㊱ 分布函數の Class convergence に就いて

髙野　金作

分布函数の class の系列が class convergence する時にはその極限の class は一つしかない。（A. Khintchine, Über Klassenkonvergenz von Verteilungsgesetzen. Mitt. Forrsch. Inst. Math. u. Mech. Univ. Tomsk. 1. 258～261. (1937)）　このことは簡単なことであるけれども，A. Khintchine の証明はまわりくどい。

河田龍夫教授の Fourier 解析による証明（実函数論分科会研究月報，第6号，昭和22年12月20日）もあるけれども，茲では分布函数の逆函数を用ひて簡単な証明を與える。

分布函数及びその逆函数は左に連続である様にとつておく。従つて分布函数 $F(x)$ の逆函数 $f(y)$ は開区間 $0<y<1$ に於て，次式によつて定義せられる。

$$f(y) = \min\{x;\, F(x-0) \leqq y \leqq F(x+0)\}$$
$$= \min\{x;\, F(x+0) \geqq y\}.$$

分布函数の逆函数の定義域を開区間 $0<y<1$ にしておくのは，函数の値を有限にしておくためである。

$y=F(x)$ と $x=f(y)$ とは，そのぐらふを共有するから (x, y) に関する次の二つの條件

$$F(x-0) \leqq y \leqq F(x+0)$$

$$f(y-0) \leqq x \leqq f(y+0)$$

は等価である。

両方とも点(x, y)が考えているぐらふの上にあるための条件であるからである。このことと，$F(x)$の左からの連続性とによって，任意の x に対し

$$F(x) = \min\{y;\ f(y-0) \leqq x \leqq f(y+0)\} = \min\{y;\ f(y+0) \geqq x\}.$$

単調函数列の収斂は，すべて極限函数の各連続点に於てのそれであるから，本文に於ては，「極限函数の各連続点に於て」といふ条件の記述を省略することにする。

分布函数 $F_n(x)$ $(n = 0, 1, 2, \cdots\cdots)$ の逆函数を $f_n(y)$とおく。若し

$$\lim_{n\to\infty} F_n(x) = F_0(x)$$

ならば

$$\lim_{n\to\infty} f_n(y) = f_0(y)$$

が成立つ。

F_0 と F_n との Lévy の距離を

$$\rho(F_0, F_n) = \sqrt{2}\,\delta_n$$

とおけば，$y = F_n(x)$ のぐらふは $y = F_0(x)$のぐらふを直線 $x + y = 0$ の方向に$\sqrt{2}\delta_n$ だけ平行移動して得る二つのぐらふの間にある。$x = f_n(y)$，$x = f_0(y)$ のぐらふは夫々 $y = F_n(x)$，$y = F_0(x)$ のぐらふと一致するから，すべてのyに対し

$$f_0(y-\delta_n) - \delta_n \leqq f_n(y) \leqq f_0(y+\delta_n) + \delta_n$$

が成立つ。仮定から $\lim_{n\to\infty} \delta_n = 0$ であるから $\lim_{n\to\infty} f_n(y) = f_0(y)$ を得る。

さて，目標の定理を次の形に述べる．

定　理　$F_n(x)$　$(n=1,2,3,\cdots\cdots)$ を分布函数とする．

正実数の系列 $\{a_n\}$，$\{\alpha_n\}$，実数の系列 $\{b_n\}$，$\{\beta_n\}$ 及び，単位分布でない分布函数 $\Phi(x)$，$\Psi(x)$ が存在して，

$$(1)\qquad \lim_{n\to\infty} F_n(a_n x+b_n)=\Phi(x),$$

$$(2)\qquad \lim_{n\to\infty} F_n(\alpha_n x+\beta_n)=\Psi(x)$$

が成立するならば，極限

$$(3)\qquad \lim_{n\to\infty}\frac{\alpha_n}{a_n}=A>0,\quad \lim_{n\to\infty}\frac{\beta_n-b_n}{a_n}=B$$

が存在して，すべての x に於て

$$(4)\qquad \Psi(x)=\Phi(Ax+B)$$

が成立つ。即ち $\Phi(x)$ と $\Psi(x)$ とは同じ *class* に属する。

証　明．　$F_n(x)$，$\Phi(x)$，$\Psi(x)$ の逆函数を，夫々 $f_n(y)$，$\varphi(y)$，$\psi(y)$ とおけば，$F_n(a_n x+b_n)$，$F_n(\alpha_n x+\beta_n)$ の逆函数は

$$\frac{f_n(y)-b_n}{a_n},\qquad \frac{f_n(y)-\beta_n}{\alpha_n}$$

となるから，假定（1）（2）から

$$(5)\qquad \lim_{n\to\infty}\frac{f_n(y)-b_n}{a_n}=\varphi(y)$$

$$(6)\qquad \lim_{n\to\infty}\frac{f_n(y)-\beta_n}{\alpha_n}=\psi(y)$$

假定により，$\Phi(x)$，$\Psi(x)$ は単位分布でないから，$\varphi(y)$，$\psi(y)$ は

何れも定数ではない。従つて，y_1, y_2 （$1 > y_1 > y_2 > 0$）を適当にとれば，$\varphi(y_1) > \varphi(y_2)$, $\psi(y_1) > \psi(y_2)$，且つ，y_1, y_2 は何れも $\varphi(y)$, $\psi(y)$ に共通な連続点である様にとれる。

$y = y_1, y_2$ に対して（5），（6）が成立つから，その差をとつて

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f_n(y_1) - f_n(y_2)}{a_n} = \varphi(y_1) - \varphi(y_2) > 0,$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f_n(y_1) - f_n(y_2)}{\alpha_n} = \psi(y_1) - \psi(y_2) > 0$$

が成立つ．従つてその比をとつて

$$(7) \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{\alpha_n}{a_n} = \frac{\varphi(y_1) - \varphi(y_2)}{\psi(y_1) - \psi(y_2)} \ (= A \text{ とおく}) > 0$$

が成立つ．（6）と（7）とから

$$(8) \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{f_n(y) - \beta_n}{a_n} = A\psi(y)$$

（5）ー（8）を作れば

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\beta_n - b_n}{a_n} = \varphi(y) - A\psi(y) \ (= B \text{ とおく}).$$

これは $\varphi(y)$ と $\psi(y)$ とに共通な連続点で成立つ。然るに，$\varphi(y)$, $\psi(y)$ は左に連続であるから，すべての y （$0 < y < 1$）に於て

$$\varphi(y) - A\psi(y) = B, \text{ 従つて } \psi(y) = \frac{\varphi(y) - B}{A}$$

が成立つ．両辺の逆函数をとれば（4）を得る。

これで，定理は証明せられた。

系 1.
$$\lim_{n\to\infty} F_n(a_n x + b_n) = \Phi(x), \quad (a_n > 0)$$
$$\lim_{n\to\infty} F_n(\alpha_n x + \beta_n) = \Phi(x), \quad (\alpha_n > 0)$$

に於て，$\Phi(x)$ が単位分布函数でないならば，

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\alpha_n}{a_n} = 1 \ , \ \lim_{n\to\infty} \frac{\beta_n - b_n}{a_n} = 0$$

証　明．上記の定理から，すべての x に於て

$$\Phi(x) = \Phi(Ax+B).$$

茲に，A, B は (3) によつて定義せられたものである。$\Phi(x)$の最大濃度函数を $Q(l)$ とすれば，すべての $l \geq 0$ に対し，

$$Q(l) = Q(Al)$$

従つて，すべての自然数 n に対し

$$Q(l) = Q(A^n l) = Q(A^{-n} l).$$

$Q(+\infty) = 1$ であるから，$A \neq 1$ ならば

$$Q(l) \equiv 1, \quad l > 0.$$

之は $\Phi(x)$ が単位分布でないことに矛盾する。故に $A = 1$．
従つて，すべての x に対し

$$\Phi(x) = \Phi(x+B)$$

従つて，すべての自然数 n に対し

$$\Phi(x) = \Phi(x+nB) = \Phi(x-nB)$$

が成立しなくてはならぬから，$B = 0$ でなければならぬ．
依つて，系 1は証明せられた。この系1の出所は，
B. Gnedenko, *Sur la distribution limit du terme maximum d'une serie alëatoire*, Ann of Math, 1943.

系 2.　$\lim_{n\to\infty} F_n(a_n x + b_n) = \Phi(x),\ (a_n > 0)$

$$\lim_{n\to\infty} F_n(\alpha_n x + \beta_n) = \Psi(x),\ (\alpha_n > 0)$$

に於て，$\Phi(x)$ が単位分布，$\Psi(x)$ がさうでないならば，極限

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\alpha_n}{a_n} = 0, \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{\beta_n - b_n}{a_n} = B$$

が存在して

$$\Phi(x) = \begin{cases} 0, & x < B \\ 1, & x > B. \end{cases}$$

注　意　　定理及び系２の結果は，夫々次の形に書ける。

$$\Phi(x) = \Psi\left(\frac{x-B}{A}\right), \quad A = \lim_{n\to\infty} \frac{\alpha_n}{a_n} > 0\ ;$$

$$\Phi(x) = \lim_{A'\downarrow 0} \Psi\left(\frac{x-B}{A'}\right), \quad \lim_{n\to\infty} \frac{\alpha_n}{a_n} = 0.$$

系 3.　$\lim_{n\to\infty} F_n(a_n x + b_n) = \Phi(x),\ a_n > 0$

が成立し，極限

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\alpha_n}{a_n} = A,\ (\alpha_n > 0),\ \lim_{n\to\infty} \frac{\beta_n - b_n}{a_n} = B$$

が存在するものとする。（$\Phi(x)$は単位分布であつてもよい）.

$A > 0$ ならば

$$\lim_{n\to\infty} F_n(\alpha_n x + \beta_n) = \Phi(Ax + B),$$

$A = 0$ ならば

$$\Phi(B-0) \leqq \varliminf_{n\to\infty} F_n(\alpha_n x + \beta_n) \leqq \varlimsup_{n\to\infty} F_n(\alpha_n x + \beta_n) \leqq \Phi(B+0).$$

証　明．　$A > 0$ なる場合

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f_n(y)-\beta_n}{\alpha_n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{f_n(y)-b_n}{a_n}-\frac{\beta_n-b_n}{a_n}\right)\Big/\frac{\alpha_n}{a_n}=\frac{\varphi(y)-B}{A}.$$

逆函数をとつて

$$\lim_{n\to\infty} F_n(\alpha_n x+\beta_n)=\Phi(Ax+B).$$

$A=0$ の場合，次の事実から明らかである。

分布函数 $F_n(x)$ $(n=1, 2, \cdots\cdots)$ の逆函数を $f_n(y)$ とおき，$0<b<1$ とする。

$y>b$ なるすべての y に対し，$\lim\limits_{n\to\infty} f_n(y)=+\infty$ ならば，

任意の x に対し，$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, F_n(x) \leqq b$.

又，$y<b$ なるすべての y に対し，$\lim\limits_{n\to\infty} f_n(y)=-\infty$ ならば，任意の x に対し，$\underline{\lim}_{n\to\infty}\, F_n(x) \geqq b$.

(1950. 3. 7)