㊻ 條件附確率について

竹之内　脩

こゝに（実）確率変数 X と，確率事象 B とが與えられたとする。そのとき，我々は $X=x$ なる條件の下に於ける事象 B の條件附確率を次のようにして定義している。

即ち，今

$$Pr.\{B,\ X<x\} = F_1(x)$$

とおくならば，之は X の分布函数 $F(x)$ に対して絶対連続な単調増加函数となり、従つて $F(x)$ によつて実数の空間に導入された測度（簡単のため F－測度と略稱する）に関する Radon-Nikodym の定理を用いれば

$$(1)\qquad Pr\{B,\ X<x\} = \int_{-\infty}^{x} g(x)\,dF(x)$$

なる如き B－可測函数 $g(x)$ が F－測度 0 の集合の上を除いて一意的に定まる。そこでこの $g(x)$を $Pr.\{B/X=x\}$ と置く，即ち上記の條件附確率とするのである。（尚 $g(X)$ なる確率変数を考えて之を條件附確率とする方法もある（例えば［Ito：p.18］参照）が，これは以下に述べる理由（§2 参照）から實意を表し難い。）これから又，二つ確率変数 X，Y があつたとき，$X=x$ なる條件の下に於ける Y の條件附分布函数 $G(x,y)=Pr.\{Y<y/X=x\}$ が定義される。（［Doob：Theorem 3.1］参照）

そこで逆に，分布函数が與えられた $F(x)$ なる如き確率変数 X に

対して，Ｘが x なる値をとつたときの確率変数Ｙの條件附分布函数たる $G(x, y)$ が與えられたとき，このようなＸ，Ｙを一つの確率空間に於ける確率変数として実現するのにはどうしたらよいかという問題を考えてみる。その一つの方法として普通次のように考えるようである：先づ二次元分布函数

$$F(x, y) = \int_{-\infty}^{x} G(x, y)\, dF(x)$$

を導入する。そして実数空間 R^1, R^2 の直積 $R^1 \otimes R^2$ の中の
$\{(x^1, x^2); x^1 < x, x^2 < y\}$
なる形の集合に対して，その確率が $F(x, y)$ であると定義すれば，これから出発して一つの確率空間が構成される。

この確率空間の中で各座標函数 $X:(x^1, x^2) \to x^1$, $Y:(x^1, x^2) \to x^2$ を考えれば，之によつて上にあげたような性質を有する確率変数Ｘ，Ｙが実現せられるのである。（［Doob：§4］）．しかしこの議論にはいくつかの不満な点があることを注意したい。それは，

［第　一］元來二次元分布函数というのは，二つの確率変数を同時に考えているのであり，條件附分布函数というのは，一つの確率変数を予め與えた後に，之に対する條件によつて他の確率変数を考えようというのである。従つて條件附分布函数が與えられた時に一々それを同時分布に直して考えているという上記の考え方では，條件附確率のもつ意義の本質性は貧弱なものとなるであろう。

［第　二］條件附確率を與えるというのは，上記の如く，既に考えていた確率変数に対して，更にこれ等に関する條件を與えて，又いくつかの確率変数を定義し，そうすることによつて，その確率変数の範囲をふやす（拡張する）ということを眼目にするのであるのに，前記の方法は全く改めて確率空間を定義し直すことを要求するものであつて，その繁雑なことは云う迄もないことである。

［第　三］又前記の方法では，既にある確率変数と新しい確率変数との間の関係というものについては，何の知識も與えない。

従つて例えば，予め確率空間が與えられた場合，これがどういう條件をみたしていれば（或はどれだけの條件をみたす確率空間をはじめから考えることにすれば）上記のようなやり方（［第二］の部分の最初のところを参照）で確率変数の範囲を拡大して行くことが出來るか（例えば最初に與えた確率変数と独立な確率変数をとるというような場合は（我々にとつてつまらない場合ではあるが）一番顕著なものである）というような問題に対しては解答を與えることが出來ない。

P. Lévy の考えは，之等とは異るように思われる。即ち確率変数 X と條件附分布函数 $G(x, y)$ を與えたときに，予め考えていた確率変数の外に更に $G(x, y)$ を $X = x$ なるときの條件附分布函数とするような確率変数をつけ加えて行くという立場をとつているように思う。邦書で Lévy の書（[Lévy]）の内容を傳えているものにもこの点は充分解明されていないようなので，以下にはこの立場にたつて説明して見ることにする。

§ 1. 確率空間の表現と，條件附確率

確率事象の集合K（即ち σ-完備 Boole 代数）と，その上に確率法則 Pr.（即ちK上の完全加法的な正の実数値をとる分配的汎函数で $Pr.\{I\} = 1$，$Pr.\{0\} = 0$ なる如きもの）が與えられたとする。

別に空間（点集合）Ω と，その上の完全加法的集合体 $\mathcal{L}_\omega$ とに対して，$\mathcal{L}_\omega$ から K の中への Ω を I，ϕ を 0 にうつす Boole-代数としての準同型対応が存在する，即ち $\{K, Pr.\}$ 上の $(\Omega, \mathcal{L}_\omega)$-確率変数 X があるときに，$(\Omega, \mathcal{L}_\omega)$ は X による $\{K, Pr.\}$ の表現であるという。このとき，この対応 X によつて新に確率空間 $(\Omega, \mathcal{L}_\omega, P_\omega)$ が混成される。

今別に一つの事象 B をとつたとき，$Pr.\{B, X \in b_\omega\}$ $(b'_\omega \in \mathcal{L}_\omega)$ は $(\Omega, \mathcal{L}_\omega)$ 上の P_ω に関して完全加法的な集合函数となり，従つて任意の $b_\omega \in \mathcal{L}_\omega$ について

$$Pr.\{B, X \in b_\omega\} = \int_{b_\omega} g(\omega)\, dP(\omega), \quad 0 \leq g(\omega) \leq 1$$

となるような，Ω 上の $\mathcal{B}_\omega$-可測函数 $g(\omega)$ が P_ω-測度0の集合の上を除いて一意的に定まる。 $g(\omega)$ を $X=\omega$ なる條件の下に於ける事象 B の條件附確率と呼ぶ。

更に第二の空間 $\Omega^{(1)}$ 上と，その中で或高々可附番個の部分集合を含む最小の完全加法的集合体として定義された $\mathcal{B}_{\omega^{(1)}}$ とに対して，$(\Omega^{(1)}, \mathcal{B}_{\omega^{(1)}})$ への表現 $X^{(1)}$ を考えると [Doob ; Theorem 3.1] に於ける如くして，條件附確率分布

$$Pr.\ \{ X^{(1)} \in b^{(1)} / X=\omega \} \qquad (b^{(1)} \in \mathcal{B}_{\omega^{(1)}},\ \omega \in \Omega)$$

が，Ω 上 P-測度0の集合の上を除いて定義される。

以後通常の一次元確率空間は $(R^1, \mathcal{B}^1, P^1)$ （$\mathcal{B}^1$ は Borel 集合の系，P^1 はその都度定められる確率測度）で示すことにする。

§ 2. 條件附分布函数と確率変数

今確率空間 $\{K, Pr.\}$ とその $(\Omega, \mathcal{B}_\omega)$ への表現を與える確率変数 X を考える。そして之に対して，$\{K, Pr.\}$ 上の $(R^1, \mathcal{B}_\omega)$-確率変数 X_1 は，その條件附分布函数が

$$(2) \qquad G(\omega, x) = Pr.\ \{ X_1 < x / X=\omega \}$$

$$(-\infty < x < \infty, \quad \omega \in \Omega)$$

であるものとする。

こゝで $G(\omega, x)$ は x を定めれば $\mathcal{B}_\omega$-可測，且つ Ω 上 P-測度0の集合の上を除けば，残りの ω に対して，一次元分布函数であるようなものとする。（X_1 を実確率変数と限つたことは本質的な制限でない，[Doob ; Lemma 1.1] 参照）

こゝで次の

仮定　$G(\omega, x)$ は Ω 上 P-測度0の集合の上を除いて，他の ω に対しては必ず0と1との間のすべての値をとる。

を導入する。（我々は $G(\omega, x)$ は一価函数なるものとしておくので，上の仮定は本質的である）これは例えば $(\Omega, \mathcal{B}_\omega, P_\omega)$ 自身一次元確率空間であるような場合を考えて見れば，さして認めがたい仮

定ではない。　この仮定の下に次の定理が成立つ。
（［ $\mathscr{L}$évy ; p. 71. 17行以下 ; p. 123. 8～9行 ）

定　理　２　：　$\{K, Pr\}$ 上の確率変数 $G(X, X_1)$ は X と独立である。

定理の意味を説明するならば，$G(\omega, x)$ は，$\Omega \otimes R'$ なる積空間の上で，$\mathscr{L}_\omega \otimes \mathscr{L}'$ なる完全加法的集合族について可測なことが容易に認められるし，又 X，X_1 を結合して (X, X_1) なる $(\Omega \otimes R', \mathscr{L}_\omega \otimes \mathscr{L}')$ ―確率変数を得ることが出来るので，$G(X, X_1)$ はその確率変数の函数として，通常のように定義されているものである。

従ってこれは一つの実確率変数だが，こゝで任意の $b_\omega \in \mathscr{L}_\omega$，$b'_\omega \in \mathscr{L}'$ に対して必ず

$$Pr.\{X \in b_\omega, G(X, X_1) \in b'\} = Pr.\{X \in b_\omega\} \cdot Pr.\{G(X, X_1) \in b_1\}$$

となるというのが定理の意味である。

証　明　　任意の $b \in \mathscr{L}_\omega$ と実数 $a\ (0 < a \leq 1)$ に対して

$$Pr.\{X \in b_\omega, G(X, X_1) < a\}$$

$$= \int_{b_\omega} Pr\{G(X, X_1) < a / X = \omega\} dP(\omega)$$

$$= \int_{b_\omega} \sup_{G(\omega, x) < a} G(\omega, x)\, dP(\omega)$$

$$= a \cdot P(b_\omega)$$

（之は厳密な書き方ではないが，次のように書けばよい．即ち (X, X_1) の同時分布を $F(b_\omega, x) = Pr.\{X \in b_\omega, X_1 < x\}$ として

$$Pr.\{X \in b_\omega, G(X, X_1) < a\}$$

$$= \iint_{\omega \in b_\omega, G(\omega, x) < a} dF(\omega, x) = \int_{b_\omega} dP(\omega) \int_{G(\omega, x) < a} d_x G(\omega, x)$$

$$= \int_{b_\omega} \sup_{G(\omega,x)<a} G(\omega, x)\, d P(\omega).\ )$$

こゝで $b_\omega = \Omega$ とおけば

$$\Pr.\{ G(X, X_1) < a \} = a$$

故に

$$\Pr.\{ X \in b_\omega, G(X, X_1) < a \} = \Pr.\{ X \in b_\omega \} \Pr.\{ G(X, X_1) < a \}$$

となり定理は証明された。

［証 終］

従つて確率変数 X に対して，条件附分布函数（或は條件附確率）が問題となつている場合には，X と独立な確率変数が存在すると考えるのは自然な考えである。 寧ろ X と独立な確率変数を考えるところに，その本質性があるといつてもよい。（我々が前に條件附確率を $g(X)$ なる確率変数と考えるのは適当でないといつた意味は，こゝで明かであろう。 勿論以下に見るように $g(X)$ なる確率変数も当然考察の途中に表れて来る。） 我々は以下この考えに従つて進んで行きたいと思う。（これが P. Lévy のとつた方法である。）

§ 3. 確率事象間の距離と，確率事象の收斂．

確率事象系Kの中に距離 ρ を

$$\rho(A, B) = \Pr.\{ A \frown B' \} + \Pr.\{ A' \frown B \} \qquad (A, B \in K)$$

によつて導入する。 但し二つの事象 A, B が一致するとは，夫等が確率 0 なる事象を除いて一致すること，即ち $\Pr.\{C\} = 0$ （$C \in K$）なる事象 C が存在して $A \frown C' = B \frown C'$ となることと約束するものとする。 この距離は通常の測度空間では，よく用いられている。（例えば［Yoshida, p. 108］，［Nakano, p. 323 以下］）。 そのよく知られた性質のうちから，次の定理を

引用しておく。

定理 3. ： 上に定められた距離によって K は完備な距離空間をなす。 即ち，この距離に関する基本列はいつでも収斂する。

証明は，前記の書を参照されたい。

この距離による収斂によつて，我々は確率事象の収斂を定義する。これは又，次のように考えれば事情が一層はっきりするであろう。

今事象 A に対して，実確率変数 X_A を

$$\{X_A < a\} = 0 \quad (a \leq 0)$$
$$= A' \quad (0 < a \leq 1)$$
$$= I \quad (1 < a)$$

によつて定義すれば，（平均値を $\mathfrak{M}(\cdot)$ で示す）

$$\rho(A, B) = \mathfrak{M}(|X_A - X_B|)$$

従つて，上に定めた収斂は，平均収斂に相当する。

§ 4. $(R', \mathcal{L}', P')$ の場合

Image をはつきりさせるために，先づ X は一次元確率変数なるものとして，その $X = x$ なるときの條件附確率として函数 $g(x)$ （$0 \leq g(x) \leq 1$，且つ $g(x)$ は $\mathcal{L}_w$－可測）を與えたときに之を條件附確率とする事象 B の存在を次の仮定の下に証明しよう。

仮　定　X と独立な確率変数 Y で，[0,1] で一様分布するものが存在する。（§5参照） 以後の記述の便宜上，次の記号を導入する。 [0,1] の中の任意の区間（どんな形でもよい） I に対して，左端点（I に属するかどうかは別として）を $\ell(I)$，右端点を $r(I)$， 又 $I + [0, \ell(I)]$ なる區間を $\check{I}$ で示す。

又 [0,1] を互に共有点のない有限個の區間（一点になつてもよい）に分割し：

$$[0,1] = I_1 + I_2 + \cdots + I_n$$

このような分割を一般に Δ で示す。

そして，
$$|\Delta| = \mathrm{Max}\left(r(I_j) - \ell(I_j)\right)$$ とおく，

さて，

$[0,1]$ は $g(x)$ の値域なのであるから，$[0,1]$の上のような分割 Δ を考えるというのは結局 $g(x)$ の値域を分割したということなのである。従つて $g(x)$ の値が各 I_j $(j = 1, 2, \cdots, n)$ のどれに含まれるかによつて，我々は排反する n 個の場合 $e_1, \cdots, e_n$ を考えているわけである。各 e_j $(j = 1, 2, \cdots, n)$ の中では B のおこる割合は $g(x) \in I_j$ で即ち $\ell(I_j)$ と $r(I_j)$の間の値をとつているわけだから，この分割を構成する各区間の幅を充分小さくとつておけば，Y が一様分布をするということから，e_j の中では B のおこるということを

$$\{Y \in \check{I}_j\} = \{Y < r(I_j)\}$$

（或は $\{Y \leq r(I_j)\}$ ）

でおきかえてもよいであろう。従つて結局 Δ に対して

$$(3) \quad B_\Delta = \bigcup_{j=1}^{n} \{g(X) \in I_j\} \cap \{Y \in \check{I}_j\}$$

なる事象を考えれば，これは B を近似していると考えることが出来る。従つて今分割 Δ を構成する各区間の幅を一様に狭くして行つたとき，B_Δがある一定の事象に収斂したとすれば，之を B とることができるであろう。（(3)式で $\{g(X) \in I_j\}$ と書いたのは，$g(X)$ なる X の函数を考えることが重要なのでなくて，$g(x)$ の値が含まれるような事象を K 内で考えることを問題にしているだけである。従つて

$$\{X \in \{x ; g(x) \in I_j\}\} \quad (j = 1, \cdots, n)$$

と書く方が穏當であるかも知れない。）

実際に，この筋道による証明は § 6 でする。

§ 5. 仮定に対する批判

こゝで上の仮定について，少しく検討して見る。

我々が（3）式が目標なのであるから，$Pr.\{g(X)\in I_j\}=0$ なる如き，I_j については Y はどう定義されていてもよい。（後で述べる條件を満しさえすれば），そこで今実数の集合 N_0 を

（4）　$x \in N_0 \rightleftarrows$ x を内点に含む実数の或区間 I_x が，存在して $Pr.\{g(x)\in I_x\}=0$ となるによつて定義しよう。

これは明かに R^1 の中の開集合である。しかる時我々の仮定は，次の如く弱めることが出来る。

<u>仮　定</u>　X と独立な実確率変数 Y で，且つその分布函数 $Pr\{Y<x\}$ が，

(i)　$R'-N_0$ の各点で連続である。

(ii)　$Pr.\{Y<a\}=a \quad (a\in R'-N_0)$

を満すというようなものが存在する。

我々は，次の § に於いて，X を一般な $(\Omega,\mathcal{L}_\omega,P_\omega)$-確率変数とした場合に，同様な仮定の下に前節の証明をするのであるが，しかし，かゝる確率変数の存在が保証されない場合もある。

そのような場合には我々は最初の確率空間 $\{K, Pr\}$ 乃至はその表現を問題にすることは出来なくて，たゞ，$(\Omega,\mathcal{L}_\omega,P_\omega)$ を含む新しい確率空間 $(\Omega^{(1)},\mathcal{L}_\omega^{(1)},P_\omega^{(1)})$ を定義して，その中で確率変数 Y を実現するにすぎない。しかしこの場合にも Ω から $\Omega^{(1)}$ を得るには，単に区間 $[0,1]$ と，その上の Borel 集合の全体（或いは可測集合の全体）$\mathcal{L}_{[0,1]}$ と，Lebesgve 測度 $P_{[0,1]}$ に対して直積空間 $(\Omega\otimes[0,1],\ \mathcal{L}_\omega\otimes\mathcal{L}_{[0,1]},\ P'_\omega\otimes P_{[0,1]})$ をつくれば，事足りるのであつて，序論で説明した方法に比してずつと容易であることは云うまでもないであろう。

§6. 一般の條件附確率

$\{K, Pr.\}$ を確率空間，$(\Omega, \mathcal{L}_\omega, P_\omega)$ をその表現，X をその表現を與える確率変数とする。

$g(\omega)$ は Ω 上の $\mathcal{L}_\omega$-可測函数で，$0 \leqq g(\omega) \leqq 1$ なる條件を満す。

更に実数の集合 N_0 はこの $g(\omega)$ に対して前節（4）と同様にして定義されているものとする。

仮　定　$\{K, Pr.\}$ 上の実確率変数 Y で，

（1）　X と独立，且つ

（2）　$Pr.\{Y < x\}$ は $R'-N_0$ の各点 x で連続で，且つその値は x に等しいというようなものが存在する。

しかるときは，

定　理　6．　確率事象 B（即ち $B \in K$）が存在して B は $g(\omega)$ を $X = \omega$ なる條件の下に於ける條件附確率として有する。

証　明．（記号については §4 参照）

$[0,1]$ の任意の分割 $\Delta : [0,1] = I_1 + I_2 + \cdots\cdots + I_n$ に対して，事象 B_Δ：

$$B_\Delta = \bigcup_{i=1}^{n} \{g(X) \in I_i\} \cap \{Y \in \overset{<}{I_i}\}$$

を対応させる。

ところで Y に対する仮定と，$R'-N_0$ が $[0,1]$ の中の閉集合なることから，任意 $\varepsilon > 0$ に対して $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ が存在して $r(I) - \ell(I) < \delta$ ならば

$$Pr.\left(\{g(X) \in I\} \cap \{Y \in \overset{<}{I}\}\right) \leqq \left(r(I) + \varepsilon\right) Pr.\{g(X) \in I\}$$

となる。従つて

$r(I) - \ell(I) < \delta$ ならば

$$\text{(5)} \quad \ell(I) Pr.\{g(X) \in I\} \leqq Pr.\left(\{g(X) \in I\} \cap \{Y \in \overset{<}{I}\}\right) \leqq r(I) Pr.\{g(X) \in I\}$$

が成立つていることは明かである。

これから $|\Delta| < \delta(\varepsilon)$ ならば

$$\sum_{j=1}^{n} \ell(I_j) \Pr.\{g(X) \in I_j\} \leq \Pr.\{B_\Delta\} = \sum_{j=1}^{n} \Pr.(\{g(X) \in I_j\} \cap \{Y \in \overset{<}{I}_j\})$$

$$\leq \sum_{j=1}^{n} \left(r(I_j) + \varepsilon\right) \Pr.\{g(X) \in I_j\} = \sum_{j=1}^{n} r(I_j) \Pr.\{g(X) \in I_j\} + \varepsilon$$

であり，又

$$\ell(I_j) \Pr.\{g(X) \in I_j\} \leq \int_{\{\omega; g(\omega) \in I_j\}} g(\omega) dP(\omega) \leq r(I_j) \Pr.\{g(X) \in I_j\}$$

$$(j = 1, 2, \cdots, n)$$

から

$$\sum_{j=1}^{n} \ell(I_j) \Pr.\{g(X) \in I_j\} \leq \int_{\Omega} g(\omega) dP(\omega) = \sum_{j=1}^{n} \int_{\{\omega; g(\omega) \in I_j\}} g(\omega) dP(\omega)$$

$$\leq \sum_{j=1}^{n} r(I_j) \Pr.\{g(X) \in I_j\}.$$

を得るから不等式

$$(6) \qquad \left| \Pr.\{B_\Delta\} - \int_{\Omega} g(\omega) dP(\omega) \right| \leq |\Delta| + \varepsilon. \qquad (|\Delta| < \delta(\varepsilon))$$

が成立つ.

次に二つの分割 $\Delta^{(1)}: [0,1] = I_1^{(1)} + \cdots + I_\ell^{(1)}$; $\Delta^{(2)}$: $[0,1] = I_1^{(2)} + \cdots + I_m^{(2)}$ $(|\Delta^{(1)}|, |\Delta^{(2)}| < \delta(\varepsilon))$ に対して，之等の間の距离 $\rho(B_{\Delta^{(1)}}, B_{\Delta^{(2)}})$ （§3 参照）を評価する。

今 $\Delta^{(1)}$, $\Delta^{(2)}$ の共通を Δ とすると，$B_\Delta \subset B_{\Delta^{(1)}}, B_{\Delta^{(2)}}$, $|\Delta| \leq |\Delta_1|, |\Delta_2|$ なることは明らか 故に

$$\rho(B_{\Delta^{(1)}}, B_{\Delta^{(2)}}) \leq \rho(B_{\Delta^{(1)}}, B_\Delta) + \rho(B_\Delta, B_{\Delta^{(2)}})$$

$$= \Pr.\{B_{\Delta^{(1)}} \cap B'_\Delta\} + \Pr.\{B_{\Delta^{(2)}} \cap B'_\Delta\}$$

$$= \mathrm{Pr.}\{B_{\Delta^{(1)}}\} - \mathrm{Pr.}\{B_{\Delta}\} + \mathrm{Pr.}\{B_{\Delta^{(2)}}\} - \mathrm{Pr.}\{B_{\Delta}\}$$

$$\leq \left|\mathrm{Pr.}\{B_{\Delta^{(1)}}\} - \int g(\omega)\,dP(\omega)\right| + \left|\mathrm{Pr.}\{B_{\Delta^{(2)}}\} - \int g(\omega)\,dP(\omega)\right|$$

$$+ 2\left|\mathrm{Pr.}\{B_{\Delta}\} - \int g(\omega)\,dP(\omega)\right|$$

$$\leq |\Delta^{(1)}| + |\Delta^{(2)}| + 2|\Delta| + 4\varepsilon$$

$$\leq 2\left(|\Delta^{(1)}| + |\Delta^{(2)}| + 2\varepsilon\right)$$

従つて今分割の列 $\Delta^{(1)}, \Delta^{(2)}, \ldots\ldots$ を

(7) $$\lim_{n\to\infty} |\Delta^{(n)}| = 0$$

なる如くとつておけば，之に応じて $\{B_{\Delta^{(n)}}\}_{n=1,2,\ldots}$ なる事象の列は K の中で，距離 ρ に対して基本列をなし，従つて収斂する(定理3)． この極限の事象(K の要素)を B とおく。

しからば分割の列 $\{\Delta^{(n)}\}_{n=1,2,\ldots}$ をどのようにとつても，これについて(7)が成立つていれば事象列 $\{B_{\Delta^{(n)}}\}_{n=1,2,\ldots}$ は B に収斂する。

さてこの事象 B の我々の求めているものなること証明しよう。

そのために今

$$g_n(\omega) = \mathrm{Pr.}\{Y \in \overset{<}{I}{}^{(n)}\} \qquad (g(\omega) \in I_j^{(n)} \not\subset N_0)$$
$$= 0 \qquad (g(\omega) \in I_j^{(n)},\ I_j^{(n)} \subset N_0)$$

とおくと， $g(\omega) \notin N_0$ ならば

$$\lim_{n\to\infty} g_n(\omega) = g(\omega)$$

なること明らかである。 しかも $P_\omega(\{\omega;\ g(\omega) \in N_0\}) = 0$

であるから， $\lim_{n\to\infty} g_n(\omega) = g(\omega)$ は Ω 上殆んど到る所成立する。

故に任意の $b_\omega \in \mathcal{B}_\omega$ について

$$\lim_{n\to\infty}\int_{b_w} g_n(\omega)\,dP_w(\omega) = \int_{b_w} g(\omega)\,dP_w(\omega).$$

一方

$$\int_{b_w} g_n(\omega)\,dP(\omega) = \sum_j \int_{b_w \cap \{\omega;\, g(\omega)\in I_j^{(n)}\}} g_n(\omega)\,dP(\omega)$$

$$= \sum_j \Pr\{Y \in \overset{<}{I}{}_j^{(n)}\}\cdot P(b_w \cap \{\omega;\, g(\omega) \in I_j^{(n)}\})$$

$$= \sum_j \Pr\{Y \in \overset{<}{I}{}_j^{(n)}\}\cdot \Pr\{X \in b_w \cap \{\omega;\, g(\omega) \in I_j^{(n)}\}\}$$

$$= \sum_j \Pr\{Y \in \overset{<}{I}{}_j^{(n)},\ X \in b_w,\ X \in \{\omega;\, g(\omega) \in I_j^{(n)}\}\}$$

$$= \sum_j \Pr\{g(X) \in I_j^{(n)},\ Y \in \overset{<}{I}{}_j^{(n)},\ X \in b_w\}$$

$$= \Pr\{\bigcup_j (\{g(X) \in I_j^{(n)}\} \cap \{Y \in I_j^{(n)}\}),\ X \in b_w\}$$

$$= \Pr(B_{\Delta^{(n)}} \cap \{X \in b_w\})$$

そして，　$\rho(B_{\Delta^{(n)}} \cap \{X \in b_w\},\ B \cap \{X \in b_w\}) \leq \rho(B_{\Delta^{(n)}}, B)$

から，この式の値は　$\Pr(B \cap \{X \in b_w\})$　に収斂する。

即ち，

$$\int_{b_w} g(\omega)\,dP(\omega) = \Pr(B \cap \{X \in b_w\}).\quad (b_w \in \mathcal{B}_w).$$

これは，$g(\omega)$ が事象 B の $X = \omega$ なる條件の下に於ける，條件附確率であるということに外ならない。

［証終］

§ 7. 条件附分布函数

$G(\omega, x)$ $(\omega \in \Omega,\ x \in R')$ を条件附分布函数とする。即ち

(1) x を固定すれば，ω に関して $\mathcal{B}_\omega$－可測，

(2) （殆んどすべての ω について）ω を固定すれば，x の単調増加左連続函数で $\lim_{x \to -\infty} G(\omega ; x) = 0$, $\lim_{x \to \infty} G(\omega, x) = 1$.

を満すものとする。そのとき，前節と同じ仮定の下に

定理 7.1： $G(\omega, x)$ を $X = \omega$ なる条件の下に於ける条件附確率分布とすような確率変数が存在する。

証明： R' の中に稠密な可附番集合 $\{r_i\}_{i=1,2,\cdots}$ をとり，定理6の証明に於ける如くして，即ち $g(\omega) = G(\omega ; r_i)$ ととつて $B^\circ_{r_i}$，$i = 1, 2, \cdots$ なる確率事象を定義する。これは，確率0の事象を除いて

(i) $r_i \leqq r_j$ ならば $B^\circ_{r_i} < B^\circ_{r_j}$

をみたし，又

(ii) $$P_r\{X \in b_\omega,\ B^\circ_{r_i}\} = \int_{b_\omega} G(\omega, r_i)\, dP(\omega)$$

を満足する。この $B^\circ_{r_i}$ を用いて

$$B_x = \bigcup_{r_i < x} B^\circ_{r_i} \qquad (-\infty < x < \infty)$$

と定義すれば，上の (i)(ii) から $\{X_1 < x\} = B_x$ なる如き実確率変数 X_1 が定義されることが直ちに認められる。

今この X_1 の $G = \omega$ なる条件の下に於ける条件附分布函数を $G'(\omega, x)$ とすると，任意の $i = 1, 2, \cdots\cdots$ について

$$P_r\{X \in b_\omega,\ X_1 < r_i\} = \int_{b_\omega} G'(\omega, r_i)\, dP_\omega(\omega)$$

$$= P_r\{X \in b_\omega,\ B_{r_i}\} = P_r\{X \in b_\omega,\ \bigcup_{r_j < r_i} B^\circ_{r_j}\}$$

$$= \sup_{r_j < r_i} \Pr\{X \in b_\omega,\ B^\circ_{r_j}\} = \sup_{r_j < r_i} \int_{b_\omega} G(\omega, r_j)\, dP_\omega(\omega)$$

$$= \int_{b_\omega} G(\omega, r_i)\, dP_\omega(\omega) \qquad (b_\omega \in \mathfrak{B}_\omega)$$

が成立ち，従つて

$$G(\omega, r_i) = G'(\omega, r_i)$$

が Ω 上 P_ω－測度○の集合 b_0 の上を除いて成立する。さて $G(\omega, x)$ も $G'(\omega, x)$ も，Ω 上測度○の集合 b_1, b_2 を除いた上では，たしかに分布函数になつているのだから，

$$\omega \notin b_0 + b_1 + b_2 \quad \text{ならば}$$

$$G(\omega, x) = G'(\omega, x)$$

となり，定理は証明された。　　　　　　　　　　［証　終］

この結果は更に，次のように拡張される。

即ち，今 $(\Omega^{(1)}, \mathfrak{B}_{\omega^{(1)}})$ を §1 の終りに述べたような，確率空間とし，$G(\omega, b_{\omega^{(1)}})$ $(b_{\omega^{(1)}} \in \mathfrak{B}_{\omega^{(1)}})$ は，

（iii）$b_{\omega^{(1)}}$ を固定すれば，ω の $\mathfrak{B}_\omega$ 可測函数

（iv）（殆んどすべての ω について）ω を固定すれば，$(\Omega^{(1)}, \mathfrak{B}_{\omega^{(1)}})$ 上の確率分布を與える

とする。しかるとき

定　理　7．2：前節に於ける仮定の下に，$(\Omega^{(1)}, \mathfrak{B}_{\omega^{(1)}})$－確率変数 X_1 が存在して，$G(\omega, b_{\omega^{(1)}})$ は $X = \omega$ なる條件の下に於ける X_1 の條件附確率分布を與える。

証明は，［Doob；Lemma 1:1］を用いて前定理に帰着させればよいので，こゝには省略する。

（5月25日）

文　　　献

[Doob] J. L. Doob : Stochastic processes with an integral-valued parameter. Trans. Amer. Math. Soc., Vol. 44 (1938) pp. 87–150 (特に pp. 91–104)

[Ito] 伊藤清：確率論の基礎 (1944) 岩波書店

[Lévy] P. Lévy : Théorie de l'addition des variables aléatoires. (1937) Gauthier-Villars.

[Nakano] 中野秀五郎：測度論第一巻 (1947) 裳華房

[Yoshida] 吉田耕作：線型作用素 (1943) 岩波書店