(17) 重層法の公式

——他の数学的模型の場合——

兼所員　増山元三郎

重層法の公式

$2c \gg 2k$ の下に，近似的に

$$\log e - \log 2k = \frac{y^2}{\pi D t}$$

が正しいならば，時刻 t に境面から y の距離で測った物質の濃度（実際は y，$y+\Delta y$ の間の平均の濃度を測る）k を y の函数として調べ，y^2 に対して $\log k$ を方眼紙に入れると，この近似の成立する限り点は $\log k$ 軸を $\log\left(\frac{e}{2}\right)$ で切る直線上に在る筈である。ところが，物療内科の同僚高橋晄正氏の無機化合物を用いた実験に依ると実測値は $\log\left(\frac{e}{2a}\right)$ $(a \doteqdot 2)$ の点を通る直線上にある。この喰違いの一つの原因は原点の位置の修正を施さないせいであろうが，数学的模型の不備も考えられる。

他の批判の対象になる点は，境界条件の

$$y = 0 \ : \ u = e \ , \ t > 0$$

である。

$t>0$では寒天側からの水の重層液側えの拡散で，原点で$u=c$となつていないことが考えられる。即ち最初の模型では重層液で絶えず境面を洗っている場合に相当している。（このことは実際同僚佐々木智也氏の点滴法を用いた実験で確められた。）

夫で模型を変えて，二つの半無限の多孔性媒質が $y=0$ で接触しているものとし，

$y<0$ で $$\frac{\partial u_{11}}{\partial t} = D_1 \frac{\partial^2 u_{11}}{\partial y^2},$$

$y>0$ で $$\frac{\partial u_{22}}{\partial t} = D_2 \frac{\partial^2 u_{22}}{\partial y^2},$$

$y=0$ で $$u_1 = u_2, \quad D_1 \frac{\partial u_1}{\partial y_1} = D_2 \frac{\partial y_2}{\partial y_2}$$

とし，解は

$$u = \begin{cases} u_1, & y<0 \\ u_2, & y>0 \end{cases}$$

とすると，解は[3]

$$u_1 = C_0 - (C_0 - C_1)\,\psi\left(-\frac{y}{2\sqrt{D_1 t}}\right)$$

$$u_2 = C_0 - (C_0 - C_2)\,\psi\left(\frac{y}{2\sqrt{D_2 t}}\right)$$

但し

$$C_0 \equiv \frac{\sqrt{D_1}\,C_1 + \sqrt{D_2}\,C_2}{\sqrt{D_1} + \sqrt{D_2}}, \quad \psi(x) \equiv \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$$

従って $y>0$ だけ問題にするなら

$$\frac{u - C_0}{C_2 - C_0} = \psi\left(\frac{y}{2\sqrt{D_2 t}}\right)$$

特に $C_0 = 0$ の場合を考えると，

$$C_0 = C_1 \left(\frac{\sqrt{D_1}}{\sqrt{D_1} + \sqrt{D_2}} \right)$$

Williams の近似[2] を用いて，

$$\left(1 - \frac{u}{C_0}\right)^2 = 1 - e^{-\frac{y^2}{\pi D_2 t}}$$

従って，

$$\log \left\{ \frac{u}{C_0} \left(2 - \frac{u}{C_0}\right) \right\} = -\frac{y^2}{\pi D_2 t}$$

$2C_0 \gg u$ ならば，

$$\log C_0 - \log 2u = \frac{y^2}{\pi D_2 t}$$

$$= \log C_1 - \log\{2(1+\mu)u\}$$

但し

$$\mu \equiv \sqrt{\frac{D_2}{D_1}}$$

従って y^2 に対して $\log u$ を方眼紙上に記入して行けば $\log u$ 軸を

$$\log \frac{C_1}{2(1+\mu)}$$

で切る直線が得られる。実験式と比較すると

$$a \equiv 1 + \mu$$

となっていることが分る。前の模型の式は $D_1 \to \infty$ に相当する。 この模型では μ が不明だと，絶対測定ができないが，積面洗滌法（例えば呉滴法に依る）で絶対測定を行い，D_2 と u を知るなら，同時にこの方法を行って μ，従って D_1 が分ること

になる。工学的応用[2]が期待できよう。

1) 増山二重層法に依る抗菌性物質力価据定法の基礎公式，本誌，3 (1947)， 48－52.

2) M. Muskat: The flow of homogeneous fluids through porous media, 1937.

3) Ph. Frank und R. v. Mises: Die Differential und Integralgleichungen der Mechanik und Physik, Teil II (1927).