⑨ 検定力函数について

東京女高師　工藤弘吉

§ 序　S. S. Wilks の著書 The Theory of Statistical Inference の第四章に対立假説の検定の場合の第一種の過誤の危険率 α を與へて第二種の過誤の危険率 β を最小にする方法があるが，此を測度論における Radon-Nikodym の定理を中心にその立場から書きなほしてみた。その結果 α に対する最小の β を α の函数 $\beta(\alpha)$ とみるとき $\beta(\alpha)$ が極めて簡単な性質をもち，その上次の重要な性質をもつてゐることがわかつた。即ち，

大さ n の sample による検定の際のこの函数を $\beta^{(n)}(\alpha)$ とするとき $\alpha \neq 0$ ならば n が増すに従つて $\beta^{(n)}(\alpha)$ は小さくなり $\lim\limits_{n\to\infty} \beta^{(n)}(\alpha) = 0$

この性質のために我々が或る検定を行ふ際 $\beta^{(n)}(\alpha)$ のグラフを書いておけば，"α, β が與へられた数よりも小さくするためには sample の大さをいくらにすればよいか"なる問題の解はすぐわかる筈である。言を換へて云へばこの $\beta^{(n)}(\alpha)$ のグラフは大さ n の sample の検定をなす力を示してゐると考へられる。この意味でこの函数 $\beta^{(n)}(\alpha)$ を検定力函数と名づけた。

最近統計数理研究所の小川所員に注意されて知つた Ferris 等の所謂 Operating characteristics[1]) とこの検定力函数と

の関係は密接なものであるが，こゝではふれることは出来なかつた。 猶こゝで用ひられてゐる方法は殆ど全部積分論の演習の如き観を呈してゐるが証明等の簡単になる部分が多いものと思ふ。 それは今後にまつことにする。

1) C.D. Ferris, F.E. Grubbs, C.L. Weiver : Operating characterstics for the common Statistical Tests of Significance (Ann. Math. Stat. vol. XVII. 1946)

第一篇　検定力函数の定義及び性質

§1 定義

集合 Ω 及びその上の完全加法集合属 $\mathcal{B}$ ($\ni \Omega$) が與へられ，且つ $\mathcal{B}$ の上で定義された完全加法集合函数 P_0, P_1 ($P_0(\Omega)=1$, $P_1(\Omega)=1$; $P_0(E) \geqq 0$　$P_1(E) \geqq 0$)　が與へられてゐるものとする。

定義イ) Ω を母集團

$\mathcal{B}$ を共通の定義域とする集合函数 P_0, P_1 を假説，P_0 を帰無假説，P_1 を（ P_0 の）対立假説と云ふ。

定義ロ) $\Omega = A \smile B$ ($A, B \in \mathcal{B}$, $A \frown B = \Lambda$)（ Λ は空集合）で A の元 ω に P_0 を B の元 ω に P_1 を対応するとき，この対応を検定と云ひ A を採擇域，B を棄却域と云ふ。

このとき $P_0(B)$ を第一種の過誤の危險率（I-e.p.），$P_1(A)$ を第二種の過誤の危險率（II-e.p.）と云ふ。

定義ハ)　検定；$\Omega = A \smile B$ の I-e.p.，II-e.p. を夫々 α, β とするとき（ α, β ）を二次元 Euclid space 上に plot する

とき勿論この点は正方形[0.1;0.1]の上にあるがこの点(α, β)をこの検定の過誤点と云ふ。もし二つの過誤点が一致するときはこの検定は互に equivalent と云ふ。

検定は棄却域を示すときに一意的に定まるから以下に於てはたゞ棄却域をもつて検定を示すことにする。

定義二) 棄却域の集合 $F = \{R\}$ が次の條件をもつとき検定域系と云ふ。

1) F は Ω 及び空集合 Λ を元としてもつ

2) 包含関係($\geqq$)で linearly ordered である

定義ホ) 検定域系 $F = \{R\}$ の各 element R に過誤点を対応させたときに生ずる軌跡を過誤曲線となずける。

$R_1 R_2 \in F$ で且 R_1, R_2 の I-e.p を夫々 α_1 α_2 II-e.p を β_1 β_2 とするとき $\alpha_1 < \alpha_2$ なら $\beta_1 \geqq \beta_2$ であり $\beta_1 > \beta_2$ なら $\alpha_1 \leqq \alpha_2$ である。

定義ヘ) 二ッの検定域系 F_1, F_2 の過誤曲線が一致するとき F_1 と F_2 とは equivalent と云ふ。

過誤曲線を graph とする如き函数 $\beta(\alpha)$ を過誤函数と云ふ。

Radon-Nikodym の定理 [1] によれば、

二ッの假説 P_0, P_1 に対しては $S_1 \in \mathcal{B}$, 及び measurable な点函数 $f(\omega)$ $(\omega \in \Omega)$ を選んで任意の $E \in \mathcal{B}$ に対して

$$1.1) \qquad P_1(E) = P_1(E \frown S_1) + \int_E f_1(\omega)\, dP_0(\omega)$$

と書くことが出來る。

このとき

1) Saks ; Theory of Integral

1.2) $Q_k = \{\omega \mid f_1(\omega) \geq k\} \subseteq S_1$

とおくとき $Q' = \{Q_k\}_{k \geq 0}$ は空集合 Λ と共に一つの検定域系 Q を作る。

こゝで P_0, P_1 及び $\mathcal{B}$ に関する次の Condition of Continity (C.C) と呼ばれる假定を設ける。

(C.C) $\left\{ \right.$ 任意の棄却域 A ($\in \mathcal{B}$) は $P_i(A) \geq p_i$ ははば任意の p_i をとれば次の様な A の部分集合 B ($\in \mathcal{B}$) をふくむ

$\colon P_i(B) = p_i \quad (i = 0, 1)$

この假定 (C.C.) より次の lemmas が出る。

lemma (1.3)

任意の α ($0 \leq \alpha \leq 1$) (or β, $0 \leq \beta \leq 1$) に対して, B ($\in \mathcal{B}$) が存在して棄却域 B の I-e.p は α である (or B II-e.p は β である) [1)]

lemma (1.4) [2)]

検定域系 Q の一つの棄却域 Q の I-e.p を α とする。

I-e.p.α なるどんな棄却域 E の II-e.p も Q_k の II-e.p よりも小さくはない。即ち, I-e.p.α なる棄却域のうちで II-e.p の最小の棄却域は Q_k である。

[証明] [3)] $\alpha = \mathrm{I}(Q_k) = \mathrm{I}(E)$ であるから 1.1) 及び 1.2) により

$$\mathrm{II}(E) - \mathrm{II}(Q_k) = P_1(\Omega - E) - P_1(\Omega - Q_k)$$
$$= P_1(Q_k) - P_1(E)$$

1) "BのI-e.p." "BのII-e.p." 2) Wilks; The theory of Statistical Inference とは "B によつて決定される検定の I-e.p."

3) I(E), II(E) ハ夫々 E , I-e.p: II-e.p を示す

"B によつて決定される検定の II e.p" のことである.

$$= P_1(S_1) + \int_{Q_k} f_1\, dP_0 - P_1(S_1 \frown E) - \int_E f_1\, dP_0$$

$$= P_1(S_1 - E) + \int_{Q_k - E} f_1\, dP_0 - \int_{E - Q_k} f_1\, dP_0$$

1.2）より

1.5）　$\int_{Q_K - E} f_1\, dP_0 \geqq k\, P_0(Q_K - E),\quad \int_{E - Q_K} f_1\, dP_0 \leqq k\, P_0(E - Q_K)$

だから

$$\mathrm{II}(E) - \mathrm{II}(Q_K) \geqq k\{P_0(Q_K - E) - P_0(E - Q_K)\}$$
$$= k\{P_0(Q_K) - P_0(E)\} = 0$$

$$\therefore\quad \mathrm{II}(E) \geqq \mathrm{II}(Q_K)$$

注意（1.6）　1.5）の第二式に於て $P_0(E - Q_K) > 0$ ならば

$$\int_{E - Q_K} f_1\, dP_0 < k\, P_0(E - Q_K)$$

だから　$\mathrm{II}(E) - \mathrm{II}(Q_K) > 0$

即ち

1.7）　$P_0(E - Q_K) > 0$ ならば $\mathrm{II}(E) > \mathrm{II}(Q_K)$

定義ト）　同じ I-e.p. をもつ検定のうちで最小の II-e.p をもつ検定を最良検定　この場合の棄却域を最良棄却域と云ふ

lemma（1:4）によって Q_K（$\mathrm{I}(Q_K) = \alpha$）は α を I-e.p. をもつ最良棄却域である。

最良検定（或は最良棄却域）は unique ではないが互に equivarent である。

注意（1.8）　$I(Q_k) = A(k)$ なる函数は単調減少（m.d.f）でありすべての $k \geqq 0$ に対して一意的に定義された連続，$A(k) \doteqdot 1$，且 f_1 が有界で $f_1 \geqq M$ ならば $M \geqq k$ なる k に対しては $A(k) = 0$

こゝで任意に與へられた実数 $\alpha\ (0 \leqq \alpha \leqq 1)$ を I-e.p. とする最良検定（或は最良棄却域）は存在するかを考へてみる

$\alpha = A(k) = I(Q_k)$ なら Q_k が最良棄却域である。之を R_1 とする

2）もし　この様な k がなければ

$$\bigcap_{A(k) \geqq \alpha} Q_k = Q^*$$

とすれば $Q^* \in \mathcal{Q}'$ なる故 $Q^* = Q_{k_1}$ なる k_1 があるから $I(Q^*) < \alpha$,

$$\bigcup_{A(k) < \alpha} Q_k = Q^{**} \quad 1)$$

とすれば　$I(Q^{**}) \leqq \alpha$ である。$I(Q^{**}) = \alpha$ ならば $Q^{**} = R_\alpha$ とする。

もし　$I(Q^{**}) < \alpha$　ならば　$\alpha < I(Q^*) = P(Q^*)$

$Q^* = Q_{k_1} \supset Q^{**}$ より

$$P_0(Q^* - Q^{**}) > \alpha - P_0(Q^{**}) > 0$$

故に（C.C.）より $Q^{***}(\in \mathcal{B}, \subset Q^* - Q^{**})$ が存在して　$P_0(Q^{***}) = \alpha - P_0(Q^{**})$

そこで $Q^{**} \cup Q^{***} = R_\alpha$ とおくと

$Q^* \supset R_\alpha \supset Q^{**}$ 且 $I(R_\alpha) = \alpha$

1）Q^{**} は $\mathcal{B}_0$ に属することは $A(k_n) \to \alpha$ なる k_n の可附表番について考へれば明らかであらう。

この R_α が 最良棄却域となる。
何となれば $E\ (\in \mathcal{B},\ \alpha(E)=\alpha)$ を任意にとると lemma (1.4) の証明と全く同様に $\text{II}(E) \geqq \text{II}(Q)$ で又注意 (1.6) と同じく

$$(1.9) \quad P_0(E-Q)>0 \quad \text{ならば} \quad \text{II}(E)>\text{II}(Q_k)$$

故にすべての α について最良検定が定まり $\alpha_1>\alpha>\alpha_2$ ならばその最良棄却域 $R_{\alpha_1} \supset R_\alpha \supset R_{\alpha_2}$ ととることが出來る。
こゝで $\alpha=1$ に対しては Ω, $\alpha=0$ に対しては空集合 Λ を対応させる ($R_1=\Omega$, $R_0=\Lambda$)

こうして任意の数 $k \geqq 0$ に対して作られた Q_k を要素としてもつ棄却域系 $\mathbf{Q}=\{Q_k\}$ から任意の $\alpha\ (0 \leqq \alpha \leqq 1)$ を I-e.p. にもつ棄却域系 $\mathbf{R}=\{R_\alpha\}$ を作ることが出來る。
$\mathbf{R}$ を $\mathbf{Q}$ の完備化と云ふ。

こうして完備化された棄却域系（検定系）の各要素に夫々，II-e.p. $\text{II}(R_\alpha)$ を対応させるときすべての $\alpha\ (0 \leqq \alpha \leqq 1)$ に対して β が定まる之は α の函数 $\beta(\alpha)$ で定義ヘ）により過誤函数である。
他の棄却域系を完備化したものから I-e.p. α の函数として過誤函数 $\beta_1(\alpha)$ を考へるとき常に

$$\beta(\alpha) \leqq \beta_1(\alpha)$$

である。
定義ト）この様に或る一つの検定系 $\mathbf{R}_0$ の過誤函数が他のいかなる検定系 $\mathbf{R}$ の過誤函数よりも各点で大きくないならばこの $\mathbf{R}_0$ を最良検定系（最良棄却域系）と名づける。

勿論，最良検定系は unique ではないがお互に equivalent である。

定理 1　（C.C）を満す帰無假説 P_0 及び対立假説 P_1 に対して一つの最良検定系を求める方法は次の通りである。

P_1 を Radon-Nikodym の定理によつて分解するときに得られる。

P_0 — measure zero の集合 S 及び $\mathcal{B}$ — measurable point function $f_1(\omega)$ をとり（1.2）によつて得られる棄却域系の完備化が求めるものである。

注意（1,10）　定理 1 によつて得られる最良検定系はすべて equivalent である。

定義（1.11）二つの假説の組（P_0, P_1）に対してその最良検定系の過誤函数を（P_0, P_1）の検定力函数そのぐらふ（即ち過誤曲線）を検定力線と云ふ。検定力線の画いた図表を過誤図表と云ふ。

§ 2. 検定力線の性質

上の § で定義された検定力線は極めて簡単な性質をもつものでそれをこの § で論じよう。

定理 II　検定力函数は $\alpha \neq 0$ なる限り一價函数で，$\alpha \neq 0$ 又は $\beta(\alpha) \neq 0$ なる限り，狭義の単調減少函数である。

［證明］定理のはじめの部分は明らか

第二の部分を証明するために最良検定系 $\mathbf{R}$ 及びそれを定める P_0 − integrable function $f_1(\omega)$ を一つ定めておく。

$\alpha_1 > \alpha_2$ をとつて $R_{\alpha_1}, R_{\alpha_2}$ を α_1, α_2 に対応して $\mathbf{R}$ からとる。

$$(21)\quad \beta(\alpha_2)-\beta(\alpha_1) = P_1(R_{\alpha_1}) - P_1(R_{\alpha_2}) = \int_{R_{\alpha_1}-R_{\alpha_2}} f_1(\omega)\, dP_0(\omega)$$

であるから $\sup\limits_{\omega \in R_{\alpha_2}} f_1(\omega) = k$ とおくと

$$\beta(\alpha_2) - \beta(\alpha_1) \geqq k P_0(R_{\alpha_1} - R_{\alpha_2})$$

ところが i）假定によつて $P_0(R_{\alpha_1} - R_{\alpha_2}) = \alpha_1 - \alpha_2 > 0$.
且 ii）$k \neq 0$ 何となれば $k=0$ ならば $\Omega - R_{\alpha_2} \ni \omega$ なるすべての ω に対して $f_1(\omega) = 0$ 故に $P_1(\Omega - R_{\alpha_2}) = 0$
$\therefore\ \beta(\alpha_2) = 0$ 之は條件に反するから

$$\beta(\alpha_2) - \beta(\alpha_1) > 0$$

$$\text{or} \qquad \beta(\alpha_2) > \beta(\alpha_1)$$

$\boxed{\text{定理 III}}$ 検定力函数は連続である（但 $\alpha \neq 0$ とす）

［證明］ α_n を α_0 に單調に近づく減少列とし

$\alpha_n = P_0(R_n), R_n \in \mathbf{R}$ とする。

$R_{n+1} \subset R_n$ だから $R_0 = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} R_n$ とおくと $\alpha_0 = P_0(R_0)$
又 $\beta(\alpha_n) = \beta_n$, $\beta(\alpha_0) = \beta_0$ とすると $\beta_n \leqq \beta_0$ であるから $\lim \beta_n \leqq \beta_0$, 又 $\Pi(R_0) = \lim \beta$ であるから

$\mathrm{II}(R_0) \leqq \beta_0$ 　ところがもし $\mathrm{II}(R_0) < \beta_0$ ならば $\beta_0 = \beta(\alpha_0)$ の定義に反する　$\therefore\ \mathrm{II}(R_0) = \beta_0$　　$\therefore\ \lim \beta_n = \beta_0$

故に右側連続。

次に　$\alpha_n' < \alpha_{n+1}'$　　$\alpha_n' \to \alpha_0$

$$\beta(\alpha_n') = \beta_n',\quad \beta(\alpha_0) = \beta_0,\ \alpha_n' = P_0(R_n')\quad R_n' \in \mathbb{R}$$

$$\alpha_0 = P_0(R_0)\quad R_0 \in \mathbb{R} \text{ とする}$$

$$R_0' = \bigcup_{n=1}^{\infty} R_n' \text{ とおくと}\quad P_0(R_0') = \alpha_0$$

$$\mathrm{II}(R_0') - \mathrm{II}(R_0) = P_1(R_0) - P_1(R_0') = \lim_{n\to\infty}(P_1(R_0) - P_1(R_n'))$$

$$R_n' \subset R_0 \text{ だから}\qquad = \lim_{n\to\infty} P_1(R_0 - R_n')$$

$$\left.\begin{array}{l}R_n' \text{ の外では } P_1 \text{ は } P_0 \text{ に関して} \\ \text{absolutely continuous だから}\end{array}\right) = \lim_{n\to\infty}\int_{R_0 - R_n'} f_1\, dP_0$$

$\alpha_0 \neq 0$　であるから充分大きな n に対しては $\alpha_n' \neq 0$　故に $\sup_{\omega \in R_n'} f_1(\omega) < \infty$ であるから之を k とおくと

$$\leqq k \lim_{n\to\infty} P_0(R_0 - R_n')$$

$$= k \lim (P_0(R_0) - P_0(R_n'))$$

$$= 0$$

$$\therefore\ \mathrm{II}(R_0') \leqq \mathrm{II}(R_0)$$

又一方　　$\beta_0 \leqq \beta_n'$　　$\mathrm{II}(R_0') = \lim \beta_n'$

$$\therefore\ \mathrm{II}(R_0') \geqq \mathrm{II}(R_0)$$

$$\therefore\ \beta_0 = \mathrm{II}(R_0') = \lim \beta_n'$$

之は左側より連続なることを示す

故に両側連続である。

［定理 IV］　検定力函数 $\beta(\alpha)$ はすべての点（$\alpha = 0$ を除く）

で片側微係数 $\beta^{+}(\alpha)$, $\beta^{-}(\alpha)$ が存在し

$$\beta^{+}(\alpha) = -\sup[k \mid \alpha < P_0([f_1 \geqq k]^{\smile}S_1)]$$

$$\beta^{-}(\alpha) = -\inf[k \mid \alpha \geqq P_0([f_1 \geqq k]^{\smile}S_1)]$$

[證明] イ) $\alpha_n > \alpha_{n+1}$ $\alpha_n \to \alpha_0$ $(\alpha_0 \neq 0)$

$\alpha_n = P_0(R_n)$, $\alpha_0 = P_0(R_0)$ $(R_n, R_0 \in \mathbb{R})$ とすると

$R_n \supset R_0$ で

$$(2.2) \quad \frac{\beta(\alpha_n)-\beta(\alpha_0)}{\alpha_n-\alpha_0} = -\frac{P_1(R_n)-P_1(R_0)}{P_0(R_n)-P_0(R_0)} = -\frac{P_1(R_n-R_0)}{P_0(R_n-R_0)}$$

$$= -\frac{\int_{R_n-R_0} f_1 dP_0}{P_0(R_n-R_0)}$$

そこで $\inf\limits_{\omega \in R_n} f_1(\omega) = k_n$ $\sup\limits_{\omega \in R_0} f_1(\omega) = k_0$ とすると

$\alpha_0 \neq 0$ であるから $k_0 < \infty$ であり又定義より ……………

$\leqq k_n \leqq k_{n+1} \leqq \cdots\cdots \leqq k_0 < \infty$ であるから

$$\lim_{n\to\infty} k_n = k_0' \leqq k_0$$

今もし $k_0 > k_0'$ とすると $k_0 > k' > k_0'$ なる k' をとり

$$Q_{k'} = [f \geqq k']^{\smile}S_1 \quad Q_{k_0} = [f \geqq k_0]^{\smile}S_1$$

とすると $R_0 \subset Q_{k_0} \subset Q_{k'} \subset R_n$

$$\therefore \bigcap_{n=1}^{\infty} R_n \supset Q_{k'} \supset Q_{k_0} \supset R_0$$

又 $\lim\limits_{n\to\infty} P_0(R_n) = P_0(R_0)$

であるから $P_0(Q_{k'}) = P_0(Q_{k_0}) = P_0(R_0) = \alpha_0$

$k_0 > k' > k_0'$ なるどんなk'に対しても$P_0(Q_{k'}) = \alpha_0$であるから $P_0(Q'_{k_0}) = \alpha_0$ 故にはじめから R_0 を $Q_{k_0'}$ にとれば $k_0 = k_0'$ 故に $k_n \to k_0$ としても一般性は失はれない。

さて
$$k_n P_0(R_n - R_0) \leqq \int_{R_n - R_0} f_1(\omega)\, dP_0 \leqq k_0 P_0(R_n - R_0)$$

であるから(2.2)より

$$-k_n \geqq \frac{\beta(\alpha_n) - \beta(\alpha_0)}{\alpha_n - \alpha_0} \geqq -k_0$$

故に $n \longrightarrow \infty$ のとき極限があって

$$(2.3) \qquad \lim \frac{\beta(\alpha_n) - \beta(\alpha_0)}{\alpha_n - \alpha_0} = -k_0 = -\sup_{\omega \in R_0} f_1(\omega)$$

ロ) $\sup_{\omega \in R_0} f_1(\omega) = \sup[k \mid \alpha < P_0([f_1 \geqq k]^{\smile} S_1)]$

なることは・R_0の作り方(イ)の部分にある!)より明らかであらう。

ハ) 左側からの微係数 $\beta^-(\alpha)$ に関しても全く同様であって $\alpha_n < \alpha_{n+1} \longleftarrow \cdots\cdots \longrightarrow \alpha_0$ $\alpha_n = P_0(R_n)$ $R_n \in \mathbb{R}_0$ として $\alpha_0 = P_0(R_0)$ なる $R_0(\in \mathbb{R})$ のうちもっとも小なもの(or $\cap R_0$)を R_0とするとき

$$\lim \frac{\beta(\alpha_n) - \beta(\alpha_0)}{\alpha_n - \alpha_0} = -\inf_{\omega \in R_0} f_1(\omega)$$

であってこれから証明出来る。

注意(2.5) 左側微係数及び右側微係数は $\alpha = 0$ なる点以外のすべての点で存在し夫々単調増加であるからその導函数は

高々可附番箇の不連続点を持つことがわかる。故にその導函数を知れば検定力函数 $\beta(\alpha)$ は決定出来る。

§3. II-e.p. を定めて I-e.p. を最小にするときの過誤函数は検定力函数と一致する

§2では I-e.p を一定にしておいて II-e.p を最小にする検定域系の存在及びその過誤函数（検定力函数）の性質を考へたが本§では II-e.p を定めて I-e.p. を最小にする検定域の存在及び II-e.p.を変へたときに生ずる最小の I-e.p. は又一つの一意的な函数で前§の検定力曲線と全く一致することを述べる。

このことに関して次の lemma (1.4) に相当することを注意しておかなければならない。

Radon-Nikodym の定理により P_1- measure zero の集合 S_0 及び P_1 integral f_0 をとって

$$(3.1) \qquad P_0(E) = P_0(E \frown S_0) + \int_E f_0(\omega)\, dP_1(\omega) \qquad \text{for all } E \in \mathfrak{B}$$

とすることが出来るが $U_k = [\omega \mid f_0(\omega) \geqq k]$ を II-e.p. $P_1(\Omega - U_k) = \alpha$ なる棄却域としたとき同じ II-e.p. α をもつ他の棄域域 U' より I-e.p. は大きくない 即ち

$$P_0(U_k) \leqq P_0(U')$$

このことから他の如何なる過誤函数より小さな値をとる過誤函数をもつ検定系はこの様な U_k より作られることがわかった

そこで前§の函数 $f_1(\omega)$ を利用して次の様な函数を作ってみる。

lemma (3.2)

$$f_0(\omega) = \begin{cases} \sup\limits_{f_1(\omega) < k} \dfrac{1}{k} & \omega \in \bigcup\limits_{k \neq 0} Q_k - S_1 \\ k \neq 0 & \text{但し } Q_k = [\omega \mid f_1(\omega) \geqq k] \cup S_1 \\ 0 & \omega \in S_1 \cup S_0 \quad S_0 = \Omega - \bigcup\limits_{k \neq 0} Q_k \end{cases}$$

とするとき $P_1(S_0) = 0$ で f_0 は P_1 integrable function で 任意の $E\ (\in \mathcal{B})$ に対して

$$(3.3) \qquad P_0(E) = P_0(E \cap S_0) + \int_E f_0(\omega)\, dP_1(\omega)$$

は Radon-Nikodym の分解になってゐる。

[證明]: $k \neq 0$ に対して

$$(3.4) \qquad U_{\frac{1}{k}} = \Omega - Q_k$$

とおくとき $f_1(\omega) < k$ for $\omega \in U_{\frac{1}{k}} - S_0$ であるから

$$P_0(U_{\frac{1}{k}}) \geqq \frac{1}{k} P_1(U_{\frac{1}{k}})$$

又 $$P_0(Q_k) \leqq \frac{1}{k} P_1(Q_k)$$

又 $$P_0(Q_k - Q_{k'}) \leqq \frac{1}{k} P_1(Q_k - Q_{k'}) \qquad 0 < k < k'$$

且 $f_1(\omega)$ は $\mathcal{B}$-measurable function なことは $f_1(\omega)$ の同じ性質から明らかだから積分

$\int_{Q_k} f_1(\omega)\, dP_1(\omega)$ が定義出来て

$$\int_{Q_k - Q_{k'}} f_0 \, dP_1 \geqq \frac{1}{k} P_1(Q_k - Q_{k'}) \qquad 0 < k < k''$$

同様にして $E \in \mathcal{B}$ ならば

$$|P_0(E \cap (Q_k - Q_{k'})) - \int_{(Q_k - Q_{k'}) \cap E} f_0 \, dP_1|$$

$$\leqq \left| \frac{1}{k} P_1(E \cap (Q_k - Q_{k'})) - \frac{1}{k'} P_1(E \cap (Q_k - Q_{k'})) \right|$$

$$= \left| \frac{1}{k} - \frac{1}{k'} \right| P_1(E \cap (Q_k - Q_{k'})).$$

$\frac{1}{k} - \frac{1}{k'} < \varepsilon$ なる如く k, k' をとるとき $\leqq \varepsilon P_1(E \cap (Q_k - Q_{k'}))$
$\Omega - S_0 = \bigcup_{k, k'} (Q_k - Q_{k'})$ であるから，両辺を夫々加へると

$$|P_0(E \cap (\Omega - S_0)) - \int_{E \cap (\Omega - S_0)} f_0 \, dP_1| \leqq \varepsilon P_1(E \cap (\Omega \cap S_0)) \leqq \varepsilon$$

$\varepsilon \to 0$ とすると

$$P_0(E \cap (\Omega - S_0)) = \int_{E \cap (\Omega - S_0)} f_0(\omega) \, dP_1(\omega)$$

$P_1(S_0) = 0$ だから $P_0(E \cap (\Omega - S_0) = \int_E f_0(\omega) \, dP_1(\omega)$

故に $P_0(E) = P_0(E \cap S_0) + P_0(E \cap (\Omega - S_0))$

$$= P_0(E \cap S_0) + \int_E f_0 \, dP_0$$

勿論 $P_0(E \cap S_0)$ は singular (P_1) である。(q.e.d)
以上の lemma (3.2) より $\{U_{\frac{1}{k}}\}$ $k \neq 0$ は一つの棄却域系である。そしてこの過誤曲線は $\{Q_k\}$ の過誤曲線と全く一致するから棄却域系としては equivalent である。故にこの検

定系を完備化して連続的な過誤曲線を作るときは全く検定力曲線と一致する。なほ検定系を完備化する際には§2で作られた検定系をそのまゝ用ひることが出来るから以後の議論ではいづれの場合でも一つの検定系を定めておく。

以上のことを次に定理としてのべておく。

$\boxed{\text{定理V}}$ 第二種の過誤の危険率を定めて第一種の過誤の危険率を最小にする様な検定系（equivalentを無視して）は一つあり，唯一つにかぎるが，それは第一種の過誤の危険率を定めて第二種の過誤の危険率を最小にする検定系と同じである。即ちその時の過誤曲線は検定力曲線である。

注意（3.5） 以上でわかつた様にI-e.p.α，II-e.p.βの検定力曲線がわかつておれば，與へられたαに対してβの最小の限界或は逆に與へられたβに対してαのとり得る最小の限界がわかるばかりでなく$\alpha+\beta$を最小にする棄却域或はαとβとに夫々加重した割合に重視するときの棄却域等がもとめられる。くわしい利用法は§7で述べるであらう。

§4. 獨立な実験は行へば行ふほど過誤の危険率は小さくなる

今迄は唯一回の実験によつて検定を行ふ場合の検定力の問題を議論して来たのであるがこの章では次のnon-trival condition（N.T.）と呼ばれる簡單な條件を入れることによつて独立な実験ならば実験回数を多くすればするほど過誤をおかす危険率が減つて来ることを述べよう。

(N.T.)　P_0 と P_1 との検定力函数は $\alpha+\beta=1$ ではない

或は

すべての E（$\in \mathcal{B}$）に対して常に $P_0(E) \equiv P_1(E)$

ではない

上の條件 N.T. のもとに論ずるに先立って抽象空間（$\Omega, \mathcal{B}, P_i$）（$i=0,1$）についての *Fubini* の定理を用ひることを注意しなければならない。そのために次の一連の定義を行ふ必要がある。

Ω の任意の二つの要素 ω_1, ω_2 の組（ω_1, ω_2）の全体を，product space $\Omega^{(2)}$ と云ひ $\mathcal{B}$ の任意の二つの要素 A, B の夫々の要素（$\omega_1 \in A$, $\omega_2 \in B$）の組（ω_1, ω_2）を $A \times B$ と云ひその全体の有限箇の和のなす有限加法体をふくむ最小の Borel 集合を $\mathcal{B}^{(2)}$ とし $\mathcal{B}^{(2)}$ の上の完全加法集合函数 $P_i^{(2)}$ があって $P_i^{(2)}(A\times B) = P_i(A) \cdot P_i(B)$（$i=0,1$）を満足させることが出來る。[1)]

こうして作られた（$\Omega^{(2)}$, $\mathcal{B}^{(2)}$）を独立な二回の実験の population と云ふ。

独立な二回の実験の母集団の P_0 から作られた $P_0^{(2)}$ を帰無假設 P_1 から作られた $P_1^{(2)}$ を対立假設とするときに出來る検定力函数を $\beta^{(2)}(\alpha)$ とし独立な二回の実験における検定力函数その曲線を同じく検定力曲線と云ふ。それに対して（$\Omega, \mathcal{B}, P_0$），（$\Omega, \mathcal{B}, P_1$）を帰無假設，対立假設とする検定力曲線を単一な実験における検定力曲線と云ふ。之の函数を，$\beta(\alpha)$ とするとき

$$\beta^{(2)}(\alpha) \leqq \beta(\alpha),$$

1）．河田敬義　リーマン式積分とルベック式積分（數物誌 Vol. 16，No. 7．P. 308　定理 2．1）

何となれば Ω における I-e.p.α なる棄却域（$\mathbb{R}$ ∋）R_α をとり又 $\Omega^{(2)}$ に於ても最良棄却域 $\mathbb{R}^{(2)}$ を定めてその中から I-e.p.α なる $R_\alpha^{(2)}$ をとる

$$P_0^{(2)}(R_\alpha \times \Omega) = P_0^{(2)}(R_\alpha^{(2)}) = \alpha \quad \text{であるから}$$

II-e.p は

$$(4.1) \qquad \mathrm{II}(R_\alpha \times \Omega) \geqq \mathrm{II}(R_\alpha^{(2)})$$

注意（1.6）によつて

$$(4.2) \qquad \begin{cases} P_0^{(2)}((R_\alpha \times \Omega) - R_\alpha^{(2)}) > 0 \ \text{ならば} \\ \qquad\qquad \mathrm{II}(R_\alpha \times \Omega) > \mathrm{II}(R_\alpha^{(2)}) \end{cases}$$

である。

ところが $P_1(R_\alpha) = P_1^{(2)}(R_\alpha \times \Omega)$ であるから

$$(4.3) \begin{cases} \qquad\qquad \mathrm{II}(R_\alpha) \geqq \mathrm{II}(R_\alpha^{(2)}) \\ \text{且つ} \ P_0^{(2)}((R_\alpha \times \Omega) - R_\alpha^{(2)}) > 0 \ \text{ならば} \\ \qquad\qquad \mathrm{II}(R_\alpha) > \mathrm{II}(R_\alpha^{(2)}) \end{cases}$$

次に，この $P^{(2)}((R_\alpha \times \Omega) - R_\alpha^{(2)}) > 0$ の外の條件で
$\mathrm{II}(R_\alpha) > \mathrm{II}(R_\alpha^{(2)})$ となる場合
を問題にするのであるがそのために次の lemma を述べておく

lemma（4.4） Ω における P_1 が P_0 に関して

$$P_1(E) = P_1(E \cap S_1) + \int_E f_1(\omega)\, dP_0(\omega)$$

と Randon - Nikodym の分解がなされるとき，$\Omega^{(2)}$ に於て $P_1^{(2)}$ は $P_0^{(2)}$ によって

$$(4.5)\quad P_1^{(2)}(E^{(2)}) = P_1^{(2)}(S_1^{(2)} \frown E^{(2)}) + \int_{E^{(2)}} f_1(w) f_1(v)\, dP_0^{(2)}(w, v),$$

$$(E^{(2)} \in \mathcal{B})$$

但 $\quad S_1^{(2)} = (\Omega \times S_1)^{\cup}(S_1 \times \Omega)$

と Randon-Nikodym 分解される。

（証 明） $C(w, v)$ を $E^{(2)}$ の characteristic function とするとき

$$P_1^{(2)}(E^{(2)}) = \int_{\Omega^{(2)}} C(w, v)\, d P_1^{(2)}(w, v)$$

であるから Fubini の定理[1] によって

$$(4.6)\quad P_1^{(2)}(E^{(2)}) = \int_{\Omega} \int_{\Omega} C(w, v)\, dP_1(w)\, dP_1(v)$$

Change of measure[2] によって

$$(4.7)\quad \int_{\Omega} C(w, v)\, dP_1(w) = \int_{\Omega} C(w, v) f_1(w)\, dP_0(w) + \int_{S_1} C(w, v)\, dP_1(w)$$

$$(4.8)\quad \int_{\Omega} \left(\int_{\Omega} C(w, v) f_1(w)\, dP_0(w) \right) dP_1(v)$$

$$= \int_{\Omega} \left(\int_{\Omega} C(w, v)\, dP_1(v) \right) f_1(w)\, dP_0(w)$$

$$= \int_{\Omega} \left(\int_{\Omega} C(w, v) f_1(v)\, dP_0(v) + \int_{S_1} C(w, v)\, dP_1(v) \right) f_1(w)\, dP_0(w)$$

$$= \int_{\Omega} \left(\int_{\Omega} C(w, v) f_1(w) f_1(v)\, dP_0(v) \right) dP_0(w)$$

$$+ \int_{\Omega} \left(\int_{\Omega} C(w, v)\, dP_1(v) \right) f_1(w)\, dP_0(w)$$

1) Y 河田 ibd (数物誌 Vol. 16 NO. 7, 322頁, 定理 5.9)

2) S. Saks: Theory of the Integral P. 37

又 Fubini の定理により

(4.9) $$\int_{\Omega}\left(\int_{S_1} C(w,v)\,dP_1(w)\right)dP_1(v)$$

$$= \int_{(\Omega\times S_1)\cap E^{(2)}} dP_1^{(2)}(w,v) = P_1^{(2)}((\Omega\times S_1)\cap E^{(2)})$$

(4.10) $$\int_{\Omega}\left(\int_{\Omega} C(w,v) f_1(w) f_1(v)\,dP_0(v)\right)dP_0(w)$$

$$= \int_{E^{(2)}} f_1(w) f_1(v)\,dP_0^{(2)}(w,v)$$

change of measure により

(4.11) $$\int_{\Omega}\left(\int_{S_1} C(w,v)\,dP_1(v)\right) f_1(w)\,dP_0(w)$$

$$= \int_{\Omega}\left(\int_{S_1} C(w,v)\,dP_1(v)\right)dP_1(w) - \int_{S_1}\left(\int_{S_1} C(w,v)\,dP_1(v)\right)dP_1(w)$$

$$= P_1^{(2)}((\Omega\times S_1)\cap E) - P_1^{(2)}((S_1\times S_1)\cap E)$$

(4.6) — (4.11) から (4.5) がわかり Lemma (4.4) が証明された。

lemma (4.4) によって定まる函数 $f_1(w) f_1(v)$ を利用して最良検定系 $\mathbb{R}^{(2)}$ を作り，この $\mathbb{R}^{(2)}$ の I-e.p. α なる最良棄却域を $R_\alpha^{(2)}$ とする。

この場合

$$\alpha = \mathrm{I}(R_\alpha) = P_0(R_\alpha) = P_0^{(2)}(R_\alpha\times\Omega) = P_0^{(2)}(R_\alpha^{(2)}) = \mathrm{I}(R_\alpha^{(2)})$$

で且 $\mathrm{II}(R_\alpha\times\Omega) \geqq \mathrm{II}(R_\alpha^{(2)})$, $P_1^{(2)}(R_\alpha\times\Omega) = P_1(R_\alpha)$

であるから $P_1^{(2)}(R_\alpha\times\Omega) \leqq P_1^{(2)}(R_\alpha^{(2)})$, $\mathrm{II}(R_\alpha) = \mathrm{II}(R_\alpha^{(2)})$,

そこで $0<\alpha$ として

$$(R_\alpha \times \Omega) - R_\alpha^{(2)} = \sum\nolimits_1 ,\quad R_\alpha^{(2)} - (R_\alpha \times \Omega) = \sum\nolimits_\alpha$$

とおくと $P_0^{(2)}(\sum_1) = P_0^{(2)}(\sum_2)$

$$P_1^{(2)}(\textstyle\sum_1) \leqq P_1^{(2)}(\textstyle\sum_2)$$

そして $P_1^{(2)}(\sum_1) < P_1^{(2)}(\sum_2)$ は $\Pi(R_\alpha) > \Pi(R_\alpha^{(2)})$ の必充條件である。

次の定義は後の Lemma にとって補助的なものである

定義 (4.12) Ω の上の measurable (P) 函数 $f(\omega)$ 及び ($\mathfrak{B} \ni$) A に対して P- ess. sup. $f(\omega)$ (A における $f(\omega)$ の P- essential supremum) とは $P[\omega \mid f(\omega)^A \geqq k,\ \omega \in A] > 0$ なる k の上限であり, P- $\underset{A}{\text{ess.}}$ sup. $f(\omega) > 0$ (A における $f(\omega)$ の P-essential infimum) とは $P[\omega \mid f(\omega) \leqq k,\ \omega \in A] > 0$ なる k の下限である。

簡単にするため本§では次の記号を用ひよう ($\alpha > 0$)

$$(4.13)\begin{cases} P_0^{(2)}\text{-}\underset{\Omega^{(2)}-R_\alpha^{(2)}}{\text{ess. sup.}}\, f_1(\omega) f_1(\upsilon) = K & P_0^{(2)}\text{-}\underset{R^{(2)}}{\text{ess. inf}}\, f_1(\omega) f_1(\upsilon) = K' \quad 1) \\ \\ P_0\text{-}\underset{\Omega}{\text{ess. sup.}}\, f_1(\omega) = s & P_0^{(2)}\text{-}\underset{\Omega}{\text{ess. inf.}}\, f_1(\omega) = i \end{cases}$$

lemma (4.14) $P_0^{(2)}(\Sigma) \neq 0$ ならば

イ) $P_0^{(2)}\text{-}\underset{\Sigma_1}{\text{ess. inf.}}\, f_1(\omega) f_1(\upsilon) = P_0^{(2)}\text{-}\underset{R_\alpha \times \Omega}{\text{ess. inf.}}\, f_1(\omega) f_1(\upsilon)$

1) $\alpha > 0$ より $K' < \infty$ 従って $K < K' < \infty$

ロ） $P_0^{(2)}\text{-}\underset{\Sigma_1}{\text{ess. sup.}}\, f_1(\omega) f_1(v) = P_0^{(2)}\text{-}\underset{(\Omega - R_\alpha)\times\Omega}{\text{ess. sup.}}\, f_1(\omega) f_1(v)$

（證　明）　イ）　左辺 $\geqq$ 右辺は明らかである
もし，左辺 $>$ 右辺ならば

$$R_\alpha \times \Omega \supset A, \quad A \frown \Sigma_1 = A, \quad P(A) > 0$$

且　　$f_1(\omega) f_1(v) \leqq$ 左辺　　on A

なる A がある。故に $A \subset \Omega - R_\alpha^{(2)}$　えは矛盾である。
ロ）についても同様に證明される。

lemma (4.15)　$P_0^{(2)}(\Sigma_1) \neq 0$ ならば $\Pi(R_\alpha) > \Pi(R_\alpha^{(2)})$
即ち $P_1^{(2)}(\Sigma_1) \leqq P_1^{(2)}(\Sigma_2)$ なるための必要充分條件は(4.13)の K, K' について

(4.15.1)　$P_0\text{-}\underset{\Sigma_2}{\text{ess. sup.}}\, f_1(\omega) f_1(v) > K'$ or $K > P_0\text{-}\underset{\Sigma_1}{\text{ess. sup.}}\, f(\omega) f_1(v)$

（證　明）　$P_0^{(2)}(\Sigma_1) = P_0^{(2)}(\Sigma_2)$ 及び $(\omega_1, v_1) \in \Sigma_1$,
$(\omega_2, v_2) \in \Sigma_2$ に対して

$$f_1(\omega_1) f_1(v_1) \leqq K \leqq K' \leqq f_1(\omega_2) f_1(v_2)$$

almost every where (P_0)

であるから明らかである。

lemma (4.16)　$\Pi(R_\alpha) > \Pi(R_\alpha^{(2)})$ なるための必要充分條件は $P_0\text{-}\underset{\Omega - R_\alpha}{\text{ess. sup.}}\, f_1(\omega) > 0$ で且次の三つのいづれかである。

i）　$P_1(S_1) > 0$　　ii）　$S = \infty$　　iii）　$i = 0$

或は iv) $\infty > s > i > 0$, $P_1(S_1)=0$ ならば

(4.17) $\frac{K}{i}\ P_0-\underset{R_\alpha}{ess.\ inf.}\ f_1(\omega)$ or $P_0-\underset{\Omega-R_\alpha}{ess.\ sup.}\ f_1(\omega) > \frac{K'}{s}$ [1]

（證明） 必要性 $P_0-\underset{\Omega-R_\alpha}{ess.\ sup.}\ f_1(\omega)=k=0$ ならば

すべての $A \subset \Omega-R_\alpha$ に対して $P_1(A)=0$ であるから

$$P_1^{(2)}(\Sigma_2)=0 \quad \therefore\ P_1^{(2)}(\Sigma_1)=P_1^{(2)}(\Sigma_2).$$

故に $k>0$ でなければならない。故に

$$k>0,\quad P_1(S_1)=0,\quad \infty > s \geqq i > 0$$

なるとき（4.17）を証明すればよい。 即ち（4.15.1）の前半の不等式より（4.17）の後半の不等式を，（4.15.1）の後半の不等式より（4.17）の前半の不等式を証すればよい。

（4.15.1）の前半より（4.17）の後半の不等式を出す：

$$P_0^{(2)}-\underset{\Sigma_2}{ess.\ sup.}\ f_1(\omega)f_1(v) > K'$$

であるから $\Sigma_2 \supset A$, $P_0^{(2)}(A)>0$，且 $f_1(\omega)f_1(v)>K'$ on A なる $A\ (\in \mathcal{B}^{(2)})$ がある。ところが $s<\infty$ なることより，$K>\frac{K'}{s}$ でなければならない。残りの証明も全く同様に出来る。

充分性 i) $k>0$ 且 $P_1(S_1)>0$ とすると

$$P_1^{(2)}((\Omega-R_\alpha)\times S_1)>0 \quad 且$$

$P_0^{(2)}((\Omega-R)\times S_1)=0$ 又 $(\Omega-R_\alpha)\times S_1 \subset S_1^{(2)} \subset R_\alpha^{(2)}$ で

$(R_\alpha\times\Omega)\frown((\Omega-R_\alpha)\times S)=\Lambda$ より $(\Omega-R_\alpha)\times S_1\subset\Sigma_2$

$\therefore\ P_1^{(2)}(\Sigma_2\frown S_1^{(2)}) \geqq P_1^{(2)}((\Omega-R_\alpha)\times S_1)>0$. 此から

$$P_1^{(2)}(\Sigma_1) < P_1^{(2)}(\Sigma_2) \quad 即ち \quad \mathrm{II}(R_\alpha) > \mathrm{II}(R_\alpha^{(2)})$$

ii) $k>0$ 且 $s=\infty$, $k<\infty$ だから [2]

$$P_0^{(2)}-\underset{(\Omega-R_\alpha)\times\Omega}{ess.\ sup.}\ f_1(\omega)f_1(v) > K' \ で$$

1) 従って $\frac{s}{i} > \frac{K'}{K}$ 2) $\alpha \neq 0$ より $k<\infty$

あるから lemma (4.14) により $P_0^{(2)} - \underset{\Sigma_2}{ess.\ sup.}\ f_1(w) f_1(v) > K'$

lemma (4.15) より $\Pi(R_\alpha) > \Pi(R_\alpha^{(2)})$

iii) $k > 0$ 且 $i = 0$ $P_0 - ess.\ inf.\ f_1(w) = k' < \infty$ [1]

より

$$P_0^{(2)} - \underset{R_\alpha \times \Omega}{ess.\ inf.}\ f_1(w) f_1(v) = 0,$$ lemma (4.14) より

$$P_0^{(2)} - \underset{\Sigma_1}{ess.\ inf.}\ f_1(w) f_1(v) = 0$$

又一方 $s > 0$ [2] として一般性を失はないから

$$P_0^{(2)} - \underset{(\Omega - R_\alpha)\times\Omega}{ess.\ sup.}\ f_1(w) f_1(v) > 0$$

$$\therefore \quad P_0^2 - \underset{\Sigma_2}{ess.\ sup.}\ f_1(w) f_1(v) > 0$$

故に lemma (4.15) より $\Pi(R_\alpha) > \Pi(R_\alpha^{(2)})$

iv) $P_1(S_1) = 0$, $\infty > s > i > 0$ 且 (4.17) ならば；

$$P_0 - \underset{\Omega - R_\alpha}{ess.\ sup.}\ f_1(w) > \frac{K'}{s}$$ 及び $s < \infty$ より

$$P_0^{(2)} - \underset{(\Omega - R_\alpha)\times\Omega}{ess.\ sup.}\ f_1(w) f_1(v) > K'.$$ 故に lemma (4.14) より $P_0^{(2)} - ess.\ sup\ f_1(w) f_1(v) > K'$.

又 (4.17) の後半の不等式についても同様に証明出来る (註3)

lemma (4.16) は次に於て重要な働きをするから逆の立場から述べると次の様になる.

$\Pi(R_\alpha) = \Pi(R_\alpha^{(2)})$ なる場合は次の二つの場合だけである。

i) $P_0 - \underset{\Omega - R_\alpha}{ess.\ sup.}\ f_1(w) = 0$. 即ち R の検定力函数 $\beta(x) \equiv 0$ $x > \alpha$ なる場合

ii) $P_1(S_1) = 0$, $S < \infty$, $i > 0$ で更に

$$P_0 - \underset{R_\alpha}{ess.\ inf.}\ f_1(w) \geqq \frac{K}{i}, \quad P_0 - \underset{\Omega - R_\alpha}{ess.\ sup.}\ f_1(w) \leqq \frac{K}{s}$$

なる場合

この ii) の場合が注意すべき場合であらう。

1) $\alpha \neq 0$ より $k' < \infty$ 2) $s = 0$ のときは $P_1(S_1) > 0$ となり i) の場合となる

猶 lemma (4.16) の証明では $P_1(S_1)>0$ の場合以外は $P_0^{(2)}(\Sigma_1)=P_0^{(2)}(\Sigma_2)>0$ でなければなり立たない。

併しこの條件は実は必然的に出て来るのである。何となれば必要性の証明では條件から明らかだから特に云はないが充分性の証明では次の様であるからである。ii) $S=\infty$ ならば

$P_0^{(2)}-\underset{(\Omega-R_\alpha)\times\Omega}{ess.\ sup.}\ f_1(\omega)f_1(\upsilon)=\infty$ であり，$K<\infty$ であることゝ共に $P_0^{(2)}(\Sigma_2)>0$ でなければならない.

iii) $i=0$ とすれば $P_0^{(2)}-\underset{R_\alpha\times\Omega}{ess.\ inf.}\ f_1(\omega)f_1(\upsilon)=0$
そこでもし $P_0^{(2)}(\Sigma_1)=0$ とすれば

$S\neq 0$ より $k=0$ でなければならない。此は條件に反する。 iv) の場合は明らかに (4.17) の前半からは $P_0^{(2)}(\Sigma_1)=0$, 後半からは $P_0^{(2)}(\Sigma_2)=0$ が出る.

次に $\Omega^{(n+1)}=\Omega^{(n)}\times\Omega$, $\mathcal{B}^{(n+1)}=\mathcal{B}^{(n)}\times\mathcal{B}$,
$P_i^{(n+1)}=P_i^{(n)}\times P_i\quad(i=0,1)$
として $(\Omega^{(n)},\ \mathcal{B}^{(n)},\ P_i^{(n)})$ を定義しこれを夫々帰無假説及びそれに対立する假説として，その検定系

$$\mathbb{R}^{(n)}=\{\ R_\alpha^{(n)}\ ;\ P_0^{(n)}(R_\alpha^{(n)})=\alpha\ \}$$

及び検定力函数 $\beta^{(n)}(\alpha)$ を定める.

この際 lemma に (4.4) に相当する次の Radon-Nikodym の分解

$$(4.18)\quad P_1^{(n)}(E^{(n)})=P_1^{(n)}(E^{(n)}\cap S_1^{(n)})+\int_{E^{(n)}} f_1(\omega_1)f_1(\omega_2)\cdots f_1(\omega_n)\,dP_0^{(n)}(\omega_1\cdots\omega_n)$$

こゝで $E^{(n)}\in\mathcal{B}^{(n)}$

$$S_1^{(n)}=\bigcup_{i=1}^{n}S_{1,i}\ ,\ S_{1,i}=\underbrace{\Omega\times\cdots\times\Omega\times S}_{i\text{番目}}\times\Omega\times\cdots\Omega$$

が成立するから $R_\alpha^{(n)}$ を $f_1(\omega_1)\cdots\cdots f_1(\omega_n)$ を利用して定めることが出来る。

すると、

(4.19) $\Pi(R_\alpha^{(n)}) \geqq \Pi(R_\alpha^{(n+1)})$, $\beta^{(n)}(\alpha) \geqq \beta^{(n+1)}(\alpha)$

$(\alpha > 0)$

が $n=1$ の場合と同様に証明出来るが、更に lemma (4.16) に相当する次の lemma が得られる。（証明略す）

lemma (4.20) $\Pi(R_\alpha^{(n)}) > \Pi(R_\alpha^{(n+1)})$ が成立するための必充條件は

$$P_0^{(n)}-\underset{\Omega^{(n)}-R^{(n)}}{\text{ess. sup.}}\ f_1(\omega_1)\cdots f_1(\omega_n)=K_n,$$

$$P_0^{(n)}-\underset{R^{(n)}}{\text{ess. inf.}}\ f_1(\omega_1)\cdots f_1(\omega_n)=K_n'$$

とおくとき、

$K_n > 0$ で且つ次の條件のいづれか一つである。

i) $P_1(S_1) > 0$, ii) $s=\infty$, iii) $i=0$

iv) $\infty > s > i > 0$, $P_1(S_1) >$ ならば

(4.21) $\dfrac{K_{n+1}}{i} > K_n$ か $\dfrac{K'_{n+1}}{s} < K_n$

但し、s, i は (4.13) に於て定義された通りである

又、次の lemma も考へなければならない

lemma (4.22) $\Sigma_1^{(n)} = (R_\alpha^{(n-1)} \times \Omega) - R_\alpha^{(n)}$

とおくとき

i) $\dfrac{s}{i}\dfrac{K_{n-1}}{K'_{n-1}} > 1$ ならば $\Pi(R_\alpha^{(n-1)}) \geqq \Pi(R_\alpha^{(n)})$

ii) $\dfrac{s}{i}\dfrac{K_{n-1}}{K'_{n-1}}=1$ ならば $P_0^{(n)}(\Sigma_1^{(n)})>0$ か $P_0^{(n)}(\Sigma_1^{(n)})=0$

iii) $\dfrac{s}{i}\dfrac{K_{n-1}}{K'_{n-1}}<1$ ならば $P_0^{(n)}(\Sigma_1^{(n)})=0$

（証明）

$$P_0^{(n)}-\underset{(\Omega^{(n-1)}-R_\alpha^{(n-1)})\times\Omega}{\mathrm{ess.\,sup.}} f_1(\omega_1)f_1(\omega_2)\cdots f_1(\omega_n)=s\cdot K_{n-1}$$

$$P_0^{(n)}-\underset{R_\alpha^{(n-1)}\times\Omega}{\mathrm{ess.\,inf.}} f_1(\omega_1)f_1(\omega_2)\cdots f_1(\omega_n)=i\cdot K'_{n-1}$$

であるから $\dfrac{s}{i}\dfrac{K_{n-1}}{K'_{n-1}}>1$ ならば $P_0^{(n)}(\Sigma_1)>0$ で

又 lemma (4.14) に相当することにより

$$P_1^{(n)}(\Sigma_1^{(n)})<P_1^{(n)}(R_\alpha^{(n-1)}-(R_\alpha^{(n-1)}\times\Omega))$$

故に $\Pi(R_\alpha^{(n-1)})>\Pi(R_\alpha^{(n)})$

iii) の場合は $P_0^{(n)}(\Sigma_1^{(n)})=0$ は明らか

ある $n\ (\geqq 2)$ 及び $\alpha\ (>0)$ で $\Pi(R_\alpha^{(n)})=\Pi(R_\alpha^{(n-1)})\neq 0$ とすると $K_{n-1}>0$ である。故に

i) $P_0^{(n)}((R_\alpha^{(n-1)}\times\Omega)-R_\alpha^{(n)})>0$ の場合は lemma (4.14) 及び lemma (4.15) に相当することが云へるから $K_n=K'_n$ である。

又 $\dfrac{K_{n+1}}{i}\geqq K_n\geqq\dfrac{K'_{n+1}}{s}$ であり，$K_{n+1}<K'_{n+1}$ とすると明らかに $\Pi(R_\alpha^{(n)})>\Pi(R_\alpha^{(n+1)})$，$K_{n+1}=K'_{n+1}$ とすると $i<s$ [1] であるから

$\dfrac{K_{n+1}}{i}>\dfrac{K'_{n+1}}{s}$． 故に $\dfrac{K_{n+1}}{i}>K_n$ か

$\dfrac{K'_{n+1}}{s}<K_n$ かである。

1) $\Pi(R_\alpha^{(n)})=\Pi(R_\alpha^{(n-1)})$ であるから $P_1(S_1)=0$ であり，(N.I) より $i<s$

故に，lemma (4.20) より $\Pi(R_\alpha^{(n)}) > \Pi(R_\alpha^{(n+1)})$.

ii) $P_0^{(n)}((R_\alpha^{(n-1)} \times \Omega) - R_\alpha^{(n)}) = 0$ の場合は $sK_{n-1} = K_n$, $iK'_{n-1} = K'_n$ であるから

$$\frac{K_n}{K'_n} = \frac{s}{i}\,\frac{K_{n-1}}{K'_{n-1}}$$

$\Pi(R_\alpha^{(n-1)}) = \Pi(R_\alpha^{(n)})$ であるから $\frac{K_n}{K'_n} \leqq 1$

又一方 $s > i$ であるから $r\ (\geqq 1)$ に対して

$\left(\frac{s}{i}\right)^r \frac{K_n}{K'_n} > 1$ となるから多くとも r 回目には

$\Pi(R_\alpha^{(n'-1)}) > \Pi(R_\alpha^{(n')})$ $(n < n' \leqq n+r)$ となる.

以上のことをまとめると

定理 VI n 回の実験で，対立假説 (P_0, P_1) を検定するときの検定力函数 $\beta^{(n)}(\alpha)$ とすると

$$\beta^{(n)}(\alpha) \geqq \beta^{(n+1)}(\alpha) \qquad (\alpha > 0)$$

であり もし

$$\beta^{(n)}(\alpha) = \beta^{(n+1)}(\alpha) \qquad (\alpha > 0,\ \beta^{(n)}(\alpha) > 0)$$

であっても有限回の実験を附加すれば

$$\beta^{(n')}(\alpha) > \beta^{(n'+1)}(\alpha) \qquad (n \leqq n' \leqq n+r)$$

となる。

§ 5. 独立な実験を無限回行えば殆んど確実に真理を指摘することが出來る。

前§に於て $\beta^{(n)}(\alpha)$ を決定したが，それは単調減少な函数列

$$\beta(\alpha) \geqq \beta^{(2)}(\alpha) \geqq \cdots \geqq \beta^{(n)}(\alpha) \geqq \cdots$$

をなすから，各点における その極限を $B(\alpha)$ とすると，この $B(\alpha)$ はいかなる性質をもつであらうか。

此を研究するため次の lemma を述べる。

lemma (5.1) 点函数 $\sqrt{f_1(\omega)}$ が integrable で且つ $f_1(\omega) \not\equiv 1$ ならば

(5.2) $$p = \int_\Omega \sqrt{f_1(\omega)}\, dP_0(\omega) < 1$$

(5.3) $$p/\varepsilon \geqq P_0(\omega \mid f_1(\omega) \geqq \varepsilon^2) \quad \text{for all } \varepsilon > 0$$

（証　明）　Schwarz の定理[1)]により

$$\int_\Omega 1 \cdot \sqrt{f_1(\omega)}\, dP_0 \leqq \sqrt{\int_\Omega f_1(\omega)\, dP_0 \cdot 1} = 1$$

且 $f_1(\omega) \not\equiv 1$ だから，等号は成立しない。

次に

$$\int_\Omega \sqrt{f_1(\omega)}\, dP_0 = \int_{f_1(\omega) \geqq \varepsilon^2} \sqrt{f_1(\omega)}\, dP_0 + \int_{f_1(\omega) < \varepsilon^2} \sqrt{f_1(\omega)}\, dP_0$$

$$\geqq \int_{f_1(\omega) \geqq \varepsilon^2} \sqrt{f_1(\omega)}\, dP_0 \geqq \varepsilon P_0(f_1(\omega) \geqq \varepsilon^2)$$

1) 吉田：線型作用素 P. 110

measure space $(\Omega, \mathcal{B}, P_i)$ に於て，

$$\Omega^\infty = \{(\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n, \cdots)\}$$

を作りその上の totally additive familly を

$$\{A_i \in \mathcal{B},\ A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n \quad n = 1, 2, 3, \cdots\}$$

をふくむ最小の totally additive set familly とし此を $\mathcal{B}^\infty$，又 $P_i^\infty(A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n) = P_i(A_1) P_i(A_2) \cdots P_i(A_n)$ として之を $\mathcal{B}^\infty$ に擴張するとき一つの measure space $(\Omega^\infty, \mathcal{B}^\infty, P_i^\infty)$ が得られる。[2*)]

このとき，次の lemma が得られる $(i = 0, 1)$

lemma (5.4)

i) $S_{1,n} = ($$\omega = (\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n, \cdots)$ の第 n 番目の座標 ω_n だけが S_1 に屬し他は Ω の任意の要素である ω の集合)

$f_{1,n}(\omega) = f_1(\omega_n) \qquad \omega = (\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n, \cdots)$

$P_{1,n}(E)$

$$= P_1^\infty(E \cap S_{1,n}) + \int_E f_{1,n}(\omega)\, dP_0^\infty(\omega) \quad \text{for all } E \in \mathcal{B}^\infty$$

とおくとき $P_{1,n}(E)$ は totally additive set function $(\mathcal{B}^\infty)$ であり $P_{1,n}(\Omega^\infty) = 1$ である。

猶又 $(\Omega^\infty, \mathcal{B}^\infty)$ で P_0^∞ を帰無假設，$P_{1,n}$ を対立假設とする検定力函数は $(\Omega, \mathcal{B})$ におくる (P_0, P_1) の検定力函数に一致する。

ii) $S_{1,n}^* = \bigcup_{i=1}^{n} S_{1,i}$

$$f_{1,n}^*(\omega) = \prod_{i=1}^{n} f_{1,i}(\omega)$$

$$P_{1,n}^*(E) = P_1^\infty(E \cap S_{1,n}^*) + \int_E f_{1,n}^*(\omega)\, dP_0^\infty(\omega)$$

for all $E \in \mathcal{B}^\infty$

1)

とおくとき $P_{1,n}^{*}(E)$ も又 totally additive set function $(\mathring{B}^{\infty})$ であり，$P_{1,n}^{*}(\Omega^{\infty})=1$ である。

この場合にも $(P_0^{\infty},\ P_{1,n}^{*})$ の検定力函数は $(\Omega^{(n)}, \mathcal{B}^{(n)})$ における $(P_0^{(n)},\ P_1^{(n)})$ の検定力函数 $\beta^{(n)}(\alpha)$ と一致する。

（証明） i) $P_{1,n}(E)$ は totally additive $(\mathcal{B}^{\infty})$ であることは明らかである。又

$$P_1^{\infty}(\Omega^{\infty}\frown S_{1,n})=P_1^{\infty}(S_{1,n})=P_1(S_1)$$

$$\int_{\Omega^{\infty}} f_{1,n}(\omega)\,dP_0^{\infty}(\omega)=\int_0^{\infty} k\,dP_0^{\infty}(Q_k^{\infty})\quad \text{である。}$$

こゝで $Q_k^{\infty}=[\omega \mid f_{1,n}(\omega)\geqq k]$．これは n 番目の座標だけが $Q_k=[\omega_n \mid f_1(\omega_n)>k,\ \omega_n\in\Omega]$ に入り他は制限のない集合である。故に $P_0^{\infty}(Q_k^{\infty})=P_0(Q_k)$．従って

$$\int_0^{\infty} k\,dP_0^{\infty}(Q_k^{\infty})=\int_0^{\infty} k\,dP_0(Q_k)=\int_{\Omega} f_1(\omega)\,dP_0(\omega).$$

これから明らかに $P_{1,n}(\Omega^{\infty})=1$ である。

次に $R_{\alpha,n}=(\omega=(\omega_1,\omega_2,----)$ の第 n 番目の座標だけが R_α に入り，他の座標には制限はない集合）とすると $\{R_{\alpha,n}\}$ は一つの検定域を作る。

所が，$P_0^{\infty}(R_{\alpha,n})=P_0(R_\alpha)$ であり

$$\begin{aligned}P_{1,n}(R_{\alpha,n})&=P_1^{\infty}(R_{\alpha,n}\frown S_{1,n})+\int_{R_{\alpha,n}} f_{1,n}(\omega)\,dP_0^{\infty}(\omega)\\&=P_1^{\infty}(S_{1,n})+\int_{R_\alpha} f_1(\omega)\,dP_0(\omega)\\&=P_1(S_1)+\int_{R_\alpha} f_1(\omega)\,dP_0(\omega)=P_1(R_\alpha)\ \text{である。}\end{aligned}$$

故に，従って $\mathrm{II}(R_\alpha)=\mathrm{II}(R_{\alpha,n})$ であるから lemma の

i:)は証明せられる。

ii)も同様である.

lemma (5.5) $f_{1,n}(\omega_n) = f_1(\omega)$ $\omega = (\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n \cdots)$ とおくとき

$$(5.9) \qquad P_0^\infty(f_{1,1}(\omega) f_{1,2}(\omega) \cdots f_{1,n}(\omega) \geqq \varepsilon^2) \leqq \frac{p^n}{\varepsilon}$$

である。こゝで p は(5.2)によつて定まるものである.

(証明)

$$(5.11) \qquad \int_{\Omega^\infty} \sqrt{f_{1,1}(\omega) f_{1,2}(\omega) \cdots f_{1,n}(\omega)}\, dP_0^\infty(\omega) = \left(\int_\Omega \sqrt{f_1(\omega)}\, dP_0(\omega) \right)^n$$

が云はれるならば lemma (5.1) から (5.8) は明らかである。 (5.11)は ω_1, ω_2 の函数 $\varphi(\omega_1)$, $\psi(\omega_2)$ に関して

$$\int_{\Omega^\infty} \varphi(\omega_1) \psi(\omega_2)\, dP_0^\infty(\omega) = \int_\Omega \varphi(\omega)\, dP_0(\omega) \cdot \int_\Omega \psi(\omega)\, dP_0(\omega)$$

なることを示せばよい.

$$\left.\begin{aligned} Q_\lambda^\infty &= [\,\omega \mid \varphi(\omega_1)\psi(\omega_2) \geqq \lambda,\ \omega \in \Omega^\infty\,] \\ Q_\lambda^{(2)} &= [\,(\omega_1, \omega_2) \mid \varphi(\omega_1)\psi(\omega_2) \geqq \lambda\,] \end{aligned}\right\} \text{とすると}$$

$$Q_\lambda^\infty = Q_\lambda^{(2)} \times \Omega \times \Omega \times \cdots \quad \text{且} \quad P_0^\infty(Q_\lambda^\infty) = P_0^{(2)}(Q_\lambda^{(2)})$$

であるから

$$\int_{\Omega^\infty} \varphi(\omega_1)\psi(\omega_2)\, dP_0^\infty(\omega) = \int_0^\infty \lambda\, dP_0^\infty(Q_\lambda^\infty) = \int_0^\infty \lambda\, dP_0^{(2)}(Q_\lambda^{(2)})$$

$$= \int_{\Omega^{(2)}} \varphi(\omega_1)\psi(\omega_2)\, dP_0^{(2)}(\omega_1, \omega_2)$$

Fubiniの定理により $= \int_\Omega \varphi(\omega)\, dP_0 \cdot \int_\Omega \psi(\omega)\, dP_0(\omega)$

定理 VII　$(P_0^{(n)}, P_1^{(n)})$ の検定力函数 $\beta^{(n)}(\alpha)$ は α を定めれば $(\alpha > 0)$ $\beta^{(n)}(\alpha)$ は単調に小さくなり $n \to \infty$ の極限は $\beta^{(n)}(\alpha) \to 0 \quad (\alpha > 0)$

（證　明）　$\lim_{n\to\infty} \beta^{(n)}(\alpha) \geqq \varepsilon^2(1-\alpha) > 0$　とすると
$(0 < \alpha < 1)$

$$\inf_{R_\alpha} f_1(\omega_1) \cdots f_1(\omega_n) = k_n \quad \text{とおけば}$$

$$P_0^{(n)}(f_1(\omega_1) f_1(\omega_2) \cdots f_1(\omega_n) \geqq k_n) = \alpha$$

であるから　$P_0^{\infty}(f_1(\omega_1) \cdots f_1(\omega_n) \geqq k_n) = \alpha \quad n = 1, 2, \cdots$

又 $\beta^{(n)}(\alpha)$ は単調減少で且凹であり

$$\alpha \leqq \alpha' \text{ ならば } \lim_{\alpha' \to \alpha} \frac{\beta^{(n)}(\alpha) - \beta^{(n)}(\alpha')}{\alpha' - \alpha} \leqq k_n$$

であるから　$k_n \geqq \beta^{(n)}(\alpha) / (1-\alpha) \geqq \varepsilon^2.$

故に　$P_0^{\infty}(f_1(\omega_1) \cdots f_1(\omega_n) \geqq \varepsilon^2) \geqq \alpha$
$n = 1, 2, \cdots$

之は (5.9) と矛盾する。
故にいかなる ε^2 に対しても $\beta^{(n)}(\alpha) \geqq \varepsilon^2(1-\alpha) > 0$ とならない、即ち $\lim_{n\to\infty} \beta^{(n)}(\alpha) = 0$　　証　終

要するに棄却検定の test に於ては多数の標本をとれば、その第一種及び第二種の過誤はいかほどでも小さくして対立假設を分離出來るのである。

第二篇　実例及びその應用

§6　實　例

前§までで一応検定力函数の性質及びそれによって多数の独立なる実験によって過誤をいかほどでも少さくして対立假設の分離出來ることを示してゐるが本篇においてその検定力函数が具体的には如何なるものであるか，又この函数を実際に如何に用ひるかを論じよう．
それで

1°）平均のみを異にする正規分布を対立假設とする場合
2°）分散のみを異にする正規分布を対立假設とする場合

なる二つの場合について検定力函数を計算しよう．そのためには次の定理からはじめる．

定理 VIII　母集団が実数 R^1 で両假設が夫々実数軸上の Lebesque measurable set familly $\mathfrak{B}$ の上の集合函数で Lebesque measure m で absolutely continuous なとき即ち

$$(6.1)\quad \begin{cases} P_0(E) = \int_E \phi_0\, dm \\ P_1(E) = \int_E \phi_1(x)\, dm \end{cases} \qquad E \in \mathfrak{B}$$

のときは

$$P_1(E) = \int_E f_1(x)\, dP_0(x) + P_1(E \frown S)$$

但

$$f_1(x) = \begin{cases} \phi_1(x)/\phi_0(x), & \text{if } \phi_0(x) \neq 0 \\ 0, & \text{if } \phi_0(x) = 0 \end{cases}$$

$$S = [\, x \mid \phi_0(x) = 0 \,]$$

となる。

（証明）　$P_1(E \frown S)$ は singular (P_0) なることは明らかだから，$\int_E f_1(x)\, dP_0(x) = P_1(E \frown (\mathbb{R}^1 - S))$

を云へばよい。

$$P_1^*(E) = \int_E f_1(x)\, dP_0(x) = \int_E f_1(x)\phi_0(x)\, dm = \int_{E \frown (\mathbb{R}^1 - S)} \phi_1(x)\, dm = P_1(E \frown (\mathbb{R}^1 - S))$$

1° この定理より

$$\phi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}(x-m)^2\right)$$

$$\phi_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}(x-m')^2\right) \qquad m' > m$$

故に

$$f_1(x) = \frac{\phi_1(x)}{\phi_0(x)} = \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\left\{(x-m')^2 - (x-m)^2\right\}\right)$$

$$= \exp\left(\frac{m'-m}{\sigma^2}\, x - \frac{1}{2\sigma^2}(m'^2 - m^2)\right).$$

$Q_k = [\, x \mid f_1(x) \geqq k \,] \ni x$ は次の式を満す

$$\frac{m'-m}{\sigma^2}\, x \geqq \log k + \frac{1}{2\sigma^2}(m'^2 - m^2),$$

or $$x \geqq \frac{\sigma^2}{m'-m} \log k + \frac{1}{2}(m+m').$$

この右辺 $= n(k)$ とおくと

$$\alpha = P_0(Q_k) = \int_{n(k)}^{\infty} \phi_0(x)\, dx = \int_{a_1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt.$$

$$\beta = 1 - P_0(Q_k) = \int_{-\infty}^{u(k)} \phi_1(x) = \int_{-\infty}^{b_1} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

ここで $a_1 = \dfrac{\log k}{t_1} + \dfrac{1}{2}t_1$, $b_1 = \dfrac{\log k}{t_1} - \dfrac{1}{2}t_1$, $t_1 = \dfrac{m'-m}{\sigma}$

$$\text{又}\quad \alpha+\beta = \int_{a_1}^{\infty} + \int_{-\infty}^{b_1} = 1 - \int_{b_1}^{a_1} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

故に $\alpha+\beta$ を最小にするのは $\displaystyle\int_{b_1}^{a_1} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ が最大なるとき即ち $k=1$ のときで，そのときは

$$(6.2)\qquad \alpha+\beta = 1 - 2\int_0^{\frac{t_1}{2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

二回の独立なる実験に於ては

$$\phi_0(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\left\{(x_1-m)^2+(x_2-m)^2\right\}\right)$$

$$\phi_1(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\left\{(x_1-m')^2+(x_2-m')^2\right\}\right) \qquad m'>m$$

とすれば

$$f_1(x_1, x_2) = \frac{\phi_1(x_1, x_2)}{\phi_0(x_1, x_2)} = \exp\left(\frac{m'-m}{\sigma^2}(x_1+x_2) - \frac{1}{2\sigma^2}(m^2-m'^2)\right)$$

故に $f_1(x_1, x_2) \geqq k$ なることは

$$x_1 + x_2 \geqq \frac{\sigma^2}{m-m'} \log k + \frac{m+m'}{2}$$

$$\text{or}\quad \bar{x} = \frac{x_1+x_2}{2} \geqq \frac{\frac{\sigma^2}{2}}{m-m'} \log k + \frac{m+m'}{4}.$$

この右辺を u とおくとき

$$\alpha = \iint_{\frac{x_1+x_2}{2} \geqq u} \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\{(x_1-m)^2+(x_2-m)^2\}} dx_1 dx_2$$

$$= \int_u^\infty \frac{2}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{2}{2\sigma^2}(\bar{x}-m)^2} d\bar{x}$$

$$= \int_{a_2}^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt,$$

又同様に

$$\beta = 1 - \iint_{\frac{x_1+x_2}{2} < u} \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\{(x_1-m')^2+(x_2-m')^2\}\right) dx_1 dx_2$$

$$= \int_{-\infty}^{b_2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

こゝで $a_2 = \frac{\log k}{t_2} + \frac{t_2}{2}$, $b_2 = \frac{\log k}{t_2} - \frac{t_2}{2}$ $t_2 = \frac{m'-m}{\frac{\sigma}{\sqrt{2}}}$

故に一般に

定理 IX 平均のみを異にする正規分布の対立假說を検定する場合に大さ n の sample をとるときの第一種の過誤及び第二種の過誤は次の式で與へられる。

$$\alpha = \int_{a_n}^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt, \quad \beta = \int_{-\infty}^{b_n} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \;;$$

こゝで $a_n = \frac{\log k}{t_n} + \frac{t_n}{2}$, $b_n = \frac{\log k}{t_n} - \frac{t_n}{2}$, $t_n = \frac{m'-m}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$.

$\alpha+\beta$ を最小にするのは $k=0$ のときで

(6.3) $\alpha+\beta = 1 - 2\int_0^{\frac{t_n}{2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$; $t_n = \frac{m'-m}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$.

2° 分散のみ異なる二つの正規対立假設は

$$\phi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_0} e^{-\frac{x^2}{2\sigma_0^2}}$$

$$\phi_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_1} e^{-\frac{x^2}{2\sigma_1^2}} \qquad \sigma_1 > \sigma_0,$$

$$f_1(x) = \frac{\phi_1(x)}{\phi_0(x)} = \frac{\sigma_0}{\sigma_1} \exp\left(\frac{x^2}{2}\left(\frac{1}{\sigma_0^2} - \frac{1}{\sigma_1^2}\right)\right).$$

この場合 $f_1(x) \geqq k$ は

$$x^2 \geqq \frac{2\sigma_1^2\sigma_0^2}{\sigma_1^2 - \sigma_0^2} \log \frac{\sigma_1}{\sigma_0} k.$$

この右辺 $= u^2$ とおけば $(Q_k = [x \mid f_1(x) \geqq k])$

$$\alpha = P_0(Q_k) = 1 - \int_{-u}^{u} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_0} e^{-\frac{x^2}{2\sigma_0^2}} dx$$

$$= 1 - 2\int_0^{\frac{u}{\sigma_0}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt,$$

$$\beta = 1 - P_1(Q_k) = \int_{-u}^{u} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_1} e^{-\frac{x^2}{2\sigma_1^2}} dx_1$$

$$= 2\int_0^{\frac{u}{\sigma_1}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

n 回の実験では

$$\phi_0(x_1, x_2, \cdots, x_n) = (2\pi\sigma_0)^{-n} e^{-\frac{\Sigma x_i^2}{2\sigma_0^2}}$$

$$\phi_1(x_1, x_2, \cdots, x_n) = (2\pi\sigma_1)^{-n} e^{\frac{-\Sigma x_i^2}{2\sigma_1^2}}$$

$$f_1(x_1,x_2,\cdots,x_n) = \frac{\phi_1}{\phi_0} = \left(\frac{\sigma_0}{\sigma_1}\right)^n \exp\left(\left(\frac{1}{\sigma_0^2}-\frac{1}{\sigma_1^2}\right)\frac{\sum x_i^2}{2}\right).$$

故に

$$\sum x_i^2 \geqq \frac{2\sigma_1^2\sigma_0^2}{\sigma_1^2-\sigma_0^2}\left\{n\log\frac{\sigma_1}{\sigma_0}+\log k\right\} = u^2$$

が $Q_k = [(x_1,x_2,\cdots x_n) \mid f_1(x_1,x_2,\cdots x_n) \geqq k]$ の範囲である。

所が $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \chi^2$ の分布は 1)

$$F_n(\chi^2)\,d\chi^2 = \frac{(\chi^2)^{\frac{n-2}{2}}\, e^{-\frac{1}{2}\chi^2}}{2^{\frac{n}{2}}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\, d(\chi^2)$$

であるから

$$\alpha = \int\cdots\int_{\sum x_i^2 \geqq u^2} \phi_0(x_1,x_2,\cdots,x_n) = \int\cdots\int_{\sum t_i \geqq \frac{u^2}{\sigma_0}} (\sqrt{2\pi})^{-n} e^{-\frac{\sum t_i^2}{2}} dt_1\cdots dt_u$$

$$= \int_{\frac{u^2}{\sigma_0^2}}^{\infty} F_u(\chi^2)\,d\chi^2,$$

$$\beta = 1 - \int\cdots\int_{\sum x_i^2 < u^2} \phi_1\, dx_1\cdots dx_n$$

$$= \int_0^{\frac{u}{\sigma_1^2}} F_u(\chi^2)\,d\chi^2,$$

(6.4) $$\alpha+\beta = 1 - \int_{\frac{u^2}{\sigma_1^2}}^{\frac{u^2}{\sigma_0^2}} F_n(\chi^2)\,d\chi^2.$$

1) Wilks : Chap. II

定理 X 標準偏差のみ異にする（σ_0, σ_1）正規対立假設を n 回の実験によって検定する場合第一種第二種の過誤の最小値は次の式で與へられる。

$$\alpha = \int_{\frac{u^2}{\sigma_0^2}}^{\infty} F_n(\chi^2)\,d\chi^2, \quad \beta = \int_0^{\frac{u}{\sigma_1^2}} F_n(\chi^2)\,d\chi^2$$

こゝで $F_n(\chi^2)$ は χ^2 の分布函数，

$$u = \frac{2\sigma_0^2\sigma_1^2}{\sigma_1^2 - \sigma_0^2}\left\{ n \log\frac{\sigma_1}{\sigma_0} + \log k \right\}$$

3° 平均，分散共に異る正規対立假設の場合

$$\phi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_0}\, e^{-\frac{1}{2\sigma_0^2}(x-m_0)^2}$$

$$\phi_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_0}\, e^{-\frac{1}{2\sigma_1^2}(x-m_1)^2}$$

$$f_1(x) = \frac{\sigma_0}{\sigma_1}\exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sigma_0^2}-\frac{1}{\sigma_1^2}\right)x^2 + \left(\frac{m_0}{\sigma_0^2}-\frac{m_1}{\sigma_1^2}\right)x - \frac{1}{2}\left(\frac{m_0^2}{\sigma_0^2}-\frac{m_1^2}{\sigma_1^2}\right)\right)$$

$Q_k = [\,x \mid f_1(x) \geqq k\,]$ の範囲は

$$\left(x - \frac{\frac{m_0}{\sigma_0^2}-\frac{m_1}{\sigma_1^2}}{\frac{1}{\sigma_0^2}-\frac{1}{\sigma_1^2}}\right)^2 \leqq \frac{\left(\frac{m_0}{\sigma_0^2}-\frac{m_1}{\sigma_1^2}\right)^2 - \left(2\frac{\sigma_1}{\sigma_0}\log k + \frac{m_0^2}{\sigma_0^2}-\frac{m_1^2}{\sigma_1^2}\right)\left(\frac{1}{\sigma_0^2}-\frac{1}{\sigma_1^2}\right)}{\left(\frac{1}{\sigma_0^2}-\frac{1}{\sigma_1^2}\right)^2}$$

（この右辺＝u^2 とおく），即ち $c = \dfrac{m_0\sigma_1^2 - m_1\sigma_0^2}{\sigma_1^2 - \sigma_0^2}$ を中心 u を半径とする區間の内部となる。

そして

$$\alpha = \int_{d-v}^{d+v} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt,$$

$$\beta = 1 - \int_{d-v}^{d+v} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

但 $\begin{cases} d = \dfrac{c-m}{\sigma_0} \\ v = \dfrac{u}{\sigma_0} \end{cases}$

一般 n 回の実験の場合は Q_k の範囲は

$$\sum \left(x_i - \frac{m_0\sigma_1^2 - m_1\sigma_0^2}{\sigma_1^2 - \sigma_0^2} \right)^2$$

$$\leq \frac{(m_0\sigma_1^2 - m_1\sigma_0^2) - (2\sigma_0\sigma_1^3 \log k + n \times (m_0^2\sigma_1^2 - m_1^2\sigma_0^2)(\sigma_1^2 - \sigma_0^2)}{\sigma_1^2 - \sigma_0^2},$$

$$\alpha = \int \cdots \int_{Q_k} \phi_0 dx_1 \cdots dx_n, \quad \beta = 1 - \int \cdots \int_{Q_k} \phi_1 dx_1 \cdots dx_n.$$

4° 対立仮設が正規分布（平均 0，分散 1）と Cauchy 分布の場合.

$$\phi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$\phi_1(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$$

であるから

$$f_1(x) = \frac{e^{\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi^3}(1+x^2)}$$

Q_k は $x^2 - 2\log(1+x^2) \geq 2 \log \sqrt{2\pi^3} k$

即ち原点を中心とする区間で

$$\alpha = \int_{Q_k} \phi_0(x) dx, \quad \beta = 1 - \int_{Q_k} \phi_1(x) dx.$$

sample の數が n 回ならば

$$Q_k \text{ は } \quad \sum \frac{x_i^2}{2} - 2\sum \log(1+x_i^2) \geqq 2\log(2\pi^3)^{\frac{n}{2}} k$$

x が極めて小さい場合は Q_k は圓に近い。

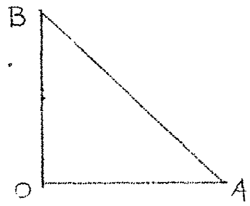
§ 7. 應用例

i) I-e.p. 及 II-e.p. を夫々與えられた數 α, β より小さくするには何回の實驗 (sample の大さを幾ら) によつて對立假說棄却檢定が可能であるか。この問題に對しては檢定力函數 $\beta^n(\alpha)$ のグラフが矩形 $[0, \alpha)\ 0, \beta]$ の内部にある様に n を大きくとればよい。

ii) I-e.p.α, II-e.p. の和, 或は一般に荷重をつけた和 $s\alpha + t\beta$ ($s+t=1$) を與へられた數 γ より小さくするには sample の大さを何程にすればよいか。

この問題に對しては $\beta^n(\alpha)$ のグラフが三角形 △OAB の内部にある様にすればよい。

こゝで $\left(\frac{\gamma}{s}, 0\right) = A$, $\left(0, \frac{\gamma}{t}\right) = B$ である。



iii) 複合對立假說に分布が存在する場合.

定義 (7.1) (C.C) を滿す假說 ($==(\Omega, \mathcal{B})$ の上の total measure 1 の (measure) の集合 $\mathfrak{H}$ を考へ, その二つの部分集合 K_1 及び K_2 を對立させるとき, これまでの唯二つを對立させる所謂單純對立假說に對して複合對立假說と云ふ。

(C.C.) を滿す假說のある集合 $\mathfrak{H}$ に確率測度 $\overline{P}(H)$ ($H \in \mathfrak{H}$, 且 $\mathfrak{H}$ の可測集合屬 $\mathfrak{B} \ni H$) が與へられたものとする。

こゝで $\mathfrak{h} \in \mathcal{L}$ とする

定義（7.2）　Ω の部分集合 $Q\ (\in \mathcal{B})$ を棄却検定域とするとき，$\mathfrak{h}$ の要素を P_v とし，$K \in \mathcal{L}$ とするとき

$$J(\Omega - Q, K) = \int_K P_v(\Omega - Q)\, d\bar{P}(v) = \alpha$$

$$J(\Omega, \mathfrak{h} - K) = \int_{\mathfrak{h}-K} P_v(Q)\, d\bar{P}(v) = \beta$$

（但 $\int d\bar{P}(v)$ は $\bar{P}$ による積分を示す）

を夫々複合假説 K の Q による第一種及び第二種の過誤の危険率 I－及 II－e.p.（K, Q）と云ふ。

$J(\Omega, K) = s$, $J(\Omega, \mathfrak{h} - K) = t$ とし，$0 < s, t < 1$

とすると，任意の $E\ (\in \mathcal{B})$ に対して

$$\frac{1}{s} J(E, K) = P_0(E),\quad \frac{1}{t} J(E, \mathfrak{h} - K) = P_1(E)$$

とおくとき，$P_0(E)$，$P_1(E)$ は Ω の上の確率測度となる。この（P_0，P_1）を対立假設として，最良検定域及び検定力函数を定めるとき之を K の Q による最良検定域及び検定力函数と云ふ。

定理 XI　$P(E) = J(E, \mathfrak{h})$ とするとき $P(E)$ も一つの確率測度である。

$\bar{P}_\omega(H)$（$\omega \in \Omega$, $H \in \mathcal{L}$）を次の如く定義する。

$J(E, H)$ は $P(E)$ に関して明らかに絶対連続だから

$$(7.4)\qquad J(E, H) = \int_E \bar{P}_\omega(H)\, dP(E).$$

そのときは $P_\omega(\mathfrak{h}) = 1$ almost every where (P)
for $\omega \in \Omega$ であり，

$$(7.5)\quad \left[\ \omega \,\middle|\, \frac{\overline{P}_\omega(\mathfrak{h}-K)}{\overline{P}_\omega(K)} \geqq k\ \right] = Q_k$$ が K の Q

による最良検定域である。

（証明） 定理 VIII の証明と同じである。

例へば, $\mathfrak{h}$ を平均 m を異にする $(-\infty,\infty)$ の色々な正規分布の集合, Ω を実数全体とする。

$$P_m:\quad f_m(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}(x-m)^2}$$

$$\overline{P}:\quad \varphi(m) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{m^2}{2}}$$

$$K = [\, m \leqq 0\,]$$

とすると $$J(E,K) = \int_{-\infty}^{0}\int_{E} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}(x-m)^2} dx \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{m^2}{2}} dm$$

$$= \int_E \int_{-\infty}^{0} (2\pi)^{-1} e^{-\frac{1}{2}(x-m)^2-\frac{1}{2}m^2}\, dm\, dx$$

$$= \int_E \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{x^4}{4}} \int_{-\infty}^{-\frac{x}{2}} \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt\, dx.$$

又 $J(\Omega, K) = \frac{1}{2}$ であるから

$P_0(E)$ の分布函数は $$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\, e^{-\frac{x^2}{4}} \int_{-\infty}^{-\frac{x}{2}} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt.$$

$P_1(E)$ の分布函数は $$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\, e^{-\frac{x^2}{4}} \int_{-\frac{x}{2}}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt.$$

又 $\alpha - \beta \doteqdot P(Q_k) - \overline{P}(\mathfrak{h}-K)$ となる。何となれば

$$
\begin{aligned}
\alpha - \beta &= J(Q_k, K) - J(\Omega - Q_k, \mathfrak{H} - K) \\
&= \int_{Q_k} \overline{P}_\omega(K)\, dP(\omega) - \int_{\Omega - Q_k} \{1 - \overline{P}_\omega(K)\}\, dP(\omega) \\
&= \int_{Q_k} \overline{P}_\omega(K)\, dP(\omega) - 1 + P(Q_k) - \overline{P}(K) - \int_{Q_k} \overline{P}_\omega(K)\, dP(\omega) \\
&= P(Q_k) - \overline{P}(\mathfrak{H} - K).
\end{aligned}
$$

こゝで $\overline{P}(\mathfrak{H} - K)$ が與へられてゐる場合は $P(Q_k)$ を知れば $\alpha - \beta$ がわかる。

注意（7.6）　KのQによる第一種の過誤及び第二種の過誤は普通 $\overline{P}$ が與へられてゐるのであるから，その意味は明らかであらう。

又，$\mathfrak{H}$ は（C.C.）を満す假說ばかりの集合とかぎる必要はない。しかし，P_0，P_1 が（C.C.）を満さなければならない。