㉜ 或不等式に就いて（一）

（*Sample Mean* の為の *Confidence Interval*）

水　野　坦

$\overline{X}$ を *Sample Mean*，$\widetilde{X}$ を *Universe Mean* とする。

$\sigma_{\overline{x}}^2$ を $\overline{X}$ の *Variance* とするとき

$$P_r\left\{ |\overline{X}_0 - \widetilde{X}| \geq k\sigma \right\} \leq \frac{1}{k^2}$$

が *Tchebycheff* の不等式である。

今次の *Moment* を考へる。

$$E_{2\lambda} = \int_{\Omega} |\overline{X} - \widetilde{X}|^{2\lambda} dF$$

但し Ω は全変域　F は $\overline{X}$ の *distribution function* とする。

之に対して *Tchebycheff* 的な考へを適用すると

$$E_{2\lambda} = \int_{\Omega} |\overline{X} - \widetilde{X}|^{2\lambda} dF$$

$$\geq \int_{|\overline{X} - \widetilde{X}| \geq k \cdot E_{2\lambda}^{\frac{1}{2\lambda}}} |\overline{X} - \widetilde{X}|^{2\lambda} dF$$

$$\geq \int_{|\overline{X} - \widetilde{X}| \geq k \cdot E_{2\lambda}^{\frac{1}{2\lambda}}} (k \cdot E_{2\lambda}^{\frac{1}{2\lambda}})^{2\lambda} dF$$

$$= k^{2\lambda} E_{2\lambda} \int_{|\bar{X} - \tilde{X}| \geq k E_{2\lambda}^{\frac{1}{2\lambda}}} dF$$

$$= k^{2\lambda} \cdot E_{2\lambda} \cdot P_r \left\{ |\bar{X} - \tilde{X}| \geq k E_{2\lambda}^{\frac{1}{2\lambda}} \right\}$$

即　$$P_r \left\{ |\bar{X} - \tilde{X}| \geq k E_{2\lambda}^{\frac{1}{2\lambda}} \right\} \leq \frac{1}{k^{2\lambda}}$$

を得る。

此所で E_m を計算する。

$$\bar{X} - \tilde{X} = \frac{\sum^{n} X_{(i)}}{n} - \tilde{X} \qquad \left(\bar{X} = \sum_{i=1}^{n} \frac{X_{(i)}}{n} \right)$$

$$= \frac{\sum (X_{(i)} - \tilde{X})}{n}$$

$$= \frac{\sum x_i}{n} \qquad (x_i = (X_{(i)} - \tilde{X}))$$

又　$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i \right)^m$$

$$= \sum \frac{m!}{(\alpha_1 !)^{\beta_1} \cdots \{\alpha_k !\}^{\beta_k}} \sum (x_{11}^{\alpha_1} \cdots x_{1\beta_1}^{\alpha_1})(x_{21}^{\alpha_2} \cdots x_{2\beta_2}^{\alpha_2}) \cdots (x_{k1}^{\alpha_k} \cdots x_{k\beta_k}^{\alpha_k})$$

こゝに　$\alpha_1 \beta_1 + \cdots\cdots + \alpha_k \beta_k = m$

そして 加号 $\sum$ は

$$\binom{n}{\Sigma \beta_i} \times \frac{(\Sigma \beta_i)!}{\beta_1 ! \cdots\cdots \beta_k !}$$

$$= \frac{n!}{(\Sigma \beta_i)!(n - \Sigma \beta_i)!} \cdot \frac{(\Sigma \beta_i)!}{\beta_1 ! \cdots\cdots \beta_k !}$$

項　に亘るものである。
又，加号 $\sum$ は

$$\sum \alpha_i \beta_i = m$$

であり

$$x_{ij} \neq x_{i'j'}$$

$$\alpha_i \neq \alpha_{i'}$$

である所のすべての組合に亘るものである。
故に

$$E_m = \frac{1}{n^m} \sum \frac{m!}{\prod (\alpha_i !)^{\beta_i}} \cdot \frac{n!}{(n-\Sigma\beta_i)! \prod \beta_i !} E\left\{ (X_{11}^{\alpha_1} \cdots X_{1\beta_1}^{\alpha_1}) \cdots (X_{k1}^{\alpha_k} \cdots X_{k\beta_k}^{\alpha_k}) \right\}$$

又次の関係が成立つ

$$(N - \overline{\Sigma\beta_i - 1}) E\left[(X_{11}^{\alpha_1} \cdots X_{1\beta_1}^{\alpha_1}) \cdots (X_{k1}^{\alpha_k} \cdots X_{k\beta_k}^{\alpha_k}) \right]$$

$$+ \sum_{ij=1}^{k\beta_k - 1} E\left[(X_{11}^{\alpha_1} \cdots X_{1\beta_1}^{\alpha_1}) \cdots (X_{k1}^{\alpha_k} \cdots X_{k\beta_k - 1}^{\alpha_k}) \cdot X_{ij}^{\alpha_k} \right]$$

$$= N E\left[(X_{11}^{\alpha_1} \cdots X_{1\beta_1}^{\alpha_1}) \cdots (X_{k1}^{\alpha_k} \cdots X_{k\beta_k - 1}^{\alpha_k}) \right] E\left[X_{ij}^{\alpha_k} \right]$$

$$\therefore E\left(X_{11}^{\alpha_1} \cdots X_{1\beta_1}^{\alpha_1} \cdots X_{k1}^{\alpha_k} \cdots X_{k\beta_k}^{\alpha_k} \right)$$

$$= \frac{N}{N - \overline{\Sigma\beta_i - 1}} E\left[X_{11}^{\alpha_1} \cdots X_{1\beta_1}^{\alpha_1} \cdots X_{k1}^{\alpha_k} \cdots X_{k\beta_k - 1}^{\alpha_k} \right] E\left[X_{ij}^{\alpha_k} \right]$$

$$- \frac{1}{N - \overline{\Sigma\beta_i - 1}} \sum_{ij=1}^{k\beta_k - 1} E\left[(X_{11}^{\alpha_1} \cdots X_{1\beta_1}^{\alpha_1}) \cdots (X_{k1}^{\alpha_k} \cdots X_{k\beta_k - 1}^{\alpha_k}) \cdot X_{ij}^{\alpha_k} \right]$$

$$E\left[(X_{11}^{\alpha_1}\cdots X_{1\beta_1}^{\alpha_1})\cdots(X_{k_1}^{\alpha_k}\cdots X_{k\beta_k}^{\alpha_k})\right]$$

$$=E\left[(X_{11}^{\alpha_1}\cdots X_{1\beta_1}^{\alpha_1})\cdots(X_{k_1}^{\alpha_k}\cdots X_{k\beta_{k-1}}^{\alpha_k})\right]\cdot E(X_{k\beta_k}^{\alpha_k})+O\left(\frac{1}{N}\right)$$

$\therefore$

$$E\left[(X_{11}^{\alpha_1}\cdots X_{1\beta_1}^{\alpha_1})\cdots(X_{k_1}^{\alpha_k}\cdots X_{k\beta_k}^{\alpha_k})\right]$$

$$=\prod_{i=1}^{k}\left\{E(X^{\alpha_i})\right\}^{\beta_i}+O\left(\frac{1}{N}\right)$$

$$=\prod_{i=1}^{k}\mu_{\alpha_i}^{\beta_i}+O\left(\frac{1}{N}\right)$$

但し $\mu_1=0$

依つて

$$E_m=\frac{1}{n^m}\sum_{\substack{\Sigma\alpha_i\beta_i=m\\ \alpha_i\neq 1}}\frac{m!}{\prod(\alpha_i!)\beta_i}\cdot\frac{n!}{(n-\sum\beta_i)!\prod\beta_i!}\cdot\prod\mu_{\alpha_i}^{\beta_i}+O\left(\frac{1}{N}\right)$$

横道になるが

少し他の場合に使ふ Case を記すなら

$$E_2=\frac{\mu_2}{n}+O\left(\frac{1}{N}\right)$$

$$E_3=\frac{\mu_3}{n^2}+O\left(\frac{1}{N}\right)$$

$$E_4=\frac{\mu_4+3(n-1)\mu_2^2}{n^3}+O\left(\frac{1}{N}\right)$$

$$E_5 = \frac{\mu_5 + 10(n-1)\mu_3\mu_2}{n^4} + O\left(\frac{1}{N}\right)$$

$$E_6 = \frac{\mu_6 + 15(n-1)\mu_4\mu_2 + 10(n-1)\mu_3^2 + 15(n-1)(n-2)\mu_2^3}{n^5} + O\left(\frac{1}{N}\right)$$

$$E_7 = \frac{\mu_7 + 21(n-1)\mu_5\mu_2 + 35(n-1)\mu_4\mu_3 + 105(n-1)(n-2)\mu_3\mu_2^2}{n^6} + O\left(\frac{1}{N}\right)$$

$$E_8 = \frac{\mu_8 + 28(n-1)\mu_6\mu_2 + 56(n-1)\mu_5\mu_3 + 35(n-1)\mu_4^2 + 210(n-1)(n-2)\mu_4\mu_2^2}{n^7}$$

$$+ \frac{280(n-1)(n-2) + 105(n-1)(n-2)(n-3)\mu_2^4}{n^7} + O\left(\frac{1}{N}\right)$$

$$E_9 = \frac{1}{n^8}\Big\{\mu_9 + 36(n-1)\mu_7\mu_2 + 84(n-1)\mu_6\mu_3 + 126(n-1)\mu_5\mu_4$$

$$+ 378(n-1)(n-2)\mu_5\mu_2^2 + 1680(n-1)(n-2)\mu_3^3$$

$$+ 1260(n-1)(n-2)\mu_4\mu_3\mu_2 + 1260(n-1)(n-2)(n-3)\mu_3\mu_2^3\Big\}$$

$$+ O\left(\frac{1}{N}\right)$$

$$E_{10} = \frac{1}{n^9}\Big\{\mu_{10} + 45(n-1)\mu_8\mu_2 + 120(n-1)\mu_7\mu_3 + 210(n-1)\mu_6\mu_4$$

$$+ 630(n-1)(n-2)\mu_6\mu_2^2 + 126(n-1)\mu_5^2 + 2520(n-1)(n-2)\mu_5\mu_3\mu_2$$

$$+ 1575(n-1)(n-2)\mu_4^2\mu_2 + 2100(n-1)(n-2)\mu_4\mu_3^2$$

$$+ 3150(n-1)(n-2)(n-3)\mu_4\mu_2^3 + 1575(n-1)(n-2)(n-3)\mu_3^2\mu_2^2$$

$$+ 945(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)\mu_2^5\Big\} + O\left(\frac{1}{N}\right)$$

$$E_{11} = \frac{1}{n^{10}} \{ \mu_{11} + 55(n-1)\mu_9\mu_2 + 165(n-1)\mu_8\mu_3$$

$$+ 330(n-1)\mu_7\mu_4 + 990(n-1)(n-2)\mu_7\mu_2^2$$

$$+ 462(n-1)\mu_6\mu_5 + 4620(n-1)(n-2)\mu_6\mu_3\mu_2$$

$$+ 6930(n-1)(n-2)\mu_5\mu_4\mu_2 + 4620(n-1)(n-2)\mu_5\mu_3^2$$

$$+ 6930(n-1)(n-2)(n-3)\mu_5\mu_2^3 + 5775(n-1)(n-2)\mu_4^2\mu_3$$

$$+ 34650(n-1)(n-2)(n-3)\mu_4\mu_3\mu_2^2 + 15400(n-1)(n-2)(n-3)\mu_3^3\mu_2$$

$$+ 17325(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)\mu_3\mu_2^4 \} + O\left(\frac{1}{N}\right)$$

$$E_{12} = \frac{1}{n^{11}} \{ \mu_{12} + 60(n-1)\mu_{10}\mu_2 + 220(n-1)\mu_9\mu_3$$

$$+ 495(n-1)\mu_8\mu_4 + 1485(n-1)(n-2)\mu_8\mu_2^2$$

$$+ 792(n-1)\mu_7\mu_5 + 7920(n-1)(n-2)\mu_7\mu_3\mu_2$$

$$+ 462(n-1)\mu_6^2 + 13860(n-1)(n-2)\mu_6\mu_4\mu_2$$

$$+ 9240(n-1)(n-2)\mu_6\mu_3^2 + 13860(n-1)(n-2)(n-3)\mu_6\mu_2^3$$

$$+ 8316(n-1)(n-2)\mu_5^2\mu_2 + 27720(n-1)(n-2)\mu_5\mu_4\mu_3$$

$$+ 41580(n-1)(n-2)(n-3)\mu_5\mu_3\mu_2^2 + 5775(n-1)(n-2)\mu_4^3$$

$$+ 138600(n-1)(n-2)(n-3)\mu_4\mu_3^2\mu_2$$

$$+ 51975(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)\mu_4\mu_2^4$$

$$+ 15400(n-1)(n-2)(n-3)\mu_3^4$$

$$+ 138600(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)\mu_3^2\mu_2^3$$

$$+ 10395(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)\mu_2^6 \} + O\left(\frac{1}{N}\right)$$

扨て本筋へ戻つて

E_mを変形する

$$E_m = \frac{1}{n^m}\left\{\sum_{\substack{\Sigma\alpha_i\beta_i=m \\ \alpha_i\neq 1 \\ \Sigma\beta_i=max}} \frac{m!}{\prod(\alpha_i!)^{\beta_i}} \frac{n!}{(n-\Sigma\beta_i)\prod\beta_i!}\prod\mu_{\alpha_i}^{\beta_i}\right.$$

$$\left.+\sum_{\substack{\Sigma\alpha_i\beta_i=m \\ \alpha_i\neq 1 \\ \Sigma\beta_i\neq max}} \frac{m!}{\prod(\alpha_i!)^{\beta_i}} \frac{n!}{(n-\Sigma\beta_i)!\prod\beta_i!}\prod\mu_{\alpha_i}^{\beta_i}\right\} + O\left(\frac{1}{N}\right)$$

μ_{α_i} が n より order が低いなら

$$K_m = \frac{1}{n^m}\left\{\sum_{\substack{\Sigma\alpha_i\beta_i=m \\ \alpha_i\neq 1 \\ \Sigma\beta_i=max}} \frac{m!}{\prod(\alpha_i!)^{\beta_i}}\cdot\frac{n!}{(n-\Sigma\beta_i)!\prod\beta_i!}\prod\mu_{\alpha_i}^{\beta_i}\right\}$$

とするとき

$$E_m = K_m + o(K_m) + O\left(\frac{1}{N}\right)$$

が成立する。

こゝに

$$K_{2\lambda} = \frac{1}{n^{2\lambda}}\frac{(2\lambda)!}{(2!)^\lambda}\frac{n!}{(n-\lambda)!\,\lambda!}\mu_2^\lambda$$

$$= \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots\cdots(2\lambda-1)}{n^\lambda}\mu_2^\lambda + o\left(\frac{1}{n^\lambda}\right)$$

故に次式を得る

$$E_{2\lambda} = \frac{1\cdot3\cdot5\cdots\cdots(2\lambda-1)}{n^{\lambda}}\mu_2^{\lambda} + o\left(\frac{1}{n^{\lambda}}\right) + O\left(\frac{1}{N}\right)$$

依つて

$$\Pr\left\{|\bar{X}-\tilde{X}| \geq k\sigma_{\bar{x}} + o\left(\frac{1}{n}\right) + O\left(\frac{1}{N}\right)\right.$$

$$\leq \frac{1\cdot3\cdot5\cdots\cdots(2\lambda-1)}{k^{2\lambda}}$$

即

$$\Pr\left\{|\bar{X}-\tilde{X}| < k\sigma_{\bar{x}}\right\} > 1 - \frac{1\cdot3\cdot5\cdots\cdots(2\lambda-1)}{k^{2\lambda}}$$

$$+ o\left(\frac{1}{n}\right) + \left(\frac{1}{N}\right)$$

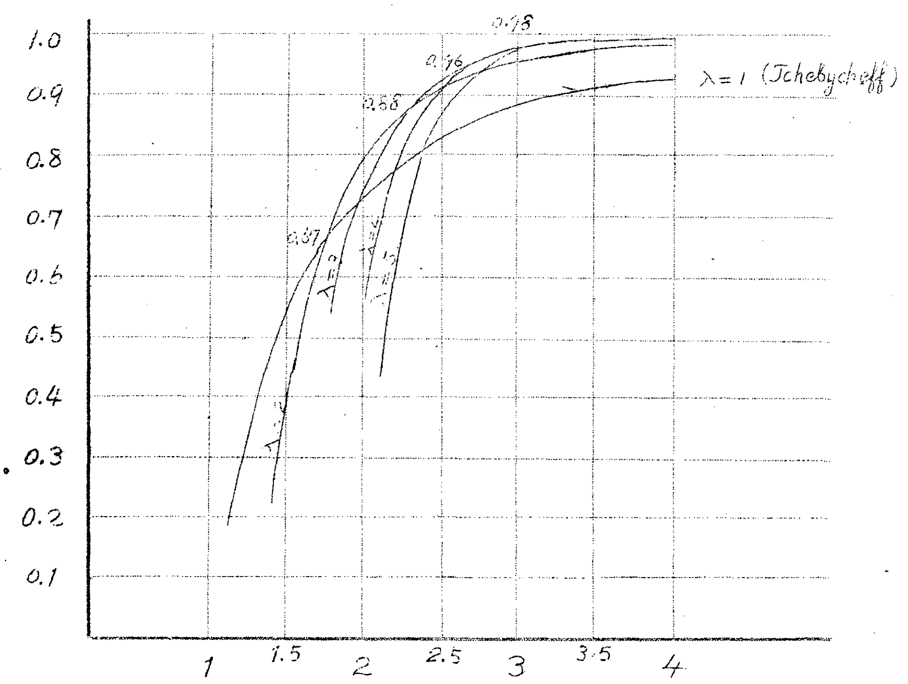
此の不等式を *degree* λ の不等式と云ふ事にするなら，kの區間 $[2\lambda-1,\ 2\lambda+1]$ に対して *degree* λ の不等式が最大の確率を保証する。

之は多くの分布に対し *distribution free* な *Sample mean* の *confidence interval* を與へる。

次の数字は，λ, $k\sigma_{\bar{x}}$ の種々な値に対する確率の値である。

k \ λ	1	2	3	4	5
1	0	0	0	0	0
1·5	0.5556	0.4074	0	0	0
2·0	0.7500	0.8130	0.7657	0.5899	0.0771
2·5	0.8400	0.9232	0.9386	0.9312	0.9009
3·0	0.8889	0.9629	0.9771	0.9840	0.9840
3·5	0.9184	0.9800	0.9918	0.9953	0.9966
4·0	0.9444	0.9853	0.9963	0.9984	0.9991

又，次図は之等不等式群の保証する確率の *graph* である。



猶，詳しい，数表・図表が当研究室にあるから，来所されゝば御覧に入れます。

計算・作図・浄書等に小島嘉江，鈴木三千代両君の労を煩はした。此処に厚く感謝の意を表する。

原稿提出後，遠藤健児君から，

$o(\frac{1}{n})$, $O(\frac{1}{N})$ 等の用法が *Landau* とは違ふのだから説明がないと判らないと云ふ御注意を頂いた。之は尤もなので

$f = O(g)$ を以て

$\frac{f}{g}$ の値が g に無関係

$f = o(g)$ を以て

$\frac{f}{g}$ の値が *neglect* 出来る事を意味する。

と云ふ事を付け加へる。