⑰ duration curve に現れる母数の一推定法

兼所員　増 山 元 三 郎

京大土木の岩井助教授から贈られた論文に

$$x \equiv \log \frac{Q-b}{a-Q} \qquad -b < Q < a$$

とおくと，x が $N(m, \sigma^2)$ の分布を示す例が与へてある。茲に a，b，m，σ^2 は未知母数とする。同教授は a，b を試行錯誤法で求めていられるが、次のようにすれば推定できる。

$$t \equiv \frac{x-m}{\sigma}$$

と置き，経験的分布函数と確率積分の表とから、Q に対応する t の値を求める。この時の Q の値を $Q(t)$ で表そう。すると問題は

$$\frac{Q+b}{a+Q} = e^{m+\sigma t}$$

で、Q と t とを与へて、a, b, m, σ を推定する問題になる。

今補間法で、$Q(t+h)$ を求めるものとし、h は既知常数とすると、よく知られているように

$$\frac{1}{Q(t+h)+b} = \frac{B}{Q(t)+b} + A$$

但し

$$B \equiv e^{-\sigma h}, \quad A = \frac{1-B}{a+b}$$

A, B, b は未知ではあるが常数である。

次にこの式を満ち一組の Q の値を Q_0, Q_1 とする。例えば $Q(\xi)$ と $Q(\xi+h)$ としてよい。これは実測値から補間法で常に得られる。次に、

$$Q(t+h) \equiv Q_1 + Y, \quad Q(t) \equiv Q_0 + X$$

と置き代入すると, Q_0, Q_1 が上の定差式を満ちことから

$$X = BY + A(Q_0 Y + Q_1 X + XY + bY + bX)$$

即ち $Y \neq 0$ として除ると

$$\left(Q_1 + b - \frac{1}{A}\right)\frac{X}{Y} + X + \left(Q_0 + b + \frac{B}{A}\right) = 0$$

即ち $\left(X, \frac{X}{Y}\right)$ なる点は同一直線上にある。この直線性で型の想の正しさの程度が分るし、実用に充分な近似で直線性が認められるなら、この直線から

$$\alpha_1 \equiv Q_1 + b - \frac{1}{A}, \quad \alpha_0 \equiv Q_0 + b + \frac{B}{A}$$

が分る。和と差とを作ると、

$$\alpha_1 + \alpha_0 = Q_1 + Q_0 + 2b + \left(\frac{B}{A} - \frac{1}{A}\right)$$

$$= Q_1 + Q_0 + (b - a)$$

$$-\alpha_1 + \alpha_0 = -Q_1 + Q_0 + \left(\frac{1}{A} + \frac{B}{A}\right)$$

$$= -Q_1 + Q_0 + (a+b)\left(\frac{1+e^{-\sigma h}}{1-e^{-\sigma h}}\right)$$

hの代りに$2h$の公差で計算すると、同様な式が得られ、

$$(a+b)\left(\frac{1+W^2}{1-W^2}\right)=(Q_2'-Q_0')-\alpha_2'+\alpha_0'\equiv\varepsilon_2$$

茲に $W\equiv e^{-\sigma h}\ (>0)$ とした。右辺は実測値から計算できるある量である。これと上式

$$(a+b)\left(\frac{1+W}{1-W}\right)=(Q_1-Q_0)-\alpha_1+\alpha_0\equiv\varepsilon_1$$

の　を求めると

$$\frac{(1+W)^2}{1+W^2}=\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}\equiv\mu$$

の右辺が実測値だけから分る。従ってWが求まる。Wが分ると上の和と差の式から，$a+b$とが分るから，結局

$$x\equiv\log\frac{Q-b}{a-Q}$$

が計算できることになる。従って又この平均や分散も求まり、m, σが推定できる。こうして得たσは先にWから求めたものと大体一致しなければならない。

この対数正規型の一つの一般化と看做すことができる。即ち、

H. Cramér : Mathematical methods of statistics, 1946

にある時系列の構造で

$$dQ_t=g(Q_t)\,d\xi_t$$

の式で

$$g(Q)\equiv cQ,\qquad c\text{は常数}$$

なら対数正規型

$$g(Q) \equiv c(Q-d)\,,\quad c,d \text{ は常数}$$

なら，非心対数正規型．

$$g(Q) \equiv C_0 Q^2 + C_1 Q + C_2 \qquad C_0, C_1, C_2 \text{ は常数}$$

なら、茲に述べた型になるからである。