theta_6)$

$\theta_5 = \theta_1$, $\theta_6 = \theta_2$ とおくと (4.8) (4.10) 及び (4.9) (4.11) より夫々

(4.12) $A(\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4)\cdot A(\theta_3, \theta_4, \theta_1, \theta_2) = 1$

(4.13) $A(\theta_3, \theta_4, \theta_1, \theta_2)\cdot B(\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4) + B(\theta_3, \theta_4, \theta_1, \theta_2) = 0$

そこで

(4.14) $C(\theta_1, \theta_2) = A(0, 1, \theta_1, \theta_2)$

とおくと $A(\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4) = \log F(e\mid\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4) - \log F(1\mid\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4)$

より

(4.15) $C(\theta_1, \theta_2) \begin{cases} = 0, & \theta_1 = \theta_2, \\ \neq 0, & \theta_1 \neq \theta_2, \end{cases}$

(4.16) $C(0, 1) = 1$

(是は條件 V)による)．従って $\theta_1 \neq \theta_2$ ならば

(4.17) $A(\theta_1, \theta_2, 0, 1) = \dfrac{1}{C(\theta_1, \theta_2)}$

(4.10) に (4.14) (4.17) を代入すると

(4.18) $$A(\theta_1,\theta_2,\theta_3,\theta_4)=\frac{C(\theta_3,\theta_4)}{C(\theta_1,\theta_2)}$$

又

(4.19) $$B(0,1,\theta_1,\theta_2)=D(\theta_1,\theta_2)$$

とおくと (4.15) より

(4.20) $$B(\theta_1,\theta_2,0,1)=-\frac{D(\theta_1,\theta_2)}{C(\theta_1,\theta_2)}$$

従って (4.11) より

(4.21) $$B(\theta_1,\theta_2,\theta_3,\theta_4)=D(\theta_3,\theta_4)-\frac{C(\theta_3,\theta_4)}{C(\theta_1,\theta_2)}D(\theta_1,\theta_2).$$

(4.18) (4.21) を (4.7) に代入して得られる式

(4.22) $$u(y|\theta)=\frac{C(\theta_3,\theta_4)}{C(\theta_1,\theta_2)}y+D(\theta_3,\theta_4)-D(\theta_1,\theta_2)\frac{C(\theta_3,\theta_4)}{C(\theta_1,\theta_2)}$$

（但 $C(\theta,\theta)=0$）

は定理Iの函数Fより作られたuの方程式 (4.5) の解である。従って定理Iと共に次の定理を得る。

定理II　σがすべてのnに対してΩ^nの確率分布P^nの*dissipative*な変換であるための必要充分條件はこの假設型$f(\omega|\theta)$について $\log f(\omega|\theta_1)-\log f(\omega|\theta_2)=y_1$, $\log f(\omega|\theta_3)-\log f(\omega|\theta_4)=y_2$ が

(4.23) $$y_2=\frac{C(\theta_3,\theta_4)}{C(\theta_1,\theta_2)}y_1+D(\theta_3,\theta_4)-D(\theta_1,\theta_2)\frac{C(\theta_3,\theta_4)}{C(\theta_1,\theta_2)}$$ （但 $C(\theta,\theta)=0$）

を満すことである。

(4.23)を $\log f(\omega|\theta_1)-\log f(\omega|\theta_2)=y$ が満すときは

$$\frac{1}{C(\theta_3,\theta_4)}\{\log f(\omega|\theta_3)-\log f(\omega|\theta_4)-D(\theta_3,\theta_4)\}$$
$$=\frac{1}{C(\theta_1,\theta_2)}\{\log f(\omega|\theta_1)-\log f(\omega|\theta_2)-D(\theta_1,\theta_2)\}$$

が成立する。即ちこの両辺はθの値に無関係に一定なことを示す式で単にωの函数である。従つて

$$\frac{1}{C(\theta_1,\theta_2)}\left\{\log f(\omega|\theta_1)-\log f(\omega|\theta_2)-D(\theta_1,\theta_2)\right\}=\pi(\omega). \tag{4.24}$$

$f(\omega|0)\equiv 1$, $\log f(\omega|0)\equiv 0$ であるから $\theta_1=\theta$, $\theta_2=0$, $C(\theta,0)=p(\theta)$, $D(\theta,0)=r(\theta)$ とおくと，(4.24)は

$$\frac{1}{p(\theta)}\left\{\log f(\omega|\theta)-r(\theta)\right\}=\pi(\omega),$$

即ち

$$\log f(\omega|\theta)=\pi(\omega)p(\theta)+r(\theta),$$

$$f(\omega|\theta)=e^{\pi(\omega)p(\theta)+r(\theta)}. \tag{4.25}$$

逆に$f(\omega|\theta)$が(4.25)であるなら方程式(4.23)を満す

尚 $p(\ )=C(0,0)=0$であるから$r(0)=0$であることに注意しなければならない

更に(4.25)を(4.24)に代入すると，

$$\begin{cases} C(\theta_1,\theta_2)=p(\theta_1)-p(\theta_2) \\ D(\theta_1,\theta_2)=r(\theta_1)-r(\theta_2) \end{cases} \tag{4.26}$$

Fが性質 i), ii)を満すときは

$$\frac{C(\theta_3,\theta_4)}{C(\theta_1,\theta_2)}=\frac{p(\theta_3)-p(\theta_4)}{p(\theta_1)-p(\theta_2)}$$

が$\theta_1>\theta_2$, $\theta_3>\theta_4$ か $\theta_1<\theta_2$, $\theta_3<\theta_4$ なるとき正，$\theta_1>\theta_2$, $\theta_3<\theta_4$ か $\theta_1<\theta_2$, $\theta_3>\theta_4$ のとき負でなければならないから $p(\theta)$ は $-\infty<\theta<\infty$ で単調函数でなければならない。

即ち次の定理が得られる

定理Ⅲ　σ がすべての n に対して Ω^n の確率分布 P^n の dissipative な変換であるための必要條件はこの σ による假説型 $\{\sigma^\theta P\}$ の p.d.f. $f(\omega|\theta)$ が montone function $p(\theta)$ で

$$f(\omega|\theta)=e^{\pi(\omega)p(\theta)+r(\theta)}$$

なる形であることである.

さて Ω が実数空間 R で Ω^n が n 次元の Enclid space (sample space) であるときは Lebesgue measure m に対して

$$\sigma^\theta P(E)=\int_E p(x|\theta)\,dm$$

とすると $f(\omega|\theta)=\dfrac{p(x|\theta)}{p(x|0)}$ であるから $f(x|\theta)=e^{R(x)p(\theta)+r(\theta)}$

であるときは $p(x|0)=e^{g(x)}$ とおくと

(4.26)　$$p(x|\theta)=e^{k(x)p(\theta)+r(\theta)+g(x)}$$

Koopman によれば[1] $f(x|\theta)$ なる分布密度をもつ母集団からの任意見本による sufficient estimation がすべての大さの sample について存在するための必要充分條件は (4.26) で与えられてゐる。従つてこれは Koopman の定理の特殊な場合である。

---

1) Koopman. Trans. Amer. Math. Soc. vol. 39 (1936); On distributions addmiting On sufficient statistics.

注意(4.27)、上の(4.26)が出るのはΩが必ずしも実数空間である必要はなくPと互に絶対連続な測度mが与えられてゐるときはその測度に対する$\sigma^\theta P$の密度函数$p(\omega|\theta)$が(4.26)なる形となる.

§5. 表現函数の性質

この§以後は変換σは *dissipative* であるとする。

(3.2)で定義された表現函数 $\gamma(\alpha|\theta)=\sigma^\theta P(\Omega_\alpha)=\int p(\alpha|\theta)d\alpha$ については§3で一寸ふれておいたがここで更にくわしく論じよう。そのために此処にもう一度$\gamma(\alpha|\theta)$の性質を述べておくと、

i) $\gamma(0|\theta)=0$, $\gamma(1|\theta)=1$ (for all θ) なる連続函数

ii) すべてのθで単調増加, $\theta>0$なら上に凸, $\theta<0$なら上に凹; $\theta=0$で$\gamma(\alpha|\theta)=\alpha$ 従って左及び右の微係数はいたるところ存在し、可附番個の点をのぞけば微分可能である。

iii) $\gamma(\gamma(\alpha|\theta_1)|\theta_2)=\gamma(\alpha|\theta_1+\theta_2)$

i), ii), iii)より$\gamma(\alpha|\theta)$に関する多くの性質が出る。それを次に述べよう。(大部分は岩村聯氏によって証明されたもので次の論文"函数方程式$F(F(x,\theta_1)\theta_2)=F(x,\theta_1+\theta_2)$について"を参照されたい).

iv) $\gamma(\alpha|\theta)=\gamma$のグラフは$\gamma=\alpha$なる直線に対して$\gamma=\gamma(\alpha|\theta)$と$\gamma=(\alpha|-\theta)$とは対称である.

v) $1>\alpha>0$なるすべてのαに対して$1>\gamma(\alpha|\theta)>0$で, $\gamma(\alpha|\theta)$はθに関して連続, 単調増加, 且 $\lim_{\theta\to\infty}\gamma(\alpha|\theta)=1$,

$\lim_{\theta \to -\infty} \gamma(\alpha | \theta) = 0$

vi) θの値如何に関せずαに関してすべての点で微分可能

vii) θに関しても偏導函数$\varphi_\alpha(-\theta)$が存在し

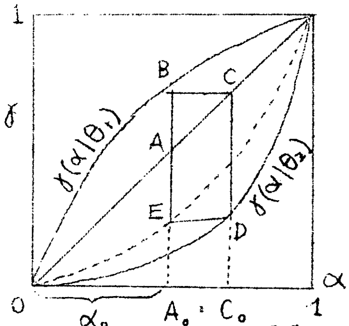
$$\gamma(\alpha | \theta) = \int_{-\infty}^{\theta} \varphi_\alpha(-\theta)\, d\theta = \int_{-\theta}^{\infty} \varphi_\alpha(\theta)\, d\theta \tag{5.1}$$

viii) $\varphi_\alpha(\theta)$は如何なるαに対しても、θの函数として$\varphi_\alpha(\theta)$を最大ならしめるθの値は一つ只一つある。特にすべてのθで$\frac{d}{d\theta}\varphi_\alpha(\theta)$が存在すれば$\frac{d}{d\theta}\varphi_\alpha(\theta) = 0$の解は unique である。

ix) $\gamma(\alpha | \theta)$はある単調函数$f(\alpha)$及び正数aによって次の様な形に写る

$$\gamma(\alpha | \theta) = f^{-1}(a^{\theta} f(\alpha)) \tag{5.2}$$

尚$\gamma(\alpha | \theta_1)$と$\gamma(\alpha | \theta_2)$より$\gamma(\alpha | \theta_1 + \theta_2)$を求める図表上での方法は次の通りである。

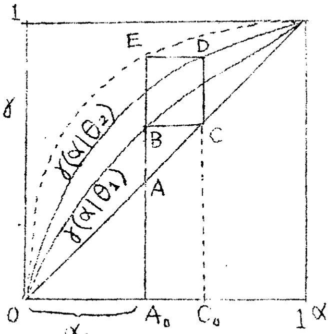


$\theta_1 > 0 > \theta_2$の場合

$\alpha = \alpha_0$における$\gamma(\alpha_0 | \theta_1 + \theta_2)$を求めるとする。$\alpha$軸上に$A_0$を$A_0 O = \alpha$ととり、$A_0$より$\alpha$軸に立てた垂線と直線$\gamma = \alpha$との交りをAとする　又$A_0 A$と$\gamma = \gamma(\alpha | \theta_1)$の graph との交りをB、Bを通る$\alpha$軸の平行線と$\gamma = \alpha$との交りをC、Cより$\alpha$軸への垂線と$\gamma = \gamma(\alpha | \theta_2)$の graph との交りをD、Dを通る$\alpha$軸の平行線とAB（又はその延長）との交りをEとすればEは$\gamma(\alpha | \theta_1 + \theta_2) = \gamma$のグラフ上の点である。

何となれば$OA_0 = \alpha_0$であるから$A_0 B = \gamma(\alpha_0 | \theta_1)$、Cから$\alpha$軸への垂線の足を$C_0$とすれば$OC_0 = CC_0 = A_0 B = \gamma(\alpha_0 | \theta_1)$、故に

$C_0D = \gamma(OC_0 | \theta_2) = \gamma(\gamma(\alpha_0 | \theta_1) | \theta_2) = \gamma(\alpha_0 | \theta_1 + \theta_2)$, $C_0D =$ A_0E であるから $A_0E = \gamma(\alpha_0 | \theta_1 + \theta_2)$. $OA_0 = \alpha_0$ より E は $\gamma = \gamma(\alpha_0 | \theta_1 + \theta_2)$ 上の点である。



$\theta_2 > \theta_1 > 0$ の場合

録4～⑨定理VI及びVIIによれば対立仮設$\sigma^\theta P, P$ からΩのn箇の直積空間に確率分布$\sigma^\theta P^n, P^n$を作るとき$\sigma^\theta P^n, P^n$の検定力函数を$\beta^n(\alpha | \theta)$とするとき

$$\beta^{n+1}(\alpha | \theta) \leqq \beta^n(\alpha | \theta)$$

及び

$$\lim_{n \to \infty} \beta^n(\alpha | \theta) = 0, \text{ for all } 0 < \alpha < 1$$

然るに $\theta > 0$ なるとき(3.10)なる関係があり、$\theta < 0$ では $\theta > 0$ なるときの対称な函数であるから、

X) Ω^nにおけるσの表現函数を$\gamma^n(\alpha | \theta)$とすると

$\theta > 0$ なら $\gamma^{n+1}(\alpha | \theta) \geqq \gamma^n(\alpha | \theta)$,

$\theta < 0$ なら $\gamma^{n+1}(\alpha | \theta) \leqq \gamma^n(\alpha | \theta)$,

$\theta = 0$ なら $\gamma^n(\alpha | \theta) = \alpha$.

XI) $\theta > 0$ なら $\lim_{n \to \infty} \gamma^n(\alpha | \theta) = 1$.

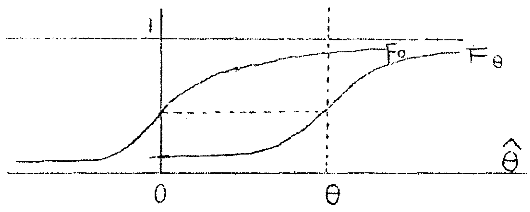
$\theta < 0$ なら $\lim_{n \to \infty} \gamma^n(\alpha | \theta) = 0$.

§6 一様推定値 (Uniform estimation)

この§でも $\Omega, \mathcal{B}, P, \omega, f(\omega | \theta)$ をもって $\Omega^n, \mathcal{B}^n, P^n, \omega = (\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n)$, $\Pi f(\omega_i | \theta)$ を代表する。

母集団の Parameter θ の estimation $\hat{\theta}(\omega)$ が θ の値如何に関せず $\hat{\theta}$ の分布が θ からの距離のみで定まる場合が統計の場合は必要であると思うのにあまり論ぜられてゐない。この様なときは $\hat{\theta}$ の分布状態はすべての θ について考える必要はなく一つの θ についてのみ考えれば充分であらう。そのために次の定義をする。

定義へ) parameter θ をふくむ確率分布 $P_\theta(E)$ の推定量 $\hat{\theta}(\omega)$ が P_θ による分布函数 $F_\theta(\hat{\theta})=P_\theta(\omega|\hat{\theta}(\omega)\leqq\hat{\theta})$ をもつとき，すべての θ, $\hat{\theta}$ について



(6.1) $$F_\theta(\hat{\theta})=F_0(\hat{\theta}-\theta)$$

ならば一様推定値と云う。

このとき $F_\theta(\hat{\theta})$ は $F_0(\hat{\theta})$ を θ だけ右側にずらした函数となる。

dissipative な変換 σ のある確率分布に対してこの様な推定値があることをここで示さう。

定義ト) $\{\sigma^\theta P\}$ なる假設型に対して棄却域系を $\mathbb{R}$ とする。$0<\alpha<1$ なる α に対して $\alpha=P(R_\alpha)$ なる $\mathbb{R}$ の要素 R_α をとり，Ω の任意の要素 ω に対し

(6.2) $$\hat{\theta}_\alpha(\omega)=\sup(\theta|\omega\in\sigma^\theta R_\alpha)$$

を θ の α-estimation（α-推定値）とゆう。

とゆう。

α-estimation $\hat{\theta}_\alpha(\omega)$ をこの様に定義するとき $\hat{\theta}_\alpha(\omega)$ と σ^θ との

関係をしらべてみる

$$\hat{\theta}_\alpha(\sigma^\theta\omega)=\sup(\theta'|\sigma^\theta\omega\in\sigma^{\theta'}R_\alpha)=\sup(\theta'|\omega\in\sigma^{\theta'-\theta}R_\alpha)$$
$$=\sup(\theta'|\omega\in\sigma^{\theta'}R_\alpha)+\theta=\hat{\theta}_\alpha(\omega)+\theta,$$

即ち

lemma (6.3) α-estimation についてはすべての θ について

$$\hat{\theta}_\alpha(\sigma^\theta\omega)=\hat{\theta}_\alpha(\omega)+\theta.$$

次に $\hat{\theta}_\alpha(\omega)$ の分布函数 $D_\alpha(\hat{\theta}|\theta)=\sigma^\theta P(\hat{\theta}_\alpha(\omega)\leqq\hat{\theta})$ については

(6.4) $\quad [\omega|\hat{\theta}_\alpha(\omega)\leqq\hat{\theta}]=\Omega-\bigcup_{\theta>\hat{\theta}}\sigma^\theta R_\alpha$ [1]

なることを利用すると

$$D_\alpha(\hat{\theta}|\theta)=\sigma^\theta P(\hat{\theta}_\alpha(\omega)\leqq\hat{\theta})=\sigma^\theta P(\Omega-\bigcup_{\theta>\hat{\theta}}\sigma^{\theta'}R_\alpha)=P(\Omega-\bigcup_{\theta'>\hat{\theta}}\sigma^{\theta'-\theta}R_\alpha)$$
$$=P(\Omega-\bigcup_{\theta>\hat{\theta}-\theta}\sigma^{\theta'}R_\alpha)=P(\hat{\theta}_\alpha(\omega)\leqq\hat{\theta}-\theta)=D_\alpha(\hat{\theta}-\theta|0).$$

即ち定義へ) (6.1) より

lemma (6.5) α-estimation $\hat{\theta}_\alpha(\omega)$ は一様推定値である.

更に

$$D_\alpha(\hat{\theta}|0)=P(\Omega-\bigcup_{\theta'>\hat{\theta}}\sigma^{\theta'}R_\alpha)=\sigma^{-\hat{\theta}}P(\Omega-\bigcup_{\theta'>0}\sigma^{\theta'}R_\alpha)=\sigma^{-\hat{\theta}}P(\bigcap_{\theta'>0}(\Omega-\sigma^{\theta'}R_\alpha))$$
$$=\inf_{\theta'>0}\sigma^{-\hat{\theta}}P(\Omega-\sigma^{\theta'}R_\alpha)=1-\sup_{\theta'>0}\sigma^{-\hat{\theta}}P(\sigma^{\theta'}R_\alpha)=1-\sup_{\theta'>0}\gamma(\alpha|-\hat{\theta}-\theta').$$

ところが §5 V)より γ は θ の連続函数であるから

$$\sup_{\theta'>0}\gamma(\alpha|-\hat{\theta}-\theta')=\gamma(\alpha|-\hat{\theta}).$$

従って

(6.6) $\quad \begin{cases} D_\alpha(\hat{\theta}|0)=1-\gamma(\alpha|-\hat{\theta}) \\ D_\alpha(\hat{\theta}|\theta)=1-\gamma(\alpha|\theta-\hat{\theta}) \end{cases}$

---

1) この式及び $\sigma^\theta R_\alpha$ が θ に対して monotone なことより $\hat{\theta}_\alpha(\omega)$ の measurability が明かである.

lemma (6.7)　α-estimation $\hat{\theta}_\alpha$ の分布函数は (6.6) で与えられる。

岩村氏によって証明された §5 の γ の性質 ix) により $\gamma(\alpha|\theta)$ は θ に関していたる所微分可能で $\gamma_\theta(\alpha|\theta) = \varphi_\alpha(-\theta)$ とおいたから $D_\alpha(\theta|0)$ は微分可能で

$$\frac{d}{d\theta} D_\alpha(\theta|0) = \varphi_\alpha(\theta). \tag{6.8}$$

従って又

$$\frac{d}{d\hat{\theta}} D_\alpha(\hat{\theta}|\theta) = \frac{d}{d\hat{\theta}} D_\alpha(\hat{\theta}-\theta|0) = \varphi_\alpha(\hat{\theta}-\theta). \tag{6.9}$$

即ち parameter θ なる母集団分布に対する $\hat{\theta}_\alpha$ の分布密度は $\varphi_\alpha(\hat{\theta}-\theta)$ である。

尚 §5 ix) によれば $\varphi_\alpha(\hat{\theta}-\theta)$ は maximum が只一つだけであるし、

$$\begin{cases} P(\hat{\theta}_\alpha > 0) = 1 - D_\alpha(0|0) = \gamma(\alpha|0) = \alpha \\ \sigma^\theta P(\hat{\theta}_\alpha > \theta) = 1 - D_\alpha(\theta|\theta) = 1 - D_\alpha(0|0) = \alpha \end{cases} \tag{6.10}$$

§7.　α-estimation は optimum である。

I.　α-estimation $\hat{\theta}(\omega|\alpha)$ は consistent である。

$(\Omega^n, \mathfrak{B}^n, \sigma^\theta P^n)$ における α-estimation を $\hat{\theta}_\alpha^n$、その分布函数を $D_\alpha^n(\hat{\theta}_\alpha^n|\theta)$ とかけば (6.6) 及び §5. xi) により

$$\begin{aligned} \lim D_\alpha^n(\hat{\theta}_\alpha^n|\theta) = 1 - \lim \gamma^n(\alpha|-\hat{\theta}_\alpha^n+\theta) &= 0 \qquad \theta > \hat{\theta}_\alpha^n \\ &= 1 \qquad \theta < \hat{\theta}_\alpha^n \\ &= \alpha \qquad \theta = \hat{\theta}_\alpha^n \end{aligned}$$

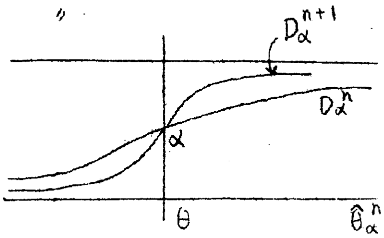
であるから $\hat{\theta}_\alpha^n$ は consistent である。

尚ついでに §5 x) によると

$$\theta > \hat{\theta}_\alpha^n \text{ なるとき}\quad D_\alpha^{n+1}(\hat{\theta}_\alpha^n|\theta) \leqq D_\alpha^n(\hat{\theta}_\alpha^n|\theta)$$

$\theta < \hat{\theta}_\alpha^n$ なるとき　$D_\alpha^{n+1}(\hat{\theta}_\alpha^n|\theta) \geqq D_\alpha(\hat{\theta}_\alpha^n|\theta)$

$\theta = \hat{\theta}_\alpha^n$ では　　〃　=　〃



なることがなりたつことに注意したい。

II. α-estimation は sufficient estimation である。

sufficient なる概念をはっきりさせるために次の定義をおく。

定義チ)[1] parameter θ なる分布において確率変数(推定量)$u(\omega)$ の値が u なるときの $J(\in \mathfrak{B})$ の条件附確率 $\sigma^\theta P(J|u(x)=u)$ とは

(7.1)　$\sigma^\theta P(J \frown E^*) = \int_E \sigma^\theta P(J|u(\omega)=u)\,\sigma^\theta p^{(u)}(du),\ E^* = (\omega|u(\omega)\in E)$

で定義される。但ここで E は Lebesgue measurable set, $\sigma^\theta p^{(u)}(E) = \sigma^\theta P(\omega|u(\omega)\in E)$ 又 $u(\omega)=u$ なるとき確率変動数(推定量)$v(\omega)$ の分布函数 $D(v|u,\theta)$ は

(7.2)　$D(v|u,\theta) = \sigma^\theta P\{(\omega|v(\omega)\leqq v)\,|\,u(\omega)=u\}$

である。

定義リ)推定量 $u(\omega)$ が推定量 $v(\omega)$ に対して sufficient であるとは

$$D(v|u,\theta_1) = D(v|u,\theta_2) \quad \text{for all } \theta_1, \theta_2 \quad -\infty < u < \infty$$

なること。

従ってこの場合 $D(v|u,\theta)$ は θ に無関係だから

(7.3)　$D(v|u,\theta) = D(v|u)$

---

1) Kolmogoroff: Grundbegriffe S.42. Kap V §1. (1) 参照.

とかくことが出来る.

定義り) 推定量 $u(\omega)$ がすべての確率変数(推定量)に対して sufficient であるとき、<u>sufficient</u> であるという.

lemma (7.4) 推定量 $u(\omega)$ が sufficient なるための必要充分条件はすべての集合 $J (\in \mathfrak{B})$ に対して

$$(7.5) \qquad \sigma^{\theta} P(J \mid u(\omega) = u) = P(J \mid u(\omega) = u)$$

なることである。

lemma (7.4) によつて α-estimation $\hat{\theta}_\alpha(\omega)$ が sufficient なことを示さう. $\sigma^{\theta} P(J \mid \hat{\theta}_\alpha(\omega) = \hat{\theta})$ は定義により

$$(7.6) \qquad \sigma^{\theta} P(J \frown \sigma^{\hat{\theta}} R_\alpha) = \int_{\hat{\theta}}^{\infty} \sigma^{\theta} P(J \mid \hat{\theta}_\alpha(\omega) = \hat{\theta}) \sigma^{\theta} P(\omega \mid \hat{\theta}_\alpha(\omega) \in d\hat{\theta})$$

(6.6) により $\sigma^{\theta} P(\omega \mid \hat{\theta}_\alpha(\omega) \leqq \hat{\theta}) = 1 - \gamma(\alpha \mid \theta - \hat{\theta})$ であるから (7.6) を Stieltjes 式積分で書けば α, θ を固定して

$$(7.7) \qquad \sigma^{\theta} P(J \frown \sigma^{\hat{\theta}} R_\alpha) = -\int_{\hat{\theta}}^{\infty} \sigma^{\theta} P(J \mid \hat{\theta}_\alpha(\omega) = \hat{\theta}) d\gamma(\alpha \mid \theta - \hat{\theta})$$

又 $f(\omega \mid \theta)$ を用いて左辺を書きなおすと

$$(7.8) \qquad \sigma^{\theta} P(J \frown \sigma^{\hat{\theta}} R_\alpha) = \int_{J \frown \sigma^{\hat{\theta}} R_\alpha} f(\omega \mid \theta) dP(d\omega) = \int_{\sigma^{\hat{\theta}} R_\alpha} f(\omega \mid \theta) C_J(\omega) P(d\omega),$$

(但しここで $C_J(\omega)$ は集合 J の characteristic function とする)

故に (7.7) (7.8) より

$$(7.9) \qquad \int_{\sigma^{\hat{\theta}} R_\alpha} f(\omega \mid \theta) C_J(\omega) P(d\omega) = -\int_{\hat{\theta}}^{\infty} \sigma^{\theta} P(J \mid \hat{\theta}_\alpha(\omega) = \hat{\theta}) d\gamma(\alpha \mid \theta - \hat{\theta}).$$

$\theta = 0$ とすると $f(\omega \mid \theta) \equiv 1$ であるから

$$(7.10) \qquad \int_{\sigma^{\hat{\theta}} R_\alpha} C_J(\omega) P(d\theta) = -\int_{\hat{\theta}}^{\infty} P(J \mid \hat{\theta}_\alpha(\omega) = \hat{\theta}) d\gamma(\alpha \mid -\hat{\theta}).$$

§ 3.172頁脚註 1) における $f(\omega \mid \theta)$ と $k(\alpha \mid \theta)$ との関係

$$f(\omega|\theta)=k(\alpha|\theta) \qquad \omega\in R_\alpha-\bigcup_{\alpha'>\alpha}R_{\alpha'}$$

及び　，$\sigma^{\hat\theta}R_\alpha=R_{\gamma(\alpha|-\hat\theta)}$ なることを利用すると.

(7.11) $\quad f(\omega|\theta)=k(\gamma(\alpha|-\hat\theta)|\theta),\quad \omega\in\sigma^{\hat\theta}R_\alpha-\bigvee_{\theta>\hat\theta}\sigma^{\theta}R_\alpha.$

(7.10)(7.11)より (7.9)の左辺は

$$\int_{\sigma^{\hat\theta}R_\alpha}f(\omega|\theta)C_J(\omega)P(d\omega)=-\int_{\hat\theta}^{\infty}k(\gamma(\alpha|-\hat\theta)|\theta)P(J|\hat\theta_\alpha(\omega)$$
$$=\hat\theta)\,d\gamma(\alpha|-\hat\theta)$$

然るに(3.2)より

(7.11.1) $\quad \gamma(\alpha|\theta-\hat\theta)=\gamma(\gamma(\alpha|-\hat\theta)|\theta)=\int_0^{\gamma(\alpha|-\hat\theta)}k(\xi|\theta)\,d\xi$

$$=-\int_{\hat\theta}^{\infty}k(\gamma(\alpha|-\hat\theta)|\theta)\,d\gamma(\alpha|-\hat\theta)$$

であるから

(7.12)' $\quad \int_{\sigma^{\hat\theta}R_\alpha}f(\omega|\theta)C_J(\omega)P(d\omega)$

$$=-\int_{\hat\theta}^{\infty}P(J|\hat\theta_\alpha(\omega)=\hat\theta)\,d\gamma(\alpha|\theta-\hat\theta)$$

(7.9)(7.12)より

$$\int_{\hat\theta}^{\infty}\sigma^{\theta}P(J|\hat\theta_\alpha(\omega)=\hat\theta)\,d\gamma(\alpha|\theta-\hat\theta)$$
$$=\int_{\hat\theta}^{\infty}P(J|\hat\theta_\alpha(\omega)=\hat\theta)\,d\gamma(\alpha|\theta-\hat\theta)$$

$\gamma(\alpha|\theta-\hat\theta)$ は $\hat\theta$ に関して variation は常に負であるから

(7.12) $\quad \sigma^{\theta}P(J|\hat\theta_\alpha(\omega)=\hat\theta)=P(J|\hat\theta_\alpha(\omega)=\hat\theta),$

almost everywhere (Lebesgue).

定理IV $\hat\theta_\alpha(\omega)$は Sufficient estimation である.

III　α-estimation $\hat\theta_\alpha(\omega)$の efficiency

$\hat{\theta}_\alpha(\omega)$ の efficiency を論ずる場合は普通平均の廻りの二次能率分散で論ずるのであるがここでは分散は勿論平均も存在することを假定してゐない。従つてやゝ異つた観点よりこの問題に進んでみる。

ある統計量(random variable) $y(\omega)$ に対して

$$S_y = [\omega \mid y(\omega) \leqq y], \quad P(S_y) = G(y)$$

とおくとき $y_1 > y_2$, $G(y_1) = G(y_2)$ なる y_1, y_2 があれば $P[S_{y_1} - S_{y_2}] = 0$, $\sigma^{-\theta}P$ は P に対して絶対連続であるから $\sigma^{-\theta}P(S_{y_1} - S_{y_2}) = 0$ $\therefore \sigma^{-\theta}P(S_{y_1}) = \sigma^{-\theta}P(S_{y_2})$ となる。故に $\sigma^{-\theta}P(S_y)$ は y の函数であるが $G(y)$ の函数と見なすことも出来る。故に

$$\sigma^{-\theta}P(S_y) = \xi(G(y) \mid \theta) \tag{7.14}$$

とおくとき Neyman-Pearson の理論[1] よりすべての α に対して

$$(7.15)\quad \begin{cases} \theta > 0 \text{ なら } & \gamma(\alpha \mid \theta) \geqq \xi(\alpha \mid \theta), \\ \theta < 0 \text{ なら } & \gamma(\alpha \mid \theta) \leqq \xi(\alpha \mid \theta), \\ \theta = 0 \text{ なら } & \gamma(\alpha \mid 0) = \xi(\alpha \mid 0) = \alpha. \end{cases}$$

この γ と ξ との関係を利用して(6.6)より $\delta > 0$ ならば

$$D_\alpha(\theta+\delta \mid \theta) - D_\alpha(\theta-\delta \mid \theta) = (1-\gamma(\alpha \mid -\delta)) - (1-\gamma(\alpha \mid \delta))$$
$$= \gamma(\alpha \mid \delta) - \gamma(\alpha \mid -\delta) \geqq \xi(\alpha \mid \delta) - \xi(\alpha \mid -\delta).$$

$\alpha = G(y)$ とおくと

$$D_\alpha(\theta+\delta \mid \theta) - D_\alpha(\theta-\delta \mid \theta) = D_\alpha(\delta \mid 0) - D_\alpha(-\delta \mid 0)$$
$$\geqq \sigma^{\delta}P(S_y) - \sigma^{-\delta}P(S_y)$$

1) 録4-⑨ lemma (1.4) P.106 参照

$G(y|\theta)=\sigma^{\theta}P(S_y)$ とおくと

(7.16) $$D_{\alpha}(\delta|0)-D_{\alpha}(-\delta|0)\geqq G(y|-\delta)-G(y|+\delta)$$

y が uniform estimation ならば $G(y|\theta)=G(y-\theta|0)$ であるから $\alpha_0=G(0|0)$ とおくと

$$D_{\alpha_0}(\delta|0)-D_{\alpha_0}(-\delta|0)\geqq G(\delta|0)-G(-\delta|0)$$

故に $\hat{\theta}_{\alpha_0}$, y が uniform なることより

(7.17) $$D_{\alpha_0}(\theta+\delta|\theta)-D_{\alpha_0}(\theta-\delta|\theta)\geqq G(\theta+\delta|\theta)-G(\theta-\delta|\theta)$$

定義ヌ) 統計量 $y(\omega)$ について

$$e(\delta|\theta,y)=\sigma^{\theta}P(\theta-\delta<y(\omega)\leqq\theta+\delta)$$

を θ における y の efficiency function (効力函数) と云う.

もし y が一様統計量なるときは

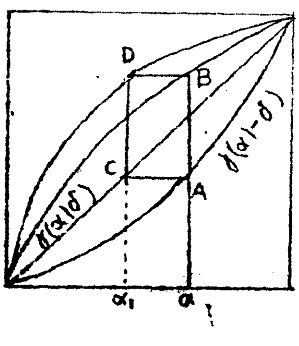
(7.18) $$e(\delta|\theta,y)=G(\theta+\delta|\theta)-G(\theta-\delta|\theta)$$
$$=G(\delta|0)-G(-\delta|0)=e(\delta|0,y).$$

従つて α-estimation $\hat{\theta}_{\alpha}(\omega)$ については

(7.19) $$e(\delta|\theta,\hat{\theta}_{\alpha})=e(\delta|0,\hat{\theta}_{\alpha})=D_{\alpha}(\delta|0)-D_{\alpha}(-\delta|0)$$
$$=\gamma(\alpha|\delta)-\gamma(\alpha|-\delta)$$

$\alpha_1=\gamma(\alpha|-\delta)$ とおくと

$$=\gamma(\alpha_1|2\delta)-\alpha_1$$



従つて $\gamma(\alpha|\theta)$ のグラフから $e_{\alpha}(\delta)=e(\delta|0,\hat{\theta}_{\alpha})$ を作図によつて求めることが出来る.

α において α 軸に垂線をたて $\gamma=\gamma(\alpha|-\delta)$ との交りを A, $\gamma=\gamma(\alpha|\delta)$ との交りを B と

すると $\overline{AB}=l_\alpha(\delta)$ である。或は $x_1=\gamma(\alpha|1-\delta)$ より α軸に垂線を立て $\gamma=\alpha$, $\gamma=\gamma(\alpha|2\delta)$ との交りを夫々 C, D とすると $\overline{CD}=\overline{AB}=l_\alpha(\delta)$

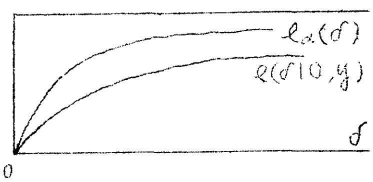
この効力函数を用いると一様推定量 y に対して (7.17) より

(7.20) $$l_\alpha(\delta)\geqq e(\delta|0,y)$$

定義ル) 二つの統計量 x, y の efficiency function が

$$e(\delta|\theta,x)\geqq e(\delta|\theta,y),\quad \text{for all } \theta$$

なるとき x は y よりも <u>一様に efficiency</u> であるとゆう。



この定義によると (7.20) より

定理V $\hat{\theta}_\alpha$ はいかなる一様推定値よりも一様に efficient である。

効力函数 $e(\delta|\theta,y)$ によって一様に efficiency を考へる理由は次の様である。統計量 y が平均値 $\int_{-\infty}^{\infty}y\,dG(y)=\theta$ 及び分散 $\sigma_y^2=\int_{-\infty}^{\infty}(y-\theta)^2dG(y)$ が存在するとき $y-\theta=\delta$ とおくならば

(7.21) $$\sigma_y^2=\int_{-\infty}^{\infty}(y-\theta)^2dG(y)=\int_0^{\infty}\delta^2dG(\theta+\delta)+\int_{-\infty}^{0}\delta^2dG(\theta+\delta)$$

$$=\int_0^{\infty}\delta^2dG(\theta+\delta)-\int_0^{\infty}\delta^2dG(\theta-\delta)$$

$$=\int_0^{\infty}\delta^2de(\delta|\theta,y).\quad (\text{但 }\theta, y\text{ は固定})$$

二つの不編統計量 y_1, y_2 の効力函数 $e(\delta|\theta_1y_1)$, $e(\delta|\theta_2y_2)$ が

$$e(\delta|\theta,y_1)\geqq e(\delta|\theta,y_2)$$

ならば δ^2 は δ の monoton increasing function であるから

$$\int_0^\infty \sigma\, dp(\sigma\,|\,\theta, y_1) \leqq \int_0^\infty \sigma^2\, dp(\sigma\,|\,\theta, y_2)$$

即ち y_1, y_2 の θ における分散を $\sigma^2_{y_1}(\theta), \sigma^2_{y_2}(\theta)$ とすると

(7.22) $\qquad \sigma^2_{y_1}(\theta) \leqq \sigma^2_{y_2}(\theta)$

定理Vにこのことを応用すると一様推定値 y に対して [1]

(7.23) $\qquad \sigma^2_{\hat{\theta}_\alpha} \leqq \sigma^2_y$.

§ 8. α-estimation と最尤法

所謂最尤法と云はれるものは確率密度函数 $p(\omega,\theta)$ $(\sigma^\theta p = \int p(\omega,\theta)\, dm)$ に対して $\frac{dp(\omega,\theta)}{d\theta} = 0$ の解 $\theta = \theta(\omega)$ を estimation とする方法である。ここでは base になる measure m (普通は Lebesgue measure) がないが、m があるときも $f(\omega,\theta) = \frac{p(\omega,\theta)}{p(\omega,0)}$ であるから $\frac{\partial}{\partial\theta} f(\omega,\theta) = 0$ の解として estimation $\theta = \theta(\omega)$ を求めることが出来る。一般には $\frac{\partial}{\partial\theta} f(\omega,\theta)$ は存在するかどうかわからないが、要するに $\frac{\partial}{\partial\theta} f(\omega,\theta) = 0$ の解を求めることは $f(\omega,\theta)$ の ω を固定した時の maximn になる θ を求めることである。然るに (7.11) によれば $\omega \in \sigma^{\hat\theta} R_\alpha - \bigcup_{\theta' > \hat\theta} \sigma^{\theta'} R_\alpha$ では

(7.11) $\qquad f(\omega\,|\,\theta) = k(\gamma(\alpha\,|\,-\hat\theta)\,|\,\theta)$

であるから, ω を固定すればそれに対して定まる $\hat\theta$ に対しても上の式(7.11)の右辺を maxium にする θ が求められる。α を定めておけばこの θ は $\hat\theta$ の函数であるが (6.4) より $[\omega\,|\,\hat\theta_\alpha(\omega) = \hat\theta] = \sigma^{\hat\theta} R_\alpha - \bigcup_{\theta' > \hat\theta} \sigma^{\theta'} R_\alpha$ であるから (7.11) は

(8.1) $\qquad f(\omega\,|\,\theta) = k(\gamma(\alpha\,|\,-\hat\theta_\alpha(\omega))\,|\,\theta)$

---

1) すべて不偏推定値のみ考へるときこの意味が生ずる.

即ちαを定めると$f(\omega|\theta)$をmaxinmmならしめるθの値は$k(\gamma(\alpha|-\hat{\theta}_\alpha(\omega))|\theta)$をmaximumならしめる$\hat{\theta}_\alpha(\omega)$の函数として表はされる。然るに(7.11.1)及びγがθで偏微分可能なこと(即ち(5.1))より

(8.2)
$$\int_{\hat{\theta}}^{\infty}\varphi_\alpha(\hat{\theta}-\theta)\,d\hat{\theta}=\int_{\hat{\theta}}^{\infty}k(\gamma(\alpha|-\hat{\theta})|\theta)\,\varphi_\alpha(\hat{\theta})\,d\hat{\theta}$$

であるから

(8.3)
$$\varphi_\alpha(\hat{\theta}-\theta)=k(\gamma(\alpha|-\hat{\theta})|\theta)\,\varphi_\alpha(\hat{\theta})$$

従って$k(\gamma(\alpha|-\hat{\theta})|\theta)$をmaximumならしめる$\theta$の値は$\varphi_\alpha(\hat{\theta}-\theta)$をmaximumならしめる値である。何となれば(8.3)において$\hat{\theta}$を固定しておくかぎりはただkのみのmaximumの点だけを考えればよいからである。ところが$\varphi_\alpha(\theta)$は§5.ix)よりmaximumを唯一つだけもつ(もしいたる所導函数が存在すれば$\frac{d}{d\theta}\varphi_\alpha(\theta)=0$の解は一つだけ存在する) この値を$\theta_\alpha$とすると

$$\hat{\theta}_\alpha(\omega)-\theta=\theta_\alpha$$

或は

$$\theta=\hat{\theta}_\alpha(\omega)-\theta_\alpha$$

で与えられる。即ち

定理VI 最尤法で与えられるestimationは一つ只一つ存在し、それは

(8.4)
$$\theta=\hat{\theta}_\alpha(\omega)-\theta_\alpha$$

で与えられる。但し$\hat{\theta}_\alpha$はα-estimationで、θ_αは$\varphi_\alpha(\theta)$をmaximumならしめるθの値である。

勿論この θ は $f(\omega|\theta)$ の最大なる値であるから α には無関係な筈であるから $\hat{\theta}_\alpha(\omega)-\theta_\alpha$ は α に無関係である。又 (5.1) より

$$\int_{-\infty}^{\theta_2}\varphi_{\gamma(\alpha|\theta_1)}(-\theta_2)d\theta_2=\gamma(\gamma(\alpha|\theta_1)|\theta_2)=\gamma(\alpha|\theta_1+\theta_2)$$
$$=\int_{-\infty}^{\theta_1+\theta_2}\varphi_\alpha(-\theta)d\theta=\int_{-\infty}^{\theta_2}\varphi_\alpha(-\xi-\theta_1)d\xi$$

故に

(8.5) $\qquad \varphi_{\gamma(\alpha|\theta_1)}(-\theta_2)=\varphi_\alpha(-\theta_2-\theta_1)$

従って $\varphi_\alpha(\theta)$ を maximum ならしめる θ の値を θ_α とすると $\varphi_{\gamma(\alpha|-\theta_\alpha)}(\theta)$ を maximum ならしめる θ の値は 0 であるからこのときの最尤法による estimation は

(8.6) $\qquad \theta=\hat{\theta}_{\alpha_1}(\omega)$.

但 α_1 は $\varphi_{\alpha_1}(\theta)$ を maximum ならしめる値が 0 になる様な α の値である。

最尤法で求められる estimation が α_1-estimation なることは (8.6) によってわかったがこの estimation が他の α-estimation よりもその効力函数が 0 の近傍において大きな値をとることがわかる。何となれば $\varphi_{\alpha_1}(\theta)$ が θ の近所で maximum であるのに反して $\alpha \neq \alpha_1$ なる α に対しては $\varphi_\alpha(\theta)$ は maximum ではないし (8.5) より φ_α の形は α の値如何に関せず定まっておると云うことより明らかである。

§9. 実例

1) 平均の異なる正規分布の假設型

(9.1.1) $p(x|\theta)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}(x-\theta)^2}$

とすると

(9.1.2) $\log f(x|\theta)=\log p(x|\theta)-\log p(x|0)$

$$=-\frac{1}{2}\theta^2+x\theta$$

故に Koopman 型分布であるからすべての次元で dissipative なることが豫想される.

$$\sigma^\theta P(E)=\int_E p(x|\theta)\,dx$$

であるが $\sigma^\theta x=x+\theta$ とすると $\sigma^{-\theta}E=(E-\theta)=\{x-\theta\,|\,x\in E\}$

(9.1.3) $P(\sigma^{-\theta}E)=\int_{(E-\theta)}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}x^2}dx=\int_E\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}(x-\theta)^2}dx$

であるから

(9.1.4) $\sigma^\theta P(E)=P(\sigma^{-\theta}E)$

故に n 次元空間では $\sigma^\theta(x_1,x_2\cdots\cdots,x_n)=(x_1+\theta,x_2+\theta,\cdots\cdots,x_n+\theta)$ なる変換は P の dissipative な transformation である。

そして R_α は

$\theta>0$ のとき. $Q_k=[x|\pi f(x_i|\theta)\geqq k]=[x|\pi\frac{p(x_i|\theta)}{p(x_i|0)}\geqq k]$

$$=[x|e^{-\frac{1}{2}\Sigma\{(x_i-\theta)^2-x_i^2\}}\geqq k]$$

$$=[x|e^{+\theta\Sigma x_i-\frac{n}{2}\theta^2}\geqq k].$$

$\theta<0$ のとき $Q_k=[x|e^{+\theta\Sigma x_i-\frac{n}{2}\theta^2}\leqq k]$.

故にいかなる θ に関しても $(\neq\theta)$

(9.1.5) $Q_k=[x|\Sigma x_i\geqq\frac{1}{\theta}(\log k+\frac{n}{2}\theta^2)]$.

但 $x=(x_1,x_2,\cdots\cdots,x_n)$.

又一方

(9.1.6) $$\alpha = P(R_\alpha) = \int \cdots\cdots\cdots \int_{\Sigma x_i \geqq r(\alpha)} e^{-\frac{1}{2}\Sigma x_i^2} dx_1 \cdots\cdots dx_n$$

で $r(\alpha)$ を定義すると $Q_k = R_\alpha$ ならば

$$r(\alpha) = \frac{1}{\theta}\left[\log k + \frac{n\theta^2}{2}\right]$$

或は

(9.1.7) $$k = \exp\left(\theta r(\alpha) - \frac{n}{2}\theta^2\right)$$

これは §3(3.1)の k 函数 $k(\alpha|\theta)$ である.

又 α-estimation $\hat{\theta}_\alpha(x)$ は定義によつて

$$\sum x_i = r(\alpha) \text{ なら } \quad \hat{\theta}_\alpha(x) = 0.$$

lemma (6.3)により $\sum \sigma^\theta x_i = \sum(x_i + \theta) = r(\alpha)$, 即 $\sum x_i = r(\alpha) - n\theta$ なら

(9.1.8) $$\hat{\theta}_\alpha(x) = \hat{\theta}_\alpha(\sigma^\theta x) - \theta = -\theta$$

である. 即ち

(9.1.9) $$\hat{\theta}_\alpha(x) = \frac{\Sigma x_i - r(\alpha)}{n}$$

(9.1.9)によつて

(9.1.10) $$[x | \hat{\theta}_\alpha(x) \geqq \theta] = [x | \Sigma x_i \geqq r(\alpha) + n\theta]$$

であるから (3.5)により

(9.1.11) $$\gamma(\alpha|-\theta) = P(\sigma^\theta R_\alpha) = P(\hat{\theta}_\alpha(x) \geqq \theta) = P(\Sigma x_i \geqq r(\alpha) + n\theta).$$

$r(\alpha)$ の定義 (9.1.6) によれば

(9.1.12) $$P(\Sigma x_i \geqq r(\gamma(\alpha|-\theta))] = \gamma(\alpha|-\theta)$$

であるから, (9.1.11), (9.1.12)により

(9.1.13) $$r\{\gamma(\alpha|-\theta)\} = r(\alpha) + n\theta.$$

$\hat{\theta}_\alpha(x)$ の分布函数は $1-\gamma(\alpha|-\theta)$ であるから (9.1.11) によつて

$$D_\alpha(\hat\theta|0)=\int_{\Sigma x_i \leqq r(\alpha)+n\theta}\cdots\cdots\int \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{1}{2}\Sigma x_i^2} dx_1 \cdots\cdots dx_n$$

又(3.2)及び(9.1.7)より

(9.1.14) $$\gamma(\alpha|-\theta)=\int_0^\alpha \exp\left(\theta r(\alpha)-\frac{n}{2}\theta^2\right)d\alpha$$

$$=e^{-\frac{n}{2}\theta^2}\int_0^\alpha e^{\theta r(\alpha)}d\alpha$$

従って $\hat\theta_\alpha(x)$ の分布函数 $D_\alpha(\hat\theta|0)$ は又次の式でも与えられる.

(9.1.15) $$D_\alpha(\hat\theta|0)=1-e^{-\frac{n}{2}\hat\theta^2}\int_0^\alpha e^{\hat\theta r(\alpha)}d\alpha$$

さて分布密度 $\varphi_\alpha(\hat\theta)$ を求めるために次の様な函数を考えよう.

$$\gamma(\alpha_0|-\theta_1,-\theta_2)=\gamma(\gamma(\alpha_0|-\theta_1)|-\theta_2)$$

$$=e^{-\frac{n}{2}\theta_2^2}\int_0^{\gamma(\alpha_0|-\theta_1)} e^{\theta_2 r(\alpha)}d\alpha$$

$\alpha=\gamma(\alpha_0|-\theta)$ とおき変数 α を θ に変換すると $d\alpha=-\varphi_{\alpha_0}(\theta)d\theta$ であるから

$$=e^{-\frac{n}{2}\theta_2^2}\int_\infty^{\theta_1} e^{\theta_2 r(\gamma(\alpha_0|-\theta))}(-\varphi_{\alpha_0}(\theta))d\theta$$

$$=e^{-\frac{n}{2}\theta_2^2}\int_{\theta_1}^\infty e^{\theta_2 r(\alpha_0)+n\theta_2\theta}\varphi_{\alpha_0}(\theta)d\theta$$

両辺を θ_1 で微分すると

$$\varphi_{\alpha_0}(\theta_1+\theta_2)=e^{(-\frac{n}{2}\theta_2^2+r(\alpha_0)\theta_2+n\theta_2\theta_1)}\varphi_{\alpha_0}(\theta_1)$$

特に $\theta_1=0\quad \theta_1=\theta$ とおくと

(9.1.16) $$\varphi_{\alpha_0}(\theta)=K\exp\left(-\frac{n}{2}\theta^2+r(\alpha_0)\theta\right),\quad K=\text{independent}\ \theta.$$ [1)]

$\frac{d}{d\theta}\varphi_{\alpha_0}(\theta)=0$ とおくと

(9.1.17) $$\theta=\frac{r(\alpha_0)}{n}$$

§8によって$\underset{\theta=0,即ち}{}$ $r(\alpha_0)=0$ なる α_0 に対しては

---

1) この $\varphi_\alpha(\theta)$ の求める方法は一つの定理とのべておくと便利である. 即ち
$\varphi_\alpha(\theta)=k(\alpha|\theta)\varphi_\alpha(0)$

(9.1.18) $\begin{cases} \varphi_{\alpha_0}(\theta) = K\exp\left(-\frac{n}{2}\theta^2\right) \\ \hat{\theta}_{\alpha_0}(x) = \frac{\sum x_i}{n} \end{cases}$

これが maximum likelihood method による estimation $\hat{\theta}_{\alpha_0}(\omega)$ 及びその分布である。この α_0 は明らかに $\alpha_0 = \frac{1}{2}$.

2) standard divation のみの異る正規分布の假設型.

(9.2.1) $$p(x|\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,a^\theta} e^{-\frac{x^2}{2a^{2\theta}}} \qquad a > 1$$

とすると

(9.2.2) $$\log f(x|\theta) = \log p(x|\theta) - \log p(x|0)$$
$$= -\frac{x^2}{2a^{2\theta}} - \theta\log a + \frac{x^2}{2} = \frac{x^2}{2}\left(1 - \frac{1}{a^{2\theta}}\right) - \theta\log a,$$

即ち Koopman 型分布である.

$\sigma^\theta x = a^\theta x$ とおくと $\sigma^{-\theta}E = (a^{-\theta}E) = \{a^{-\theta}x \mid x \in E\}$.

(9.2.3) $$P(\sigma^{-\theta}E) = \int_{a^{-\theta}E} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \int_E \frac{a^{-\theta}}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}a^{-2\theta}y^2} dy$$
$$= \int_E p(x|\theta)\,dx = \sigma^\theta P(E)$$

従って n 次元空间の変換 σ^θ: $\sigma^\theta x = (a^\theta x_1, a^\theta x_2, \cdots, a^\theta x_n)$, $x = (x_1, \cdots, x_n)$ は $\sigma^\theta P$ を定義する。この σ^θ は(9.2.2)によりすべての n で dissipative であるから

$\theta > 0$ のとき

$$Q_k = [x \mid \Pi f(x_i|\theta) \geqq k] = \left[x \,\middle|\, \frac{\sum x_i^2}{2}(1 - a^{-2\theta}) - n\theta\log a \geqq \log k\right]$$

$\theta < 0$ のとき

$$Q_k = [x \mid \Pi f(x_i|\theta) \leqq k] = \left[x \,\middle|\, \frac{\sum x_i^2}{2}(1 - a^{-2\theta}) - n\theta\log a \leqq \log k\right]$$

故に $\theta\ (\neq 0)$ のすべての値に対して

(9.2.4) $$Q_k = \left[x \,\middle|\, \sum x_i^2 \geqq \frac{2}{1 - a^{2\theta}}(\log k + n\theta\log a)\right].$$

$Q_k = R_\alpha$ 即ち $P(Q_k) = \alpha$ なる k を $k(\alpha|\theta)$ とするとこれは §3 (3.1) の k 函数であつて

(9.2.5) $$r(\alpha) = \frac{2}{1-a^{-2\theta}}(\log k + n\theta \log a)$$

とおけば $R_\alpha = [x | \sum x_i^2 \geqq r(\alpha)]$. (9.2.5) を k についてとくと

(9.2.6) $$k(\alpha|\theta) = \exp\left(\frac{r(\alpha)}{2}(1-a^{-2\theta}) - n\theta\log a\right)$$

又、$\sum(\sigma^\theta x_i)^2 = \sum a^{2\theta} x_i^2 = a^{2\theta}\sum x_i^2 = r(\alpha)$, 即ち $\sum x_i^2 = a^{-2\theta} r(\alpha)$ に対して $\hat{\theta}_\alpha(x)$ は

$$\hat{\theta}_\alpha(x) = -\theta$$

と定義される。即ち

(9.2.7) $$\hat{\theta}_\alpha(x) = + \frac{\log \frac{\sum x_i^2}{r(\alpha)}}{2\log a}$$

となる。又 (9.2.7) より

$$[x | \hat{\theta}_\alpha(x) \geqq \theta] = [x | \sum x_i^2 \geqq a^{-2\theta} r(\alpha)]$$

であるから, $r(\alpha)$ の定義より

(9.2.8) $$r\{\gamma(\alpha|-\theta)\} = a^{-2\theta} r(\alpha).$$

又 (3.2) 及び (9.2.6) より

(9.2.9) $$\gamma(\alpha|-\theta) = \int_0^\alpha \exp\left(\frac{r(\alpha)}{2}(1-a^{-2\theta}) - n\theta\log a\right)d\alpha$$

$$= a^{-n\theta}\int_0^\alpha \exp\left(\frac{r(\alpha)}{2}(1-a^{-2\theta})\right)d\alpha$$

故に $\hat{\theta}_\alpha(x)$ の分布函数 $D_\alpha(\hat{\theta}|0)$ は

(9.2.10) $$D_\alpha(\hat{\theta}|0) = 1 - a^{-n\theta}\int_0^\alpha \exp\left(\frac{r(\alpha)}{2}(1-a^{-2\theta})\right)d\alpha$$

$\hat{\theta}_\alpha(x)$ の分布密度 $\varphi_\alpha(\theta)$ を求めると 1) の場合と同様の計算により

(9.2.11) $$\varphi_\alpha(\theta) = K \cdot a^{-n\theta}\exp\left(\frac{r(\alpha)}{2}(1-a^{-2\theta})\right)$$

$\frac{d}{d\theta}\varphi_\alpha(\theta)=0$ の解は

(9.2.12) $$\theta=\frac{+\log\frac{n}{\gamma(\alpha)}}{2\log a}$$

§8 によって $\frac{d}{d\theta}\varphi_\alpha(\theta)=0$ の解が 0 になる即ち $\gamma(\alpha)=n$ なる α を α_0 とすると

$$\hat{\theta}_{\alpha_0}(x)=\frac{\log\frac{\Sigma x_i^2}{n}}{2\log a}$$

$$\varphi_{\alpha_0}(\theta)=Ka^{-n\theta}\exp\left(\frac{n}{2}(1-a^{-2\theta})\right)$$

これが maximum likelihood method による θ の estimation 及びその分布函数である。

3) 指数分布の場合

(9.3.1) $$p(x|\theta)=a^\theta e^{-a^\theta x} \qquad (0<x<\infty) \quad a>1.$$

とすると

(9.3.2) $$\log f(x|\theta)=x(1-a^\theta)+\theta\log a$$

即ち Koopman 型分布

$\sigma^\theta x=a^\theta x$ とおくと $\sigma^{-\theta}E=(a^{-\theta}E)=\{a^{-\theta}x \mid x\in E\}$

(9.3.3) $$P(\sigma^\theta E)=\int_{a^\theta E}e^{-x}dx=\int_E a^\theta e^{-a^\theta x}dx=\int_E p(x|\theta)dx$$
$$=\sigma^\theta P(E)$$

従って n 次元空間で $(x_i>0)$ なる部分へ一対一変換 σ^θ: $\sigma^\theta x=(a^\theta x_1, a^\theta x_2, \text{-------}, a^\theta x_n)$, $x=(x_1,x_2,\text{----}x_n)$ は $\sigma^\theta P$ を定義する。この σ^θ は(9.3.2)によりすべての n で dissipative であるから.

$\theta>0$ のとき

$$Q_k=[x \mid \Pi f(x_i|\theta)\geqq k]=[x \mid \Sigma x_i(1-a^\theta)+n\theta\log a\geqq\log k]$$

$\theta<0$ のとき

$$Q_k=[x|\pi f(x_i|\theta)\leqq k \quad =[x|\sum x_i(1-a^\theta)+n\theta\log a\leqq \log k].$$

故にすべての $\theta(\neq 0)$ について

(9.3.4) $$Q_k=\left[x|\sum x_i|\geqq \frac{1}{1-a^\theta}(\log k-n\theta\log a)\right]$$

$P[x|\sum x_i\geqq r]=\alpha$ なるとき $r=r(\alpha)$ として函数 $r(\alpha)$ とすると、

$P(Q_k)=\alpha$ 即ち $Q_k=R_\alpha$ ならば

$$r(\alpha)=\frac{1}{1-a^\theta}(\log k-n\theta\log a)$$

であつて逆にこれを k についてとくと

(9.3.5) $$k(\alpha|\theta)=\exp(r(\alpha)(1-a^\theta)+n\theta\log a).$$

この函数 $k(\alpha|\theta)$ は§3.(3.1)の k 函数であることは明らかである。

次に $\sum\sigma^\theta x_i=\sum a^\theta x_i=a^\theta\sum x_i=r(\alpha)$ とすると. $\sum x_i=a^{-\theta}r(\alpha)$ に対して $\hat{\theta}_\alpha(x)$ の定義より

$$\hat{\theta}_\alpha(x)=-\theta$$

と定義される。即ち

(9.3.6) $$\hat{\theta}_\alpha(x)=+\frac{\frac{\sum x_i}{r(\alpha)}}{\log a}$$

となる、又(9.3.5)より

(9.27) $$\gamma(\alpha|-\theta)=\int_0^\alpha k(\alpha|\theta)\,d\alpha=\int_0^\alpha \exp(r(\alpha)(1-a^\theta)+n\theta\log a)\,d\alpha$$

$$=a^{+n\theta}\int_0^\alpha \exp(r(\alpha)(1-a^\theta))\,d\alpha.$$

故に $\hat{\theta}_\alpha(x)$ の分布函数 $D_\alpha(\hat{\theta}|0)$ は

(9.2.8) $$D_\alpha(\hat{\theta}|0)=1-a^{n\theta}\int_0^\alpha \exp(r(\alpha)(1-a^\theta))\,d\alpha$$

又 1), 2) と同様に $\varphi_\alpha(\theta)$ を求めると

(9.2.9) $$\varphi_\alpha(\theta)=K(\alpha)a^{n\theta}\exp(r(\alpha)(1-a^{\theta}))$$

$\frac{d}{d\theta}\varphi_a(\theta)=0$ の解は

(9.2.10) $$\theta=\frac{\log\frac{r(\alpha)}{r}}{\log a}$$

これを零にする $r(\alpha)$ を求めると $r(\alpha)=n$ であるからこの解 $\alpha=\alpha_0$ に

対しては

(9.2.11) $$\hat{\theta}_{\alpha_0}(x)=\frac{\log\frac{\Sigma x_i}{n}}{\log a}$$

その分布密度は

$$\varphi_{\alpha_0}(\theta)=K(\alpha_0)a^{+n\theta}\exp(n(1-a^{\theta}))$$

以　上