④ 多葉函數に就いて

鍋島一郎

多葉函数に就いて少し氣の付いた事を述べる。

［定理］　$\{f(Z)\}$ は $f(Z)$ が D 内で正則で module ρ_1 の同等局所単葉函数とする。

$$f(Z) = Z + a_2 Z^2 + a_3 Z^3 + \cdots\cdots + a_n Z^n + \cdots\cdots 。$$

とし

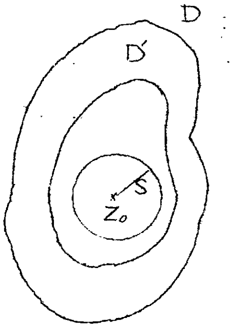
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(Z)}{k!} \neq 0 \quad \text{in } D, \quad |1 + a_2 + a_3 + \cdots\cdots + a_n| \geqq m > 0$$

ならば，

$$\left|\sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(Z)}{k!}\right| \geqq \mu > 0$$ が D の内部（dans l'interieur de D）

で成立する。

［證明］



$D \supset D'$ とし，$Z_0 \in D'$ で $\rho = \min(\rho_1, dis(B(D), B(D')))$ とする。

但し，B（D）は D の境界とする。

$Z_0 \in D'$ に対し，

$$f(Z) = f(Z_0) + f'(Z_0)(Z - Z_0) + \frac{f''(Z_0)}{2!}(Z - Z_0)^2 + \cdots\cdots + \frac{f^{(n)}(Z_0)}{n!}(Z - Z_0)^n + \cdots\cdots\cdots\cdots$$

in $|Z - Z_0| < \rho$

$\zeta = \dfrac{Z - Z_0}{\rho}$ とおき，$F(\zeta) = f(Z(\zeta))$ とおくと

$$F(\zeta) = f(z_0) + f'(z_0)\rho\zeta + \frac{f''(z_0)}{2!}\rho^2\zeta^2 + \cdots\cdots + \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}\rho^n\zeta^n + \cdots\cdots$$

$$G(\zeta) = \frac{F(\zeta) - f(z_0)}{\rho f'(z_0)} = \zeta + \frac{f''(z_0)}{2!}\frac{\rho\zeta^2}{f'(z_0)} + \cdots\cdots + \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}\frac{\rho^{n-1}\zeta^n}{f'(z_0)} + \cdots$$

なる $G(\zeta)$ は $|\zeta| < 1$ で正則で單葉正規化であるから，

$$\left| \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} \frac{\rho^{k-1}}{f'(z_0)} \right| < M_k \text{ ---------- } ① \quad (k = 2, 3, \cdots, n, \cdots)$$

となる。

$$\text{故に} \quad \left| \frac{\frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}}{f'(z_0)} \right| < \frac{M_k}{\rho^{k-1}}$$

$$\left| \sum_{k=1}^{n} \frac{\frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}}{f'(z_0)} \right| < \sum_{k=1}^{n} \frac{M_k}{\rho^{k-1}}$$

となるから，

$$g(z) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\frac{f^{(k)}(z)}{k!}}{f'(z)}$$ は D' 内で normal family

をなす。

しかも假定の $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(z)}{k!} \neq 0$ であるから，$g(z) \neq 0$ in D'

故に，$g(z)$ の一様收斂列は零点を持たない正則函数に收斂するか，又は常数 0 に收斂する。(Hurwitz)

しかるに $g(0) = 1 + a_2 + a_3 + \cdots\cdots + a_n$

であり，假定の $|1 + a_2 + a_3 + \cdots\cdots + a_n| \geq m > 0$

であるから，limit は const. zero でない。

故に $|g(z)| \geq \mu_1 > 0$ でなければならない。

何となれば，もしそうでなければ

$$|g_n(z)| < \frac{1}{n}$$

なる列 $\{g_n(Z)\}$ があり，これは normal family をなすから，その一様収斂部分列 $\{g_{n_i}(Z)\}$ は一様に zero に収斂することになり上に述べた事に反するからである。

即ち，

$$\left| \sum_{k=1}^{n} \frac{\frac{f^{(k)}(Z)}{k!}}{f'(Z)} \right| \geqq \mu_1 > 0$$

故に

$$\left| \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(Z)}{k!} \right| \geqq \mu_1 |f'(Z)|$$

となる。然るに montel[1] により D′ 内で $|f'(Z)| \geqq \mu_2 > 0$ であるから

$$\left| \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(Z)}{k!} \right| \geqq \mu_1 \mu_2 > 0$$

即ち

$$\left| \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(Z)}{k!} \right| \geqq \mu > 0 \quad となる。$$

［注意］　［１］のから $|f^{(k)}(Z_0)| < \frac{M_k}{\rho^{k-1}} k! |f'(Z_0)|$ となり montel の定理[2] により，D′ 内で，

$$\frac{1}{K} \leqq \left| \frac{f'(Z_0)}{f'(0)} \right| \leqq K$$ （K は D′ module のみに依存する）

であるから，　$f'(0) = 1$ により　$|f'(Z_0)| \leqq K$

故に　$$|f^{(k)}(Z_0)| < \frac{M_k}{\rho^{k-1}} k! \cdot K$$

となる。故に <u>$f^{(k)}(Z)$ は D′ 内で normal family をなす。</u>

---

(1), (2)　montel ; annals de l'Ecole Normale S.S. 54.

〔2〕この定理に於て $n=1$ の場合には

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(Z)}{k!} \neq 0$$ は $f'(Z) \neq 0$ となり満足され，

$|1+a_2+\cdots\cdots+a_n| \geqq m > 0$ は $1>1$ となり満足されるから

$|f'(Z)| \geqq \mu > 0$ となり montel の定理となる。

定理の証明から明らかな如く，次の事が成立する。

【系】定理と同じ $\{f(Z)\}$ につき

$$\sum_{k=1}^{n} f^{(k)}(Z) \neq 0 \ \text{in}\ D \qquad \left|\sum_{k=1}^{n} f^{(k)}(Z_1)\right| \geqq m > 0 \qquad Z_1 \in D'$$

ならば

$$\left|\sum_{k=1}^{n} f^{(k)}(Z)\right| \geqq \mu > 0$$ となる。

［定理］ $f(Z) = Z^p + a_{p+1}Z^{p+1} + \cdots\cdots$

を $|Z|<1$ で正則 p 葉函数属とすると，$f(Z)$ は正規属をなす。

［証明］

$f(Z)$ は P 葉故，高々 p 次の quasi normal family をなす。

しかるに $f(0) = f'(0) = f''(0) = \cdots\cdots = f^{(p-1)}(0) = 0$

$f^{(p)}(0) = 1$

であるから montel の定理[(3)]により，$f(Z)$ は normal family をなす。

---

(3) Montel ; Leçons sur les familes normales de fonctions analytiques et leur applications P.71

[定理]　$\{f_n(z)\}$ は D 内で有理型で module ρ の同等局所 p 葉函数列とする。

$f_n(z)$ が有理型函数 $f(z)$ に一様に収斂すれば $f(z)$ は module ρ の局所 p 葉となる。

[證明]

$z_0 \in D$ をとり，z_0 を中心とし半径 ρ の圓を C とする。C 内で $f(z)$ が p 葉でなければある値 a に対して

$$f(z) = a$$

が $p+q$ $(q \geqq 1)$ 個の根 z_i をもつ。

z_i の近傍で，$a < \infty$ なるか $a = \infty$ なるかにより

$$|f(z) - f_n(z)| < \varepsilon \quad (n \geqq n_1)$$

又は

$$\left| \frac{1}{f(z)} - \frac{1}{f_n(z)} \right| < \varepsilon$$

であるから

① $a < \infty$ の時は Hurwitz の定理により $f_n(z)$ $(n \geqq n_0)$ は $p+q$ 個の a 点を C 内にもつ.

② $a = \infty$ の時は $\frac{1}{f(z)}$ · $\frac{1}{f_n(z)}$ $(n \geqq n_1)$ は z_i の近傍で正則で一様収斂するから Hurwitz の定理により $f_n(z)$ $(n \geqq n_1)$ は $p+q$ 個の pole を C 内にもつ

これは假定に反する

故に $f(z)$ は module ρ の局所 p 葉となる。

[定理]　$f(z)$ は $|z| < r$ で有理型，$|z| = r$ で連続とし，$f'(z) \neq 0$. on $|z| = r$ とする。

$|z| < r$ に於ける $f(z)$ の多葉度を $n(r)$ とすると

$$n(r) \leqq \frac{3}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|1+R\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right|d\theta,\quad z=re^{i\theta}$$

となる。

〖証〗

$$F(Z)=\frac{1}{f(Z)-w_i}$$ とおくと

$F(Z)$は$f(Z)$と同じ多葉度をもつ。

$$n(r)-n(r,w_i;f)=n(r)-n(r,\infty;F(Z))$$

$$\leqq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|1+Rz\frac{F''(Z)}{F'(Z)}\right|d\theta^{(4)},$$

$$z=re^{i\theta}$$

（$n(r)\ w_i;f$）は$|Z|<r$に於ける　$f(z)=w_i$の根の数を示す）

しかるに
$$\frac{ZF''(Z)}{F'(Z)}=\frac{Zf''(Z)}{f'(Z)}-2\frac{Zf'(Z)}{f(Z)-w_i}$$

であるから

$$n(r)-n(r,w_i;f)\leqq\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|1+R\frac{zf''(z)}{f'(z)}-2R\frac{Zf'(Z)}{f(Z)-w_i}\right|d\theta$$

$$\leqq\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|1+R\frac{Zf''(Z)}{f'(Z)}\right|d\theta$$

$$+2\cdot\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|R\frac{Zf'(Z)}{f(Z)-w_i}\right|d\theta$$

---

(4)　Ozaki ; Science Report of the Tokyo Bunrika Daigaku ; S.A. vol. 4. N.77.

$$\leqq \frac{3}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left| 1 + R\,\frac{Z f''(Z)}{f'(Z)} \right| d\theta$$

となる。　w_1 を $f(Z) \neq w_1$ なる如くとれば

$$n(r, w_1 ; f) = 0$$

故

$$n(r) \leqq \frac{3}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left| 1 + R\,\frac{Z f''(Z)}{f'(Z)} \right| d\theta$$

となる。

［系］　$f(Z)$ が $|Z| \leqq r$ で有理型で，$|Z| = r$ で $f'(Z) \neq 0$ とするとき，

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left| 1 + R\,\frac{Z f''(Z)}{f'(Z)} \right| d\theta < \frac{p+1}{3}, \qquad Z = r e^{i\theta}$$

ならば $f(Z)$ は高々 p 葉である。

［定理］

$f(Z)$ は $|Z| < r$ で有理型で $|Z| = r$ で連続とし，且つ $f'(Z) \neq 0$ on $|Z| = r$ とする時

$$\frac{p+3\left[n^*(r,0)-n^*(r,\infty)\right]+4}{M} + \frac{p-3\left[n^*(r,0)-n^*(r,\infty)\right]-2}{m} \geqq 6$$

但し；$\quad -m < 1 + R\,\dfrac{Z f''(Z)}{f'(Z)} < M \quad (M, m > 0)$, $\quad Z = r e^{i\theta}$

ならば $f(Z)$ は高々 p 葉となる。

（ここに $n^*(r, a)$ は $|Z| < r$ に於ける $f'(Z) = a$ の根の数を表はすものとする。）

［證明］全く尾崎氏の方法(5)と同じであるから略す。

以上.

---

(5) Ozaki (4)