⑫ 有限域高次多項式密度函数を持つ量の和の分布

山内二郎

ある有限域で高次多項式であらわされる密度函数を持っている量の和の分布を求める一般式を得た。

I. 一般の場合

量 x_s は $a_s \leqq x < b_s$ の領域内で，n_s 次多項式であらわされるその外では 0 である密度函数 $\varphi_s(x)$ を持っているものとする。すなわち

$$\varphi_s(x) = \sum_{\nu=0}^{n_s} C_s^{(\nu)} \frac{(x-a_s)^\nu}{\nu!} \left[E_0(x-a_s) - E_0(x-b_s) \right] \quad \text{------} (1\cdot1)$$

で，$C_s^{(\nu)}$ は定数である。この分布函数 $f_s(x)$ は

$$f_s(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi_s(x)\,dx = \sum_{\nu=0}^{n_s} C_s^{(\nu)} \frac{(x-a_s)^{\nu+1}}{(\nu+1)!} \left[E_0(x-a_s) - E_0(x-b_s) \right] \quad \text{------} (1\cdot2)$$

$$f_s(b_s) = \sum_{\nu=0}^{n_s} C_s^{(\nu)} \frac{(b_s-a_s)^{\nu+1}}{(\nu+1)!} = 1 \quad \text{------} (1\cdot3)$$

である。こゝに $E_0(x)$ は衝撃函数で

$$E_0(x) = 1 \qquad (x \geqq 0)$$
$$= 0 \qquad (x < 0).$$

である。

この密度函数の特性函数 $\Psi_s(it)$ は

$$\Psi_s(it) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_s(x) e^{itx} dx$$
$$= \int_{a_s}^{b_s} \sum_{\nu=0}^{n_s} C_s^{(\nu)} \frac{(x-a_s)^\nu}{\nu!} e^{itx} dx$$

であるから，部分積分により

$$\Psi_s(it) = e^{ita_s} \sum_{\nu=0}^{n_s} \frac{(-1)^{\nu+1}}{(it)^{\nu+1}} \varphi_s^{(\nu)}(a_s)$$
$$- e^{itb_s} \sum_{\nu=0}^{n_s} \frac{(-1)^{\nu+1}}{(it)^{\nu+1}} \varphi_s^{(\nu)}(b_s) \quad \text{-----}(1.4)$$

を得る。

さて（1.1）であらわされる高次多項式を b_s で Taylor 展開をすると

$$\sum_{\nu=0}^{n_s} C_s^{(\nu)} \frac{(x-a_s)^\nu}{\nu!} = \sum_{\nu=0}^{n_s} \frac{(x-b_s)^\nu}{\nu!} \varphi_s^{(\nu)}(b_s)$$

となるから，（1.1）は

$$\varphi_s(x) = E_0(x-a_s) \sum_{\nu=0}^{n_s} \frac{(x-a_s)^\nu}{\nu!} \varphi_s^{(\nu)}(a_s)$$
$$- E_0(x-b_s) \sum_{\nu=0}^{n_s} \frac{(x-b_s)^\nu}{\nu!} \varphi_s^{(\nu)}(b_s) \quad \text{----}(1.5)$$

となり，（1.4）と対照して機械的に（1.4）から（1.5）へ，逆に（1.5）から（1.4）へ容易に書き下すことができる。

（1.5）をつかうと（1.2）は

$$f_s(x) = E_0(x-a_s) \sum_{\nu=0}^{n_s} \frac{(x-a_s)^{\nu+2}}{(\nu+2)!} \varphi_s^{(\nu)}(a_s)$$

$$-E_0(x-b_s)\sum_{\nu=0}^{n_s}\frac{(x-b_s)^{\nu+2}}{(\nu+2)!}\varphi_s^{(\nu)}(b_s) \quad \text{------} (1.6)$$

と書ける。

$a_1 \leqq x < b_1$ である x_1 の密度函数 $\varphi_1(x)$ は n_1 次の高次多項式であり， $a_2 \leqq x < b_2$ である x_2 の密度函数 $\varphi_2(x)$ は n_2 次の高次多項式であるとき， x_1 と x_2 との和の密度函数 $\varphi_{1,2}(x)$ は

$$\varphi_{1,2}(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\psi_1(it)\,\psi_2(it)\,e^{-itx}dt$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}dt\Big[e^{-it(x-a_1-a_2)}\sum_{\nu_1=0}^{n_1}\frac{(-1)^{\nu_1+1}}{(it)^{\nu_1+1}}\varphi_1^{(\nu_1)}(a_1)\sum_{\nu_2=0}^{n_2}\frac{(-1)^{\nu_2+1}}{(it)^{\nu_2+1}}\varphi_2^{(\nu_2)}(a_2)$$

$$-e^{-it(x-a_1-b_2)}\sum_{\nu_1=0}^{n_1}\frac{(-1)^{\nu_1+1}}{(it)^{\nu_1+1}}\varphi_1^{(\nu_1)}(a_1)\sum_{\nu_2=0}^{n_2}\frac{(-1)^{\nu_2+1}}{(it)^{\nu_2+1}}\varphi_2^{(\nu_2)}(b_2)$$

$$-e^{-it(x-b_1-a_2)}\sum_{\nu_1=0}^{n_1}\frac{(-1)^{\nu_1+1}}{(it)^{\nu_1+1}}\varphi_1^{(\nu_1)}(b_1)\sum_{\nu_2=0}^{n_2}\frac{(-1)^{\nu_2+1}}{(it)^{\nu_2+1}}\varphi_2^{(\nu_2)}(a_2)$$

$$+e^{-it(x-b_1-b_2)}\sum_{\nu_1=0}^{n_1}\frac{(-1)^{\nu_1+1}}{(it)^{\nu_1+1}}\varphi_1^{(\nu_1)}(b_1)\sum_{\nu_2=0}^{n_2}\frac{(-1)^{\nu_2+1}}{(it)^{\nu_2+1}}\varphi_2^{(\nu_2)}(b_2)\Big],$$

となるが，これを前の例のように機械的に書くと

$$\varphi_{1,2}(x)=E_0(x-a_1-a_2)\sum_{\nu_1=0}^{n_1}\sum_{\nu_2=0}^{n_2}\frac{(x-a_1-a_2)^{\nu_1+\nu_2+1}}{(\nu_1+\nu_2+1)!}\varphi_1^{(\nu_1)}(a_1)\varphi_2^{(\nu_2)}(a_2)$$

$$-E_0(x-a_1-b_2)\sum_{\nu_1=0}^{n_1}\sum_{\nu_2=0}^{n_2}\frac{(x-a_1-b_2)^{\nu_1+\nu_2+1}}{(\nu_1+\nu_2+1)!}\varphi_1^{(\nu_1)}(a_1)\varphi_2^{(\nu_2)}(b_2)$$

$$-E_0(x-b_1-a_2)\sum_{\nu_1=0}^{n_1}\sum_{\nu_2=0}^{n_2}\frac{(x-b_1-a_2)^{\nu_1+\nu_2+1}}{(\nu_1+\nu_2+1)!}\varphi_1^{(\nu_1)}(b_1)\varphi_2^{(\nu_2)}(a_2)$$

$$+E_0(x-b_1-b_2)\sum_{\nu_1=0}^{n_1}\sum_{\nu_2=0}^{n_2}\frac{(x-b_1-b_2)^{\nu_1+\nu_2+1}}{(\nu_1+\nu_2+1)!}\varphi_1^{(\nu_1)}(b_1)\varphi_2^{(\nu_2)}(b_2) \quad \text{---- (1.8)}$$

（1.7）から直接に計算しても（1.8）になる。

$$\sum_{\nu_2=0}^{n_2}\frac{(-1)^{\nu_2+1}}{(it)^{\nu_2+1}}\varphi_2^{(\nu_2)}(b_2)=\sum_{\nu_2=0}^{n_2}\frac{(-1)^{\nu_2+1}}{(it)^{\nu_2+1}}\sum_{\lambda=0}^{n_2-\nu_2}\frac{(b_2-a_2)^{\lambda}}{\lambda!}\varphi_2^{(\nu_2+\lambda)}(a_2)$$

$$=\sum_{\nu_2=0}^{n_2}\varphi_2^{(\nu_2)}(a_2)\sum_{\lambda=0}^{\nu_2}\frac{(b_2-a_2)^{\lambda}}{\lambda!}\frac{(-1)^{\nu_2+1-\lambda}}{(it)^{\nu_2+1-\lambda}} \quad \text{---- (1.9)}$$

（1.7）の最初の二つの項について $\varphi_1^{(\nu_1)}(a_1)\varphi_2^{(\nu_2)}(a_2)$ の係数について見ると

$$e^{-it(x-a_1-a_2)}\frac{(-1)^{\nu_1+\nu_2+2}}{(it)^{\nu_1+\nu_2+2}}-e^{-it(x-a_1-b_2)}\frac{(-1)^{\nu_1+1}}{(it)^{\nu_1+1}}\sum_{\lambda=0}^{\nu_2}\frac{(b_2-a_2)^{\lambda}}{\lambda!}\frac{(-1)^{\nu_2+1-\lambda}}{(it)^{\nu_2+1-\lambda}}$$

であって，一方

$$\int_{a_2}^{b_2}\frac{(x-a_2)^{\nu_1+\nu_2+1}}{(\nu_1+\nu_2+1)!}e^{itx}dx=e^{ita_2}\frac{(-1)^{\nu_1+\nu_2+2}}{(\nu_1+\nu_2+2)!}$$

$$-e^{itb_2}\sum_{\lambda=0}^{\nu_1+\nu_2+1}\frac{(b_2-a_2)^{\lambda}}{\lambda!}\frac{(-1)^{\nu_1+\nu_2+2-\lambda}}{(it)^{\nu_1+\nu_2+2-\lambda}}$$

となるから，（1・7）は

$$\varphi_{1,2}(x)=\left[E_0(x-a_1-a_2)-E_0(x-a_1-b_2)\right]\sum_{\nu_1=0}^{n_1}\sum_{\nu_2=0}^{n_2}\frac{(x-a_1-a_2)^{\nu_1+\nu_2+1}}{(\nu_1+\nu_2+1)!}\varphi_1^{(\nu_1)}(a_1)\varphi_2^{(\nu_2)}(a_2)$$

$$-\left[E_0(x-b_1-a_2)-E_0(x-b_1-b_2)\right]\sum_{\nu_1=0}^{n_1}\sum_{\nu_2=0}^{n_2}\frac{(x-b_1-a_2)^{\nu_1+\nu_2+1}}{(\nu_1+\nu_2+1)!}\varphi_1^{(\nu_1)}(b_1)\varphi_2^{(\nu_2)}(a_2)$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}dt\left[e^{-it(x-a_1-b_2)}\sum_{\nu_1=0}^{n_1}\sum_{\nu_2=0}^{n_2}\varphi_1^{(\nu_1)}(a_1)\varphi_2^{(\nu_2)}(a_2)\sum_{\lambda=0}^{\nu_1}\frac{(b_2-a_2)^{\nu_2+1+\lambda}}{(\nu_2+1+\lambda)!}\frac{(-1)^{\nu_1+1-\lambda}}{(it)^{\nu_1+1-\lambda}}\right.$$

$$\left.-e^{-it(x-b_1-b_2)}\sum_{\nu_1=0}^{n_1}\sum_{\nu_2=0}^{n_2}\varphi_1^{(\nu_1)}(b_1)\varphi_2^{(\nu_2)}(a_2)\sum_{\lambda=0}^{\nu_1}\frac{(b_2-a_2)^{\nu_2+1+\lambda}}{(\nu_2+1+\lambda)!}\frac{(-1)^{\nu_1+1-\lambda}}{(it)^{\nu_1+1-\lambda}}\right] \qquad \cdots (1.10)$$

となる。（1.10）の第３項は（1.4）（1.5）によって計算され，結局

$$\varphi_{1,2}(x)=\left[E_0(x-a_1-a_2)-E_0(x-a_1-b_2)\right]\sum_{\nu_1=0}^{n_1}\sum_{\nu_2=0}^{n_2}\frac{(x-a_1-a_2)^{\nu_1+\nu_2+1}}{(\nu_1+\nu_2+1)!}\varphi_1^{(\nu_1)}(a_1)\varphi_2^{(\nu_2)}(a_2)$$

$$-\left[E_0(x-b_1-a_2)-E_0(x-b_1-b_2)\right]\sum_{\nu_1=0}^{n_1}\sum_{\nu_2=0}^{n_2}\frac{(x-b_1-a_2)^{\nu_1+\nu_2+1}}{(\nu_1+\nu_2+1)!}\varphi_1^{(\nu_1)}(b_1)\varphi_2^{(\nu_2)}(a_2)$$

$$+\left[E_0(x-a_1-b_2)-E_0(x-b_1-b_2)\right]\sum_{\nu_1=0}^{n_1}\sum_{\nu_2=0}^{n_2}\varphi_1^{(\nu_1)}(a_1)\varphi_2^{(\nu_2)}(a_2)\sum_{\lambda=0}^{\nu_1}\frac{(b_2-a_2)^{\nu_2+1+\lambda}}{(\nu_2+1+\lambda)!}\frac{(x-a_1-b_2)^{\nu_1-\lambda}}{(\nu_1-\lambda)!}$$

となり，$-E_0(x-a_1-b_2)$ の係数のうち $\varphi_1^{(\nu_1)}(a_1)$ の係数は

$$\sum_{\nu_2=0}^{n_2}\frac{(x-a_1-a_2)^{\nu_1+\nu_2+1}}{(\nu_1+\nu_2+1)!}\varphi_2^{(\nu_2)}(a_2)-\sum_{\nu_2=0}^{n_2}\varphi_2^{(\nu_2)}(a_2)\sum_{\lambda=0}^{\nu_1}\frac{(b_2-a_2)^{\nu_2+1+\lambda}}{(\nu_2+1+\lambda)!}\frac{(x-a_1-b_2)^{\nu_1-\lambda}}{(\nu_1-\lambda)!}$$

$$=\sum_{\nu_2=0}^{n_2}\varphi_2^{(\nu_2)}(a_2)\sum_{\lambda=0}^{\nu_2}\frac{(b_2-a_2)^{\lambda}}{\lambda!}\frac{(x-a_1-b_2)^{\nu_1+\nu_2+1-\lambda}}{(\nu_1+\nu_2+1-\lambda)!}$$

$$= \sum_{\nu_2=0}^{n_2} \frac{(x-a_1-b_2)^{\nu_1+\nu_2+1}}{(\nu_1+\nu_2+1)} \sum_{\lambda=0}^{n_2-\nu_2} \frac{(b_2-a_2)^{\lambda}}{\lambda!} \varphi_2^{(\nu_2+\lambda)}(a_2)$$

$$= \sum_{\nu_2=0}^{n_2} \frac{(x-a_1-b_2)^{\nu_1+\nu_2+1}}{(\nu_1+\nu_2+1)!} \varphi_2^{(\nu_2)}(b_2)$$

となり，　$E_0(x-b_1-b_2)$ の係数は

$$\sum_{\nu_1=0}^{n_1} \sum_{\nu_2=0}^{n_2} \frac{(x-b_1-a_2)^{\nu_1+\nu_2+1}}{(\nu_1+\nu_2+1)!} \varphi_1^{(\nu_1)}(b_1)\varphi_2^{(\nu_2)}(a_2)$$

$$- \sum_{\nu_1=0}^{n_1} \sum_{\nu_2=0}^{n_2} \varphi_1^{(\nu_1)}(a_1)\varphi_2^{(\nu_2)}(a_2) \sum_{\lambda=0}^{\nu_1} \frac{(b_2-a_2)^{\nu_2+1+\lambda}}{(\nu_2+1+\lambda)!} \frac{(x-a_1-b_2)^{\nu_1-\lambda}}{(\nu_1-\lambda)!}$$

$$= \sum_{\nu_1=0}^{n_1} \sum_{\nu_2=0}^{n_2} \frac{(x-b_1-b_2)^{\nu_1+\nu_2+1}}{(\nu_1+\nu_2+1)!} \varphi_1^{(\nu_1)}(b_1) \sum_{\lambda=0}^{n_2-\nu_2} \frac{(b_2-a_2)^{\lambda}}{\lambda!} \varphi_2^{(\nu_2+\lambda)}(a_2)$$

$$+ \sum_{\nu_1=0}^{n_1} \sum_{\nu_2=0}^{n_2} \varphi_1^{(\nu_1)}(b_1)\varphi_2^{(\nu_2)}(a_2) \sum_{\lambda=0}^{\nu_1} \frac{(b_2-a_2)^{\nu_2+1+\lambda}}{(\nu_2+1+\lambda)!} \frac{(x-b_1-b_2)^{\nu_1-\lambda}}{(\nu_1-\lambda)!}$$

$$- \sum_{\nu_1=0}^{n_1} \sum_{\nu_2=0}^{n_2} \varphi_1^{(\nu_1)}(a_1)\varphi_2^{(\nu_2)}(a_2) \sum_{\lambda=0}^{\nu_1} \frac{(b_2-a_2)^{\nu_2+1+\lambda}}{(\nu_2+1+\lambda)!} \frac{(x-a_1-b_2)^{\nu_1-\lambda}}{(\nu_1-\lambda)!}$$

$$= \sum_{\nu_1=0}^{n_1} \sum_{\nu_2=0}^{n_2} \frac{(x-b_1-b_2)^{\nu_1+\nu_2+1}}{(\nu_1+\nu_2+1)!} \varphi_1^{(\nu_1)}(b_1)\varphi_2^{(\nu_2)}(b_2)$$

$$+ \sum_{\nu_2=0}^{n_2} \varphi_2^{(\nu_2)}(a_2) \left\{ \sum_{\nu_1=0}^{n_1} \sum_{\lambda=0}^{\nu_1} \frac{(b_2-a_2)^{\nu_2+1+\lambda}}{(\nu_2+1+\lambda)} \left(\varphi_1^{(\nu_1)}(b_1) \frac{(x-b_1-b_2)^{\nu_1-\lambda}}{(\nu_1-\lambda)!} - \varphi_1^{(\nu_1)}(a_1) \frac{(x-a_1-b_2)^{\nu_1-\lambda}}{(\nu_1-\lambda)!} \right) \right\}^{(註)}$$

$$= \sum_{\nu_1=0}^{n_1} \sum_{\nu_2=0}^{n_2} \frac{(x-b_1-b_2)^{\nu_1+\nu_2+1}}{(\nu_1+\nu_2+1)!} \varphi_1^{(\nu_1)}(b_1)\, \varphi_2^{(\nu_2)}(b_2)$$

従って（1.8）となる。

（1・8）を積分して分布函数 $f_{1\cdot 2}(x)$ を求めると，

$$f_{1.2}(x) = E_0(x-a_1-a_2) \sum_{\nu_1=0}^{n_1} \sum_{\nu_2=0}^{n_2} \frac{(x-a_1-a_2)^{\nu_1+\nu_2+2}}{(\nu_1+\nu_2+2)!} \varphi_1^{(\nu_1)}(a_1)\varphi_2^{(\nu_2)}(a_2)$$

$$- \cdots\cdots \qquad \text{---- } (1,11)$$

となり， 平均値 $\overline{x}_{1,2}$ は

$$\overline{x}_{1,2} = (b_1+b_2) - \sum_{\nu_1=0}^{n_1} \sum_{\nu_2=0}^{n_2} \left\{ \frac{(b_1-a_1+b_2-a_2)^{\nu_1+\nu_2+3}}{(\nu_1+\nu_2+3)!} \varphi_1^{(\nu_1)}(a_1)\varphi_2^{(\nu_2)}(a_2) \right.$$

$$- \frac{(b_1-a_1)^{\nu_1+\nu_2+3}}{(\nu_1+\nu_2+3)!} \varphi_1^{(\nu_1)}(a_1)\, \varphi_2^{(\nu_2)}(b_2)$$

$$\left. - \frac{(b_1-a_1)^{(\nu_1+\nu_2+3}}{(\nu_1+\nu_2+3)} \varphi_1^{(\nu_1)}(b_1)\, \varphi_2^{(\nu_2)}(a_2) \right\}$$

$$\text{---- } (1\cdot 12)$$

$x_1, x_2, \text{------} x_m$ の和の分布も全く同様に計算して求めると

（註）

$$\{\cdots\} = \sum_{\lambda=0}^{n_1} \frac{(b_2-a_2)^{\nu_2+1+\lambda}}{(\nu_2+1+\lambda)!} \sum_{\nu_1=\lambda}^{n_1} \left(\varphi_1^{(\nu_1)}(b_1) \frac{(x-b_1-b_2)^{\nu_1-\lambda}}{(\nu_1-\lambda)!} - \varphi_1^{(\nu_1)}(a_1) \frac{(x-a_1-b_2)^{\nu_1-\lambda}}{(\nu_1-\lambda)!} \right)$$

$$= 0$$

$$\varphi_{1,2,\cdots m}(x) = \sum^{*}(-)^{[L_1]}(-)^{[L_2]}\cdots(-)^{[L_m]}E_0(x-L_1-L_2\cdots-L_m)$$

$$\sum_{\nu_1=0}^{n_1}\sum_{\nu_2=0}^{n_2}\cdots\sum_{\nu_m=0}^{n_m}\left\{\frac{(x-L_1-L_2\cdots-L_m)^{\nu_1+\nu_2+\cdots\nu_m+m-1}}{(\nu_1+\nu_2+\cdots\nu_m+m-1)!}\varphi_1^{(\nu_1)}(L_1)\varphi_2^{(\nu_2)}(L_2)\cdots\varphi_m^{(\nu_m)}(L_m)\right\}$$

--- (1,13)

こゝに $L_s(s=1,2\cdots m)$ は x_s の下限 a_s 又は上限 b_s をあらわし，$(-)^{[L_s]}$ は L_s が下限 a_s のとき(+)，上限 b_s のとき(−)とする記号で，$\sum^{*}$ は $L_1,L_2\cdots L_m$ の下限又は上限のあらゆる組合せの總和を意味する。これは数学的帰納法で証明される。

$$f_{1,2,\cdots m}(x) = \sum^{*}(-)^{[L_1]}(-)^{[L_2]}\cdots(-)^{[L_m]}E_0(x-L_1-L_2\cdots-L_m)$$

$$\sum_{\nu_1=0}^{n_1}\sum_{\nu_2=0}^{n_2}\cdots\sum_{\nu_m=0}^{n_m}\left\{\frac{(x-L_1-\cdots-L_m)^{\nu_1+\cdots+\nu_m+m}}{(\nu_1+\nu_2+\cdots+\nu_m+m)!}\varphi_1^{(\nu_1)}(L_1)\cdots\varphi_m^{(\nu_m)}(L_m)\right\}$$

--- (1,14)

$$\bar{x}_{1,2,\cdots m} = (b_1+b_2+\cdots+b_m)$$

$$-\sum^{*}(-)^{[L_1]}\cdots(-)^{[L_m]}\sum_{\nu_1=0}^{n_1}\cdots\sum_{\nu_m=0}^{n_m}\left\{\frac{(x-L_1-\cdots-L_m)^{\nu_1+\cdots+\nu_m+m+1}}{(\nu_1+\nu_2+\cdots+\nu_m+m+1)!}\varphi_1^{(\nu_1)}(L_1)\cdots\varphi_m^{(\nu_m)}(L_m)\right\}$$

--- (1,15)

II. 同じものの m 個の和の分布

この場合 X の上限下限の一般の場合について論じてもただ複雑になるだけであるから，こゝには

$$\varphi(x)=\sum_{\nu=0}^{n}C^{(\nu)}\frac{x^{\nu}}{\nu!}\left[E_{0}(x)-E_{0}(x-1)\right]\cdots\cdots \quad (2.1)$$

の場合について論ずる。

この特性函数 $\psi(it)$ は

$$\psi(it)=\sum_{\nu=0}^{n}\frac{(-1)^{\nu+1}}{(it)^{\nu+1}}\varphi^{(\nu)}(0)-e^{it}\sum_{\nu=0}^{n}\frac{(-1)^{\nu+1}}{(\nu+1)!}\varphi^{(\nu)}(1)\cdots \quad (2.2)$$

となるから，

$$\psi^{m}(it)=\sum_{\mu=0}^{m}(-)^{\mu}\binom{m}{\mu}e^{it\mu}\left[\sum_{\nu=0}^{n}\frac{(-1)^{\nu+1}}{(it)^{\nu+1}}\varphi^{(\nu)}(1)\right]^{\mu}\left[\sum_{\nu=0}^{n}\frac{(-1)^{\nu+1}}{(it)^{\nu+1}}\varphi^{(\nu)}(0)\right]^{m-\mu}$$

$$=\sum_{\mu=0}^{m}(-)^{\mu}\binom{m}{\mu}e^{it\mu}\left[\sum_{\alpha}^{m-\mu}\frac{(-1)^{m-\mu+\Sigma\nu\alpha_{\nu}}}{(it)^{m-\mu+\Sigma\nu\alpha_{\nu}}}A^{(m-\mu)}_{\alpha_0,\alpha_1,\cdots\alpha_m}\right]\cdot$$

$$\left[\sum_{\beta}^{\mu}\frac{(-1)^{\mu+\Sigma\nu\beta_{\nu}}}{(it)^{\mu+\Sigma\nu\beta_{\nu}}}A^{(\mu)}_{\beta_0\beta_1,\cdots\beta_m}\right]\cdots \quad (2,3)$$

こゝに $A^{(m-\mu)}_{\alpha_0\alpha_1\cdots\alpha_n}$ は $(n+1)$ 項の和の $(m-\mu)$ 乗式の展開の係数で，α_s は $\varphi^{(s)}(0)$ を含む項の巾指数，従って $\sum_{\nu=0}^{n}\alpha_{\nu}=m-\mu$ であり，$\sum_{\alpha}^{m-\mu}$ はこれらのあらゆる組合せの総和をあらわし；$A^{(\mu)}_{\beta_0\beta_1\cdots\beta_n}$ も同じ意味で，

$$A^{(m-\mu)}_{\alpha_0\alpha_1\cdots\alpha_n}=\frac{(m-\mu)!}{\alpha_0!\alpha_1!\cdots\alpha_n!}(\varphi^{(0)}(0))^{\alpha_0}(\varphi^{(1)}(0))^{\alpha_1}\cdots(\varphi^{(m)}(0))^{\alpha_m}$$

$$\cdots(2.4\alpha)$$

$$A^{(\mu)}_{\beta_0\beta_1\cdots\beta_n} = \frac{(\mu)!}{\beta_0!\beta_1!\cdots\beta_n!}(\varphi^{(0)}(1))^{\beta_0}(\varphi^{(1)}(1))^{\beta_1}\cdots(\varphi^{(n)}(1))^{\beta_n}$$

$$\cdots(2,4\beta).$$

である。従つて

$$\psi^m(it) = \sum_{\mu=0}^{m}(-)^{\mu}\binom{m}{\mu}e^{it\mu}\sum_{\alpha}^{m-\mu}\sum_{\beta}^{\mu}\frac{(-1)^{m+\Sigma\nu\alpha_\nu+\Sigma\nu\beta_\nu}}{(it)^{m+\Sigma\nu\alpha_\nu+\Sigma\nu\beta_\nu}}A^{(m-\mu)}_{\alpha_0\alpha_1\cdots\alpha_n}A^{(\mu)}_{\beta_0\beta_1\cdots\beta_n}$$

$$\cdots(2,5)$$

となる。よつて m 個の和の分布は

$$\varphi_m(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\psi^m(it)e^{-itx}dt$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\sum_{\mu=0}^{m}(-1)^{\mu}\binom{m}{\mu}e^{-it(x-\mu)}dt\sum_{\alpha}^{m-\mu}\sum_{\beta}^{\mu}\frac{(-1)^{m+\Sigma\nu\alpha_\nu+\Sigma\nu\beta_\nu}}{(it)^{m+\Sigma\nu\alpha_\nu+\Sigma\nu\beta_\nu}}A^{(m-\mu)}_{\alpha_0\cdots\alpha_n}A^{(\mu)}_{\beta_0\cdots\beta_n}$$

$$= \sum_{\mu=0}^{m}(-)^{\mu}\binom{m}{\mu}E_0(x-\mu)\sum_{\alpha}^{m-\mu}\sum_{\beta}^{\mu}\frac{(x-\mu)^{\Sigma\nu\alpha_\nu+\Sigma\nu\beta_\nu+m-1}}{(\Sigma\nu\alpha_\nu+\Sigma\nu\beta_\nu+m-1)!}A^{(m-\mu)}_{\alpha_0\cdots\alpha_n}A^{(\mu)}_{\beta_0\cdots\beta_n}$$

$$\cdots(2,6)$$

$$f_m(x)=\sum_{\mu=0}^{m}(-)^{\mu}\binom{m}{\mu}E_0(x-\mu)\sum_{\alpha}^{m-\mu}\sum^{\mu}\frac{(x-\mu)^{\Sigma\nu\alpha\nu+\Sigma\nu\beta_\nu+m}}{(\Sigma\nu\alpha+\Sigma\nu\beta_\nu+m)!}A^{(m-\mu)}_{\alpha_0\cdots\alpha_n}A^{(\mu)}_{\beta_0\cdots\beta_n}\cdots\cdots(2,7)$$

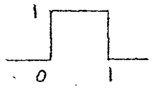
$$\overline{x}_m = m-\sum_{\mu=0}^{m-1}(-)^{\mu}\binom{m}{\mu}\sum_{\alpha}^{m-\mu}\sum_{\beta}^{\mu}\frac{(m-\mu)^{\Sigma\nu\alpha_\nu+\Sigma\nu\beta_\nu+m+1}}{(\Sigma\nu\alpha_\nu+\Sigma\nu\beta_\nu+m+1)!}A^{(m-\mu)}_{\alpha_0\cdots\alpha_n}A^{(\mu)}_{\beta_0\cdots\beta_n}$$

$$\cdots\cdots(2,8)$$

となる。

III. 簡単な例

1. 矩形分布　$\varphi(x) = E_0(x) - E_0(x-1)$



x	$\varphi^{(0)}(x)$	$\varphi^{(\nu)}(x)(\nu > 0)$
0	1	0
1	1	0

$$\alpha_0 = m-\mu,\quad \alpha_\nu = 0\ (\nu > 0)\ ;\ \beta_0 = \mu,\ \beta_\nu = 0\ (\nu > 0)$$

であるから，　$A^{(m-\mu)}_{\alpha_0} = 1,\quad A^{(\mu)}_{\beta_0} = 1$.

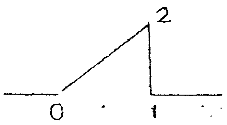
$$\varphi_m(x) = \sum_{\mu=0}^{m}{}_{,}(-1)^{\mu} E_0(x-\mu)\binom{m}{\mu}\frac{(x-\mu)^{m-1}}{(m-1)!}$$

$$f_m(x) = \sum_{\mu=0}^{m}{}_{,}(-1)^{\mu} E_0(x-\mu)\binom{m}{\mu}\frac{(x-\mu)^{m}}{m!}$$

$$\bar{x}_m = m - \sum_{\mu=0}^{m-1}{}_{,}(-)^{\mu}\binom{m}{\mu}\frac{(m-\mu)^{m+1}}{(m+1)!} = \frac{m}{2}$$

となり，　宇野　の求めたものと同じ．

2. 直角三角形分布　$\varphi(x) = 2x\left[E_0(x) - E_0(x-1)\right]$



x	$\varphi^{(0)}(x)$	$\varphi^{(1)}(x)$
0	0	2
1	2	2

$$\alpha_0 = 0,\ \alpha_1 = m-\mu,\ \alpha_\nu = 0\ (\nu > 1)\ ;\ \beta_0 = \mu-\beta,\ \beta_1 = \beta,\ \beta_\nu = 0\ (\nu > 1)$$

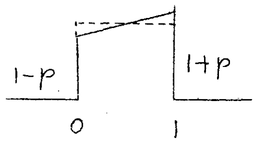
$$A^{(m-\mu)}_{\alpha_0\alpha_1} = 2^{m-\mu},\quad A^{(\mu)}_{\beta_0\beta_1} = \binom{\mu}{\beta}2^{\mu}$$

$$\varphi_m(x) = \sum_{\mu=0}^{m} (-)^{\mu}\binom{m}{\mu} E_0(x-\mu)\, 2^m \sum_{\beta=0}^{\mu}\binom{\mu}{\beta}\frac{(x-\mu)^{2m-\mu+\beta-1}}{(2m-\mu+\beta-1)!}$$

$$f_m(x) = \sum_{\mu=0}^{m} (-)^{\mu}\binom{m}{\mu} E_0(x-\mu)\, 2^m \sum_{\beta=0}^{\mu}\binom{\mu}{\beta}\frac{(x-\mu)^{2m-\mu+\beta}}{(2m-\mu+\beta)!}$$

$$\bar{x}_m = m - \sum_{\mu=0}^{m-1} (-)^{\mu}\binom{m}{\mu} 2^m \sum_{\beta=0}^{\mu}\binom{\mu}{\beta}\frac{(m-\mu)^{2m-\mu+\beta+1}}{(2m-\mu+\beta+1)!} = \frac{2m}{3}$$

3. $\varphi(x) = (1-p+2px)(E_0(x) - E_0(x-1))$



x	$\varphi^{(0)}(x)$	$\varphi^{(1)}(x)$
0	$1-p$	$2p$
1	$1+p$	$2p$

$\alpha_0+\alpha_1 = m-\mu,\ \alpha_1=\alpha,\ \alpha_0 = m-\mu-\alpha\ ;\ \beta_0+\beta_1=\mu,\ \beta_1=\beta,\ \beta_0=\mu-\beta$

$A^{(m-\mu)}_{\alpha_0\alpha_1} = \binom{m-\mu}{\alpha}(1-p)^{m-\mu-\alpha}(2p)^{\alpha}\ ;\ A^{(\mu)}_{\beta_0\beta_1} = \binom{\mu}{\beta}(1+p)^{\mu-\beta}(2p)^{\beta}$

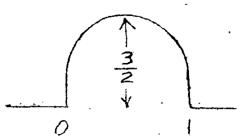
$$\varphi_m(x) = \sum_{\mu=0}^{m}(-)^{\mu} E_0(x-\mu)\binom{m}{\mu}\sum_{\alpha=0}^{m-\mu}\sum_{\beta=0}^{\mu}\binom{m-\mu}{\alpha}\binom{\mu}{\beta}(1-p)^{m-\mu-\alpha}(1+p)^{\mu-\beta}(2p)^{\alpha+\beta}\frac{(x-\mu)^{\alpha+\beta+m-1}}{(\alpha+\beta+m-1)!}$$

$$f_m(x) = \sum_{\mu=0}^{m}(-)^{\mu} E_0(x-\mu)\binom{m}{\mu}\sum_{\alpha=0}^{m-\mu}\sum_{\beta=0}^{\mu}\binom{m-\mu}{\alpha}\binom{\mu}{\beta}(1-p)^{m-\mu-\alpha}(1+p)^{\mu-\beta}(2p)^{\alpha+\beta}\frac{(x-\mu)^{\alpha+\beta+m}}{(\alpha+\beta+m)!}$$

$$\overline{x}_m = m - \sum_{\mu=0}^{m} (-)^{\mu} \binom{m}{\mu} \sum_{\alpha=0}^{m-\mu} \sum_{\beta=0}^{\mu} \binom{m-\mu}{\alpha} \binom{\mu}{\beta} (1-p)^{m-\mu-\alpha} (1+p)^{\mu-\beta} (2p)^{\alpha+\beta}$$

$$\frac{(m-\mu)^{\alpha+\beta+m+1}}{(\alpha+\beta+m+1)!}$$

4. $\varphi(x) = 6\,x(1-x)\,(E_0(x) - E_0(x-1))$



x	$\varphi^{(0)}(x)$	$\varphi^{(1)}(x)$	$\varphi^{(2)}(x)$
0	0	6	−12
1	0	−6	−12

$\alpha_0 = 0,\ \alpha_1 + \alpha_2 = m-\mu,\ \sum \nu\alpha_\nu = \alpha_1 + 2\alpha_2 = m-\mu+\alpha,\ \alpha_2 = \alpha,\ \alpha_1 = m-\mu-\alpha;$

$\beta_0 = 0,\ \beta_1 + \beta_2 = \mu,\ \sum \nu\beta_\nu = \beta_1 + 2\beta_2 = \mu+\beta,\ \beta_2 = \beta,\ \beta_1 = \mu-\beta.$

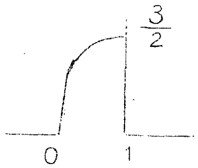
$$A^{(m-\mu)}_{\alpha_0\alpha_1\alpha_2} = (-)^{\alpha} \binom{m-\mu}{\alpha} 6^{m-\mu} 2^{\alpha}\ ;\ A^{(\mu)}_{\beta_0\beta_1\beta_2} = (-)^{\mu} \binom{\mu}{\beta} 6^{\mu} 2^{\beta}$$

$$\varphi_m(x) = \sum_{\mu=0}^{m} E_0(x-\mu)\, 6^m \binom{m}{\mu} \sum_{\alpha=0}^{m-\mu} \sum_{\beta=0}^{\mu} (-)^{\alpha} \binom{m-\mu}{\alpha} \binom{\mu}{\beta} \frac{2^{\alpha+\beta}(x-\mu)^{\alpha+\beta+2m-1}}{(\alpha+\beta+2m-1)!}$$

$$f_m(x) = \sum_{\mu=0}^{m} E_0(x-\mu)\, 6^m \binom{m}{\mu} \sum_{\alpha=0}^{m-\mu} \sum_{\beta=0}^{\mu} (-)^{\alpha} \binom{m-\mu}{\alpha} \binom{\mu}{\beta} \frac{2^{\alpha+\beta}(x-\mu)^{\alpha+\beta+2m}}{(\alpha+\beta+2m)!}$$

$$\overline{x}_m = m - 6^m \sum_{\mu=0}^{m} \binom{m}{\mu} \sum_{\alpha=0}^{m-\mu} \sum_{\beta=0}^{\mu} (-)^{\alpha} \binom{m-\mu}{\alpha} \binom{\mu}{\beta} \frac{2^{\alpha+\beta}(m-\mu)^{\alpha+\beta+2m+1}}{(\alpha+\beta+2m+1)!}$$

5. $\varphi(x)=\left(3x-\frac{3x^2}{2!}\right)\left(E_0(x)-E_0(x-1)\right)$



x	$\varphi^{(0)}(x)$	$\varphi^{(1)}(x)$	$\varphi^{(2)}(x)$
0	0	3	-3
1	$\frac{3}{2}$	0	-3

$\alpha_0=0,\ \alpha_1=m-\mu-\alpha,\ \alpha_2=\alpha\ ;\ \beta_0=\mu-\beta,\ \beta_1=0,\ \beta_2=\beta$

$$A^{(m-\mu)}_{\alpha_0\alpha_1\alpha_2}=\binom{m-\mu}{\alpha}3^{m-\mu-\alpha}(-3)^{\alpha}=(-)^{\alpha}\binom{m-\mu}{\alpha}3^{m-\mu}$$

$$A^{(\mu)}_{\beta_0\beta_1\beta_2}=\binom{\mu}{\beta}\left(\frac{3}{2}\right)^{\mu-\beta}(-3)^{\beta}=(-)^{\beta}\binom{\mu}{\beta}3^{\mu}2^{-(\mu-\beta)}$$

$$\varphi_m(x)=\sum_{\mu=0}^{m}(-)^{\mu}E_0(x-\mu)\cdot 3^m\binom{m}{\mu}\sum_{\alpha=0}^{m-\mu}\sum_{\beta=0}^{\mu}(-)^{\alpha+\beta}\binom{m-\mu}{\alpha}\binom{\mu}{\beta}\frac{(x-\mu)^{\alpha+\beta-\mu+2m-1}}{2^{\mu-\beta}(\alpha+\beta-\mu+2m-1)!}$$

$$f_m(x)=\sum_{\mu=0}^{m}(-)^{\mu}E_0(x-\mu)3^m\binom{m}{\mu}\sum_{\alpha=0}^{m-\mu}\sum_{\beta=0}^{\mu}(-)^{\alpha+\beta}\binom{m-\mu}{\alpha}\binom{\mu}{\beta}\frac{(x-\mu)^{\alpha+\beta-\mu+2m}}{2^{\mu-\beta}(\alpha+\beta-\mu+2m)!}$$

$$\bar{x}_m=m-3^m\sum_{\mu=0}^{m-1}(-)^{\mu}\binom{m}{\mu}\sum_{\alpha=0}^{m-\mu}\sum_{\beta=0}^{\mu}(-)^{\alpha+\beta}\binom{m-\mu}{\alpha}\binom{\mu}{\beta}\frac{(m-\mu)^{\alpha+\beta-\mu+2m+1}}{(\alpha+\beta-\mu+2m+1)!}$$

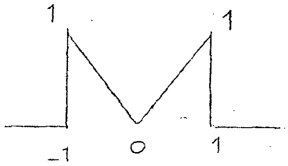
Ⅳ. 部分區間で高次多項式であらわされる密度函数の場合

密度函数が有限個の部分區間でそれぞれ高次多項式であら

わされる場合には，有限の不連続があつても，各区分点での衝撃函数をつかつて部分密度函数の和としてあらわせば，上の方法と全く同じように計算をすゝめて行くことができる。

ただ計算はかなりわずらわしくなるであろう。一般に計算することをやめて簡単な例をあげるにとゞめる。

1．M形分布　$\varphi(x) = -x(E_0(x+1) - E_0(x)) + x(E_0(x) - E_0(x-1))$



$$= E_0(x+1)(1-(x+1)) + E_0(x)\cdot 2x - E_0(x-1)(1+(x-1))$$

$$\psi(it) = e^{-it}\left(\frac{-1}{it} - \frac{(-1)^2}{(it)^2}\right) + 2\,\frac{(-1)^2}{(it)^2} - e^{it}\left(\frac{-1}{it} + \frac{(-1)^2}{(it)^2}\right)$$

であるから

$$\varphi_m(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dt \sum_{p.q.r}^{m} (-)^r \frac{m!}{p!q!r!} 2^q e^{-it(x+p-r)} \sum_{\alpha=0}^{p}\sum_{\beta=0}^{r} (-)^\alpha \binom{p}{\alpha}\binom{r}{\beta} \frac{(-1)^{\alpha+\beta+q+m}}{(it)^{\alpha+\beta+q+m}}$$

$$= \sum_{p.q.r}^{m} (-)^r \frac{m!}{p!q!r!} 2^q E_0(x+p-r) \sum_{\alpha=0}^{p}\sum_{\beta=0}^{r} (-)^\alpha \binom{p}{\alpha}\binom{r}{\beta} \frac{(x+p-r)^{\alpha+\beta+q+m-1}}{(\alpha+\beta+q+m-1)!}$$

$$f_m(x) = \sum_{p.q.r}^{m} (-)^r \frac{m!}{p!q!r!} 2^q E_0(x+p-r) \sum_{\alpha=0}^{p}\sum_{\beta=0}^{r} (-)^\alpha \binom{p}{\alpha}\binom{r}{\beta} \frac{(x+p-r)^{\alpha+\beta+q+m}}{(\alpha+\beta+q+m)!}$$

こゝに $\sum\limits_{p.q.r}^{m}$ は $p+q+r=m$ である p, q, r のあらゆる組合せの総和の記号である。

たとえば $m=2$ の場合には

$$\varphi_2(x)=E_0(x+2)\left\{\frac{x+2}{1!}-2\frac{(x+2)^2}{2!}+\frac{(x+2)^3}{3!}\right\}+E_0(x+1)\cdot 4\left\{\frac{(x+1)^2}{2!}-\frac{(x+1)^3}{3!}\right\}$$

$$+E_0(x)\left\{-2\frac{x}{1!}+6\frac{x^3}{2!}\right\}-E_0(x-1)\cdot 4\left\{\frac{(x-1)^2}{2!}+\frac{(x-1)^3}{3!}\right\}$$

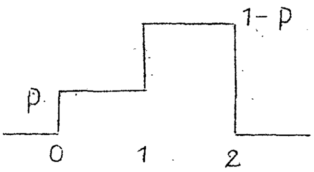
$$+E_0(x-2)\left\{\frac{x-2}{1!}+2\frac{(x-2)^2}{2!}+\frac{(x-2)^3}{3!}\right\}$$

$$f_2(x)=E_0(x+2)\left\{\frac{(x+2)^2}{2!}-2\frac{(x+2)^3}{3!}+\frac{(x+2)^4}{4!}\right\}+E_0(x+1)\cdot 4\left\{\frac{(x+1)^3}{3!}-\frac{(x+1)^4}{4!}\right\}$$

$$+E_0(x)\left\{-2\frac{x^2}{2!}+6\frac{x^4}{4!}\right\}-E_0(x-1)\cdot 4\left\{\frac{(x-1)^3}{3!}+\frac{(x-1)^4}{4!}\right\}$$

$$+E_0(x-2)\left\{\frac{(x-2)^2}{2!}+2\frac{(x-2)^3}{3!}+\frac{(x-2)^4}{4!}\right\}$$

2. 階段分布



$$\varphi(x)=p(E_0(x)-E_0(x-1)]+(1-p)[E_0(x-1)-E_0(x-2)]$$

$$=pE_0(x)+(1-2p)E_0(x-1)-(1-p)E_0(x-2)$$

$$\psi(it)=p\frac{(-1)}{it}+(1-2p)e^{it}\frac{(-1)}{it}-(1-p)e^{it2}\frac{(-1)}{it}$$

$$\varphi_m(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}dt\sum_{\alpha_0\alpha_1\alpha_2}^{m}(-)^{\alpha_2}\frac{m!}{\alpha_0!\alpha_1!\alpha_2!}p^{\alpha_0}(1-2p)^{\alpha_1}(1-p)^{\alpha_2}e^{-it(x-\alpha_1-2\alpha_2)}\frac{(-1)^m}{(it)^m}$$

$$= \sum_{\alpha_0 \alpha_1 \alpha_2}^{m} (-)^{\alpha_2} \frac{m!}{\alpha_0! \alpha_1! \alpha_2!} p^{\alpha_0} (1-2p)^{\alpha_1} (1-p)^{\alpha_2} E_0 (x-\alpha_1-2\alpha_2) \frac{(x-\alpha_1-2\alpha_2)^{m-1}}{(m-1)!}$$

$$f_m(x) = \sum_{\alpha_0 \alpha_1 \alpha_2}^{m} (-)^{\alpha_2} \frac{m!}{\alpha_0! \alpha_1! \alpha_2!} p^{\alpha_0} (1-2p)^{\alpha_1} (1-p)^{\alpha_2} E_0 (x-\alpha_1-2\alpha_2) \frac{(x-\alpha_1-2\alpha_2)^{m}}{m!}$$

ここに $\sum\limits_{\alpha_0 \alpha_1 \alpha_2}^{m}$ は $\alpha_0+\alpha_1+\alpha_2=m$ である $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$ のあらゆる組合せの総和の記号である。

たとえば，$m=2, 3$ の場合には次のようになる。

$$\varphi_2(x) = E_0(x) \cdot p^2 x + E_0(x-1) \cdot 2p(1-2p)(x-1)$$

$$+ E_0(x-2)\left[(1-2p)^2 - 2p(1-p)\right](x-2)$$

$$- E_0(x-3) \cdot 2(1-2p)(1-p)(x-3) + E_0(x-4) \cdot (1-p)^2 (x-4)$$

$$\varphi_2(0) = 0, \quad \varphi_2(1) = p^2, \quad \varphi_2(2) = 2p(1-p), \quad \varphi_2(3) = (1-p)^2$$

$$\varphi_2(4) = 0$$

$$\varphi_3(x) = E_0(x) \cdot p^3 \frac{x^2}{2!} + E_0(x-1) \cdot 3p^2(1-2p) \frac{(x-1)^2}{2!}$$

$$+ E_0(x-2)\left[-3p^2(1-p) + 3p(1-2p)^2\right] \frac{(x-2)^2}{2!}$$

$$+ E_0(x-3)\left[-6p(1-2p)(1-p) + (1-2p)^3\right] \frac{(x-3)^2}{2!}$$

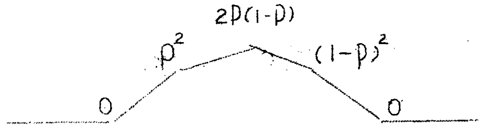
$$+ E_0(x-4)\left[3p(1-p)^2 - 3(1-2p)^2(1-p)\right] \frac{(x-4)^2}{2!}$$

$$+ E_0(x-5) \cdot 3(1-2p)(1-p)^2 \frac{(x-5)^2}{2!} - E_0(x-6) \cdot (1-p)^3 \frac{(x-6)^2}{2!}$$

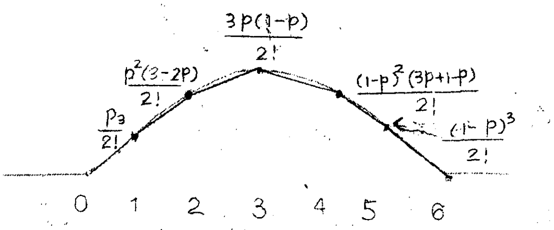
α_0	2	0	0	1	1	0
α_1	0	2	0	1	0	1
α_2	0	0	2	0	1	1
$\alpha_1+2\alpha_2$	0	2	4	1	2	3

$m = 2$

$$\begin{aligned}\varphi_2(x) = {} & E_0(x)\cdot p^2 x + E_0(x-1)\, 2p(1-2p)(x-1) \\ & + E_0(x-2)\left((1-2p)^2 - 2p(1-p)\right)(x-2) \\ & - E_0(x-3)\, 2(1-2p)(1-p)(x-3) \\ & + E_0(x-4)(1-p)^2(x-4)\end{aligned}$$



α_0	3	2	2	1	1	1	0	0	0	0
α_1	0	0	0	2	1	0	3	2	1	0
α_2	0	0	1	0	1	2	0	1	2	3
$\alpha_1+2\alpha_2$	0	1	2	2	3	4	3	4	5	6



$$
\begin{aligned}
\varphi_3(x) = {} & E_0(x)\, p^3 \frac{x^2}{2!} + E_0(x-1)\, 3p^2(1-2p) \frac{(x-1)^2}{2!} \\
& + E_0(x-2)\left[-3p^2(1-p) + 3p(1-2p)^2\right] \frac{(x-2)^2}{2!} \\
& + E_0(x-3)\left[-6p(1-2p)(1-p) + (1-2p)^3\right] \frac{(x-3)^2}{2!} \\
& + E_0(x-4)\left[3p(1-p)^2 - 3(1-2p)^2(1-p)\right] \frac{(x-4)^2}{2!} \\
& + E_0(x-5)\; 3(1-2p)(1-p)^2 \frac{(x-5)^2}{2!} \\
& - E_0(x-6)(1-p)^3 \frac{(x-6)^2}{2!}
\end{aligned}
$$