⑧ 劣調和函数に就いて

鍋島　一郎

1　Recucil mathematique T.3.(45).1938 に於て Privaloff が「Npwbomehur nohrmur rapilliohureckoŭ Miepik. Hekomopmll zadaraill meopuu cubrapilliohure-ckux pyhkyuyuu (Sur quelques applications de la mesure harmonique à certains problèmes de la theorie de functions sous-harmoniques) なる論文で次の定理

[定理] 1　「$u(Z)$ が領域Dで劣調和で，上方に有界の時，境界点Z'に於て，

$$\overline{\lim_{Z\to Z'}}\, u(Z) \leqq C$$

が成立するならば，D内で致る所

$$u(Z) \leqq C$$

である。」

[定理] 2　「$u(Z)$がD内で劣調和で，上方に有界とし，Dの部分境界をαとすると

a)　αの点Z'に対し　$\overline{\lim_{Z\to Z'}}\, u(Z) \leqq M$

b)　$C(\overline{\alpha})$の点Z'に対し　$\overline{\lim_{Z\to Z'}}\, u(Z) \leqq m$

(但し$C(\overline{\alpha})$は$\overline{\alpha}$のcomplementとする)

が成立するならば，$\omega(Z,\alpha,D)$をDに関するαの調和測度とする。即ち

$$\omega(Z,\alpha;D)=1 \quad on\ \alpha$$

$$\omega(Z,\alpha;D)=0 \quad on\ C(\overline{\alpha})$$

且つ $\omega(Z,\alpha;D)$ はDで調和有界である，とすると，D内で

$$u(Z) \leqq M\omega(Z,\alpha;D)+m(1-\omega(Z,\alpha;D))$$

である。」

を証明し，この定理２を用ひて劣調和函数の種々の性質を導いてゐる。

その主要なものとしては次の如きものがある。

［定理］３「$u(Z)$が上半平面で劣調和で，実軸上のすべての有限点Z'に於て

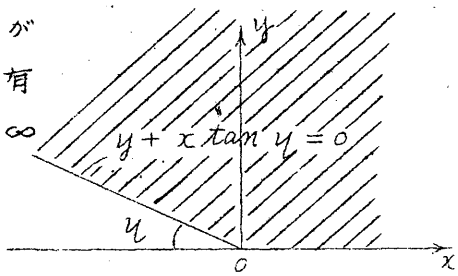
$$\overline{\lim_{Z\to Z'}}\, u(Z) \leqq 0$$

とすると，半円$|Z|=r$上の$u(Z)$の上限を$M(r)$とおくと，

① $M(r)$は$r\to\infty$の時 $\underline{\lim}\,\dfrac{M(r)}{r}>0$ なる程速かに$+\infty$に収斂するか，

又は② すべての点で $u(Z)\leqq 0$ となる。」

［定理］４「$u(Z)$が上半平面で劣調和で，上方に有界とする。正の実軸上で$Z\to\infty$の時，



$$u(Z)\to-\infty$$

とすると，正の実軸と直線

$y + x\tan\psi = 0$　（$\psi>0$は任意）との間の角内で $u(Z)$は，$Z\to\infty$の時一様に$-\infty$に近づく。」

これらの定理の証明では，各領域に應ずる調和測度の実際の形を求めて解かれる。

$\boxed{2}$ 定理２の他の應用として得た若干の結果を述べる。

$u(Z)$がDで劣調和とは，

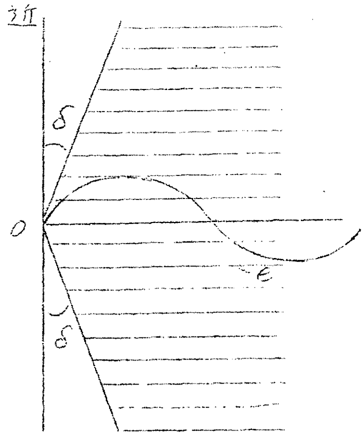
1), $-\infty \leqq u(Z) < +\infty$

2), 上半連續

3), $u(Z_0) \leqq \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} u(Z_0+\rho\cdot e^{i\theta})\,d\theta \quad Z_0\in D$

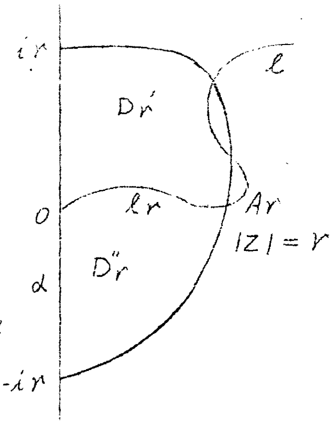
を満足する時である。

［定理］　$u(Z)$は右半平面で劣調和で，上方に有界とし $Z=0$に至るJordan曲線l上$Z=0$に近づく時$-\infty$に収斂するものとする。



この時
$$|\arg Z| \leqq \frac{\pi}{2}-\delta$$
に於て，一様に
$$\lim_{Z=0} u(Z)=-\infty$$
となる。

［証明］　$u(Z)$は上方に有界故
$$u(Z) \leqq M < \infty$$
とする。lが$Z=0$から最初に$|Z|=r$と交はる点A_rまでのlの部分をl_rとする。



l_r上の$u(Z)-M$の上限を$c(r)$とすると
$$c(r) \to -\infty \quad (r \to 0)$$
である。

半円$|Z|<r$内の部分をD_rとしD_rがl_rによって分たれるJordan領域をD_r'，D_r''とする。

$Z \in D_r'$なる$u(Z)$を考へると，

l_r上では
$$u(Z)-M \leqq c(r)$$
D_r'の他の境界では
$$\overline{\lim}\,(u(Z)-M) \leqq 0$$
故に定理2により，
$$Z \in D_r' \text{の時} \quad u(Z)-M \leqq c(r)\,\omega(Z, l_r ; D_r') \cdots\cdots ①$$
となる。

然るに　$[0,-ir]=\alpha$，$\widehat{ir, A_r}=\beta$ とおくと

Carlemanの定理により

$$w(Z, lr; D_r') \geqq w(Z, \alpha+\beta; D_r)$$
$$\geqq w(Z, \alpha; D_r) \text{ ---------- } ②$$

となる。

$h(Z)$ を $D_r\ (r=1)$ の半径 $[0-i]$ の調和測度とすると，

$$w(Z, \alpha; D_r) = h\left(\frac{Z}{r}\right) \text{ ---------- } ③$$

となり，$h(Z)$ は $|Z| \leqq \frac{1}{2}$，$-\frac{\pi}{2} \leqq \arg Z \leqq \frac{\pi}{2} - \delta$

なる領域で δ にのみ依存する正の $\min \lambda\delta$ をもつ

故に，領域 $\begin{cases} |Z| \leqq \frac{r}{2} \\ -\frac{\pi}{2} \leqq \arg Z \leqq \frac{\pi}{2} - \delta \end{cases}$

---

(1) *Nevanlinna; Eindentige analytsche Funktionen P63*

に於て $h\left(\frac{Z}{r}\right) \geqq \lambda\delta > 0$

となる。

故に②，③から，$S_r' \cdot D_r'$ に於て

$$w(Z, lr; D_r') \geqq \lambda\delta > 0$$

となり $c(r) < 0$ 故 (1) から $S_r' \cdot D_r'$ の Z について

$$u(Z) - M \leqq c(r) w(Z, lr; D_r') \leqq c(r)\lambda\delta \text{ --- } ④$$

となる。同様に D_r'' について考へれば

S_r'' を $|Z| \leqq \frac{r}{2}$，$-\frac{\pi}{2} + \delta \leqq \arg Z \leqq \frac{\pi}{2}$ なる領域とすると，$S_r'' \cdot D_r''$ の Z について

$$u(Z) - M \leqq c(r)\lambda\delta \text{ ---------- } ⑤$$

となる。故に④，⑤から

$$|Z| \leqq \frac{r}{2}, \quad |\arg Z| \leqq \frac{\pi}{2} - \delta; \quad \delta > 0$$

に於て

$$u(Z) - M \leqq c(r)\lambda\delta$$
$$u(Z) \leqq c(r)\lambda\delta + M$$ となる。

$r \to 0$ の時 $c(r) \to -\infty$ であるから

$|\arg Z| \leqq \frac{\pi}{2} - \delta$ に於て，一様に

$$\lim_{r=0} u(Z) = -\infty$$

となる。

［注意］

Zが正（又は負）の虚軸に沿ひ0に近づく時 $Z \to -\infty$ ならば

$$-\frac{\pi}{2}+\delta \leqq \arg Z \leqq \frac{\pi}{2}$$

$$\left(\text{又は}\ -\frac{\pi}{2} \leqq \arg Z \leqq \frac{\pi}{2}-\delta\right)$$

に於て一様に $-\infty$ に近づくことも同様に証明される。

$\boxed{3}$ 次に，領域Dを円 $|Z|=R$ で切つた時，Zが $|Z|<R$ の点でDに属しない点集合上をうごく時，Zの *module* のとる正の実軸上の点集合をDの $|Z|<R$ に関する *projection* と呼び E_D で表はす。(2)

［定理］ $u(Z)$ は $|Z|<R$ で劣調和，連續，上方に有界（$u(Z) \leqq M$）とし，$|Z|=r<R$ 上の $u(Z)$ の上限を $M(r)$ とする。

r_0 を $M(r) \leqq m$ （$m<M$）を満足する r の上限とすると，

$$|Z| \leqq r = \rho R \qquad (0 \leqq \rho < 1) \quad \text{に於て}$$

$$u(Z) \leqq m(1-p(\rho)) + Mp(\rho)$$

となる。 但し

$$p(\rho) = \frac{4}{\pi}\ \mathrm{arctg}\sqrt{\frac{\theta+\rho}{1+\rho\theta}}$$

$$\theta = 1-\frac{r_0}{R} \qquad \text{となる}$$

(2) A. Beurling; Etude sur un probléme de majaration P.45

［証明］

$$D \begin{cases} |Z| < R \\ u(Z) > m \end{cases}$$

なる領域 D を考へると，

Dの境界点を Z′ とすると，

(β)；$|Z'| = R$ の時　$\overline{\lim\limits_{Z \to Z'}}(u(Z) - M) \leqq 0$

(α)；$|Z'| < R$ の時　$u(Z) - M \doteqdot m - M$

故に定理2により D 内で

$$u(Z) - M \leqq (m - M) \cdot \omega(Z, \alpha; D)$$

となる。

然るに　$\omega(Z, \alpha; D) = 1 - \omega(Z, \beta; D)$

であって D の $|Z| < R$ に関する *projection* を E_D とする時，$\Omega(Z, E_D)$ を $|Z| < R$ で調和で，$|Z| = R$ 上で 1 に等しく E_D 上で 0 となる函数とすると，*Beurling* の定理により，

$$\omega(Z, \beta; D) \leqq \Omega(-|Z|, E_D)$$

となる。

然るに，　$E_D \supset E$

であるから

$$\Omega(-|Z|, E_D) \leqq \Omega(-|Z|, E)$$

となる。

故に，

$$\omega(Z, \alpha; D) \geqq 1 - \Omega(-|Z|, E)$$

となる。

$$m - M < 0$$

故，

D 内で

$$u(Z) - M \leqq (m - M)(1 - \Omega(-|Z|, E))$$

となる。

又，D外の Z については

$$u(Z)-M \leqq m-M < 0$$

であるから

$$0 \leqq 1-\Omega(-|Z|,E) \leqq 1$$

により

$$u(Z)-M \leqq (m-M)(1-\Omega(-|Z|,E))$$

となり，やはり成立する

即ち，

$|Z|<R$ に於て

$$u(Z)-M \leqq (m-M)(1-\Omega(-|Z|,E))$$

となる。

故に，

$|Z|=r$ に於て

$$u(Z)-M \leqq (m-M)(1-\Omega(-r,E))$$

となる。

しかるに，

$u(Z)$ は $|Z| \leqq r$ で劣調和故

$|Z| \leqq r$ に於て

$$u(Z)-M \leqq (m-M)(1-\Omega(-r,E))$$

となる。

又

$$\Omega(-r,E) \leqq p(\rho)=\frac{4}{\pi}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{\theta+\rho}{1+\rho\theta}}$$

であるから，上式から，

$$u(Z) \leqq m(1-p(\rho))+Mp(\rho)$$

を得る。