或種の確率変数列について

所員　魚返　正

1°.　$\{x_n\}$ を平均値を持つ確率変数列とす。今 $\{x_n\}$ は次の條件を充すとする。[1)]

$$(F) \qquad E(x_1, x_2, \cdots\cdots, x_m ; x_n) = x_m, \quad (m \leqq n).$$

ここで　$E(x_1, x_2, \cdots\cdots, x_m, x_n)$ は $x_1, x_2, \cdots\cdots, x_m$ が與へられたときの x_n の條件付平均値とす。

例へば $\{y_n\}$ を平均値 0 の互に独立な確率変数列とし，$x_n = y_1 + y_2 + \cdots\cdots + y_n$ とおけば (F) が成立する。もつと一般にして $\{y_n\}$ が Lévy の條件 (C) を充たす。即ち

$$(C) \qquad E(y_1, y_2, \cdots\cdots, y_{n-1} ; y_n) = 0$$

ときも明かに　$x_n = y_1 + y_2 + \cdots\cdots + y_n$ は (F) を充たす。

こゝでは (F) を充たす $\{x_n\}$ に関して，強大数の法則

$P_r\left\{ \lim \dfrac{x_n}{n} = 0 \right\} = 1$ が成立する一つの充分條件を與へる。

1) J. L. Doob. Regularity properties of certain Families of Chance Variables. Trans. of Amer Math. Soci. Vol 47 (1940)

定理Ⅰ．（F）を充たす $\{x_n\}$ に於て

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} E(|x_{2^{k+1}} - x_{2^k}|) < +\infty$$

が成立するときは

$$P_r\left\{ \lim \frac{x_n}{n} = 0 \right\} = 1$$

証明．$2^k < m \leqq 2^{k+1}$ なる m に対して

$$E_m^{(k)} = \{ x_{2^k+1} - x_{2^k} \leqq \varepsilon 2^k, ---, x_{m-1} - x_{2^k} \leqq \varepsilon 2^k, x_m - x_{2^k} > \varepsilon 2^k \}$$
$$(\varepsilon > 0)$$

とおけば

(1) $$E_i^{(k)} E_j^{(k)} = 0 \qquad (i \neq j)$$

である。條件付平均値の定義と（F）から

(2) $$\int_{E_m^{(k)}} (x_{2^{k+1}} - x_{2^k})\, dP = \int_{E_m^{(k)}} (x_m - x_{2^k})\, dP \geqq \varepsilon 2^k P_r(E_m^{(k)}).$$

$$E^{(k)} = \sum_{m=2^k+1}^{2^{k+1}} E_m^{(k)}$$

とおけば（1），（2）から

$$\int_{E^{(k)}} (x_{2^{k+1}} - x_{2^k})\, dP \geqq \varepsilon 2^k P_r(E^{(k)})$$

従つて

$$E(|x_{2^{k+1}} - x_{2^k}|) \geqq \varepsilon 2^k P_r(E^{(k)}).$$

假定から

$$\sum_{k=0}^{\infty} Pr\,(E^{(k)})$$

は収斂する。　従つて $\{E^{(k)}\}$ は確率1を以て有限回しか起らない，即ち確率1で大分大なる k に対して

$$2^{k+1} \geqq m > 2^k \quad なるとき$$

$$x_m - x_{2^k} < \varepsilon \cdot 2^k$$

が成立する。　$n > 2^k$ なる任意の n に対して

$$\left[\frac{\log n}{\log 2}\right] = p \qquad とおけば$$

$$x_n - x_{2^k} = (x_n - x_{2^p}) + (x_{2^p} - x_{2^{p-1}}) + \cdots + (x_{2^{k+1}} - x_{2^k})$$

$$< \varepsilon\,(2^p + 2^{p-1} + \cdots + 2^k)$$

$$< \varepsilon \cdot 2^{p+1}$$

k を固定して　$n \longrightarrow \infty$ とすれば

$$\overline{\lim}\,\frac{x_n}{n} \leqq 2\cdot\varepsilon$$

ε は任意の正数故

$$\overline{\lim}\,\frac{x_n}{n} \leqq 0$$

次に

$$F_m^{(k)} = \{x_{2^k+1} - x_{2^k} \geqq -\varepsilon 2^k, \cdots, x_{m-1} - x_{2^k} \geqq -\varepsilon 2^k, x_m - x_{2^k} < -\varepsilon 2^k\}$$

とおいて前と全く同様にして

$$\underline{\lim}\,\frac{x_n}{n} \geqq 0$$

を得る。　故に

$$P_r\left(\lim \frac{x_n}{n}=0\right)=1 \qquad \text{（證明終）}$$

2° 次に $x_n - x_{n-1}$ ($n=1,2,\cdots$, $x_0=0$) が有界のときの x_n の order を考へる。

先づ條件 (F) から容易に

$$E(x_i y_j) = E(x_j^2) \qquad (j \leqq i),$$

(3) $$E(x_i - x_{i-1})^2 = E(x_i^2) - E(x_{i-1}^2),$$

$$E(x_i - x_{i-1})(x_j - x_{j-1}) = 0 \qquad (j \neq i).$$

今 $y_n = \sum_{i=1}^{n} a_i (x_i - x_{i-1})$ ($n=1,2,\cdots$) とおけば，$\{y_n\}$ は又 (F) を満足する。

$$E\{|y_n|\} = E\left\{\left|\sum_{i=1}^{n} a_i(x_i - x_{i-1})\right|\right\} \leqq \sqrt{E\{(\sum a_i(x_i - x_{i-1}))^2\}}.$$

(3) から

$$= \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2 E\{(x_i - x_{i-1})^2\}} \leqq \sqrt{k \sum_{i=1}^{n} a_i^2}.$$

従つて，

$\sum_{i=1}^{\infty} a_i^2 < +\infty$ なる如き $\{a_i\}$ をとれば．

$$E\{|y_n|\}$$

は有界である。然るに Doob によれば $\{y_n\}$ が（F）を充たし，$E\{|y_n|\}$ が，有界のときは $\lim_{n\to\infty} y_n$ が確率 1 で存在する。従つて

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i (x_i - x_{i-1})$$

が確率 1 で収斂する。故に Abel の変換をつかつて確率 1 で

$$a_n x_n = a_n \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) = o(1)$$

が成立することを知る。即ち次の定理を得る。

定理 3. $\{x_n\}$ が（F）を充たすとき
$x_n - x_{n-1}$ $(n=1,2,\cdots)$ が有界とすれば

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{b_n^2} < +\infty$ なる如き $\{b_n\}$ に対して確率 1 で

$$x_n = o(b_n)$$

が成立する。

4°. 次に，中心極限定理について考へる。$\{x_n\}$ は（F）の他に次の條件を充たすものとする。：

(F₁) $\quad E\{(x_n - x_{n-1})^2\} = E_{n-1}\{(x_n - x_{n-1})^2\}.$

こゝに $E_{n-1}(y)$ は $E(x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}; y)$ を意味する。

さて，$x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}$ が與へられたときの x_n の條件付確率 $P_r\{x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}; x_n < x\} = F_{n-1}(x)$ は，確率 0 の $(x_1, \cdots, x_{n-1})$ 集合に属さぬ $(x_1^0, x_2^0, \cdots, x_{n-1}^0)$ に対して確率測度となり，積分可能な函数

$$\varphi(x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}, x_n)$$

に対して

$$E_{n-1}(\varphi(x_1, \cdots, x_n))$$

は通常の積分

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}, x_n)\, dF_{n-1}(x)$$

となる。（Doob : *Stochastic processes with integral valued parameters.* Trans. Amer. Math. Soc. 44 (1938)）.

今次の條件（Lindeberg）が成立するとす。
任意の $\varepsilon > 0$ に対して

$$(L) \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sigma_n^2} \sum_{m=1}^{n} \int_{|x-x_{m-1}|>\varepsilon\sigma_n} (x-x_{m-1})^2\, dF_{m-1}(x) = 0$$

が確率 1 で成立する。$(\sigma_n^2 = E(x_n^2))$
さて，

$$g_m(t) = E(e^{it(x_m - x_{m-1})}) \qquad (m=1,2,\cdots,n)\ (x_0 \equiv 0)$$

$$f_m(t) = e^{itx_m} \prod_{\nu=m+1}^{n} g_\nu(t) \qquad (m=0,1,2,\cdots,n)$$

とおく。 x_n の特性函数は

$$E\left(f_n(x)\right)$$

である。 以後 t を一つ固定して考へる。

$$e^{itx}=1+itx+\frac{t^2x^2}{2}Ⓗ=1+itx-\frac{t^2x^2}{2}+\frac{t^3x^3}{6}Ⓗ$$

に注意して（ Ⓗ は $|Ⓗ|\leqq 1$ なる数又は確率変数を表はすことにする。）

$$E_{m-1}\left(e^{it\frac{(x_m-x_{m-1})}{\sigma_n}}\right)$$

$$=\int_{|x-x_m|\leqq\varepsilon\sigma_n}\left(1+\frac{it(x-x_{m-1})}{\sigma_n}-\frac{t^2(x-x_{m-1})^2}{2\sigma_n^2}+\frac{t^3(x-x_{m-1})^3Ⓗ}{6\sigma_n^3}\right)dF_{m-1}(x)$$

$$+\int_{|x-x_{m-1}|>\varepsilon\sigma_n}\left(1+\frac{it(x-x_{m-1})}{\sigma_n}+\frac{t^2(x-x_{m-1})Ⓗ}{2\sigma_n^2}\right)dF_{m-1}(x).$$

條件 F, F_1 から

(4) $$E_{m-1}\left(e^{it\frac{x_m-x_{m-1}}{\sigma_n}}\right)=1-\frac{t^2}{2\sigma_n^2}E(x_m-x_{m-1})^2$$

$$+\frac{t^2Ⓗ}{\sigma_n^2}\int_{|x-x_{m-1}|>\varepsilon\sigma_n}(x-x_{m-1})^2dF_{m-1}(x)+\frac{|t^3|\varepsilon Ⓗ}{6\sigma_n^2}E(x_m-x_{m-1})^2,$$

$$g_{m-1}\left(\frac{t}{\sigma_n}\right)=E\left(e^{it\frac{x_m-x_{m-1}}{\sigma_n}}\right)$$

$$=E\left(E_{m-1}\left(e^{it\frac{x_m-x_{m-1}}{\sigma_n}}\right)\right)$$

なる故（4）から

(5) $$g_{m-1}\left(\frac{t}{\sigma_n}\right)=1-\frac{t^2}{2\sigma_n^2}E(x_m-x_{m-1})^2$$

$$+\frac{t^2 Ⓗ}{\sigma_n^2}E\int_{|x-x_m|>\varepsilon\sigma_n}(x-x_{m-1})^2 dF_{m-1}(x)$$

$$+\frac{|t^3|\varepsilon Ⓗ}{6\sigma_n^2}E(x_m-x_{m-1})^2.$$

さて，

(6) $$\frac{1}{\sigma_n^2}\sum_{m=1}^{n}\int_{|x-x_{m-1}|>\varepsilon\sigma_n}(x-x_{m-1})^2 dF_{m-1}(x)\leqq\frac{1}{\sigma_n^2}\sum_{m=1}^{n}E_{m-1}(x_m-x_{m-1})^2$$

$$=\frac{1}{\sigma_n^2}\sum_{m=1}^{n}E(x_m-x_{m-1})^2=1$$

なる故に

(7) $$\frac{1}{\sigma_n^2}\sum_{m=1}^{n}E\int_{|x-x_{m-1}|>\varepsilon\sigma_n}(x-x_{m-1})^2 dF_{m-1}(x)\longrightarrow 0 \quad (n\to\infty).$$

従つて容易に　$m=1,2,\cdots,n$　に対して一様に

(8) $$\frac{1}{\sigma_n^2}E(x_m-x_{m-1})^2=\frac{1}{\sigma_n^2}E_{m-1}(x_m-x_{m-1})^2\to 0 \quad (n\to\infty)$$

がわかる。

（5）と（8）とから十分大なる n に対して

$$\log g_m\left(\frac{t}{\sigma_n}\right)=g_m\left(\frac{t}{\sigma_n}\right)-1+o\left(\left|g_m\left(\frac{t}{\sigma_n}\right)-1\right|\right),$$

（3）と（5）から

$$\sum_{m=1}^{n} \left| g_m\left(\frac{t}{\sigma_n}\right) - 1 \right| \leqq t^2 + \frac{|t|^3}{6}\varepsilon,$$

従って

$$\sum_{m=1}^{n} \log g_m\left(\frac{t}{\sigma_n}\right) = -\frac{t^2}{2} + \frac{t^2}{2\sigma_n^2}\sum_{m=1}^{n} E\int_{|x-x_{m-1}|>\varepsilon\sigma_n} (x-x_{m-1})^2 dF_{m-1}(x)$$

$$+\frac{|t^3|\varepsilon}{6} + o\left(t^2 + \frac{|t^3|}{6}\varepsilon\right)$$

故に（7）から

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \left| \sum_{m=1}^{n} \log g_m\left(\frac{t}{\sigma_n}\right) + \frac{t^2}{2} \right| \leqq \frac{|t|^3\varepsilon}{6}$$

ε は任意故

$$\sum_{m=1}^{n} \log g_m\left(\frac{t}{\sigma_n}\right) \longrightarrow -\frac{t^2}{2}$$

即ち

（9） $$f_0\left(\frac{t}{\sigma_n}\right) = \prod_{m=1}^{n} g_m\left(\frac{t}{\sigma_n}\right) \longrightarrow e^{-\frac{t^2}{2}}$$

次に $$\left| E\left(f_m\left(\frac{t}{\sigma_n}\right) - f_{m-1}\left(\frac{t}{\sigma_n}\right)\right) \right|$$

$$= \left| \prod_{\nu=m+1}^{n} g_\nu\left(\frac{t}{\sigma_n}\right) \right| \cdot \left| E\left\{ e^{it\cdot\frac{x_{m-1}}{\sigma_n}} \left(e^{it\frac{x_m - x_{m-1}}{\sigma_n}} - g_m\left(\frac{t}{\sigma_n}\right)\right)\right\} \right|$$

$$\leqq \left| E\left\{ e^{it\frac{x_{m-1}}{\sigma_n}} \left(e^{it\frac{x_m - x_{m-1}}{\sigma_n}} - g_m\left(\frac{t}{\sigma_n}\right)\right)\right\} \right|$$

$$= \left| E\left\{ e^{it\frac{x_{m-1}}{\sigma_n}} E_{m-1}\left(e^{it\frac{x_m - x_{m-1}}{\sigma_n}} - g_m\left(\frac{t}{\sigma_n}\right)\right)\right\} \right|$$

$$\leqq E\left\{\left|E_{m-1}\left(e^{it\frac{x_m-x_{m-1}}{\sigma_n}}-g_m\left(\frac{t}{\sigma_n}\right)\right)\right|\right\}.$$

(4) と (5) から

$$\leqq \frac{2t^2}{\sigma_n^2}E\int_{|x-x_{m-1}|>\varepsilon\sigma_n}(x-x_{m-1})^2dF_{m-1}(x)+\frac{t^3\varepsilon}{3\sigma_n^2}E(x_m-x_{m-1})^2.$$

故に

$$\left|E\left(f_n\left(\frac{t}{\sigma_n}\right)\right)-f_0\left(\frac{t}{\sigma_n}\right)\right|$$

$$\leqq \sum_{m=1}^{n}\left|E\left\{f_m\left(\frac{t}{\sigma_n}\right)-f_{m-1}\left(\frac{t}{\sigma_n}\right)\right\}\right|$$

$$\leqq 2t^2\frac{1}{\sigma_n^2}E\left(\sum_{m=1}^{n}\int_{|x-x_{m-1}|>\varepsilon\sigma_n}(x-x_{m-1})dF_{m-1}(x)\right)+\frac{t^3}{3}\varepsilon.$$

(7) から

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\left|E\left(f_n\left(\frac{t}{\sigma_n}\right)\right)-f_0\left(\frac{t}{\sigma_n}\right)\right|\leqq\frac{t^3}{3}\varepsilon.$$

ε は任意故

$$\lim_{n\to\infty}E\left(f_n\left(\frac{t}{\sigma_n}\right)\right)-f_0\left(\frac{t}{\sigma_n}\right)=0.$$

故に (9) から　$n\to\infty$ のとき

$$E\left(e^{it\frac{x_n}{\sigma_n}}\right)=E\left(f_n\left(\frac{t}{\sigma_n}\right)\right)\longrightarrow e^{-\frac{t^2}{2}}$$

t を固定して考へたが，$e^{-\frac{t^2}{2}}$ は特性函数故上のことから次の定理を得る。

定理．　確率変数列 $\{x_n\}$ が確率1で次の條件を充たすと

する。

(F) $$E_m(x_n) = x_m$$

(F_1) $$E_{m-1}(x_m - x_{m-1})^2 = E(x_m - x_{m-1})^2$$

(L) 任意の $\varepsilon > 0$ に対して

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sigma_n^2} \sum_{m=1}^{n} \int_{|x-x_{m-1}|>\varepsilon\sigma_n} (x - x_{m-1})^2 dF_{m-1}(x) = 0$$

$$(\sigma_n^2 = E(x_n^2))$$

然るときは，凡ての x に対して

$$\lim_{n\to\infty} Pr\left\{\frac{x_n}{\sigma_n} < x\right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

が成立する

以上.