(24) 劣調和函数に就いて

鍋島　一郎

Privaloff は

「　$u(z)$ が上半平面で劣調和で，実軸上のすべての有限点 z^* に於て

$$\varlimsup_{z\to z^*} u(z) \leqq 0$$

とすると，半円 $|z| = r$ 上の $u(z)$ の上限を $M(r)$ とすると，

① $M(r)$ は $r\to\infty$ の時，$\varliminf \dfrac{M(r)}{r} > 0$ なる程速かに $+\infty$ に収斂するか，

又は，

② すべての点で $u(z) \leqq 0$ となる。」

事を証明してゐるが，ここでは，これをもう少しくわしくしらべて次の定理を得た。

［定理］　$u(z)$　$(z = x + iy)$　が $y > 0$ で劣調和とし，実軸上の有限点 z^* に於て

$$\varlimsup_{z\to z^*} u(z) \leqq 0$$

とすると，

$$\overset{+}{u}(z) = \frac{u+|u|}{2}$$

とおき

$$m(\rho) = \int_0^{\pi} \overset{+}{u}(\rho e^{i\theta}) \sin\theta \, d\theta$$

とおくと，

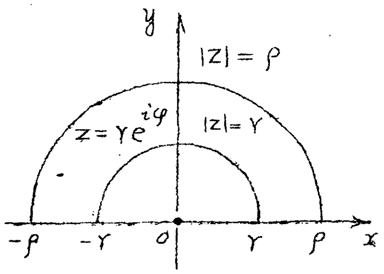
① $\quad r < \rho$ で $\quad \dfrac{m(r)}{r} \leqq \dfrac{m(\rho)}{\rho}$

② $\quad \displaystyle\lim_{\rho\to\infty} \frac{m(\rho)}{\rho} = C \geqq 0$ が存在する。

③. $\quad C > 0$ の時には， $\quad u(z) \leqq \dfrac{2C}{\pi} y$

$\quad C = 0$ の時には， $\quad u(z) \leqq 0$

【証　明】



$z = re^{i\varphi}$ とし，$r < \rho$ で $|z| = \rho$，$y > 0$ なる半円を考える

$$\overset{+}{u}(z) \geqq u(z)$$

で $\overset{+}{u}(z)$ は $y > 0$ で

劣調和であり，

$$\overline{\lim_{z \to z^*}}\ u(z) \leqq 0 \quad 故$$

$y < \delta$ で

$$\overset{+}{u}(z) \leqq \varepsilon \quad となる。$$

故に，$\overset{+}{u}(z)$ の半円内に於ける THE BEST HARMONIC MAJORANT $H_\rho(z)$ は $|z| = \rho$，$y > 0$ 上で $\overset{+}{u}(z)$ なる値をとり，$y = 0$ 上で 0 なる値をとる POISSON 積分で表わされる。

これは $|z| = \rho$，$y > 0$ 上で $\overset{+}{u}(z)$ が UPPER SEMI CONTINUOUS であるから，CONTINUOUS な減少函数列 $\varphi_n(z)$ で近似し得，$\varphi_n(z)$ に対する上記の POISSON 積分 $H_n(z)$ を調和函数の接続により作り，$n \to \infty$ ならしめると求められる。

即ち

$$H_n(re^{i\varphi}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi \varphi_n(\rho e^{i\theta}) \frac{\rho^2 - r^2}{\rho^2 + r^2 - 2\rho r\cos(\theta - \varphi)} d\theta$$

$$- \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^0 \varphi_n(\rho e^{-i\theta}) \frac{\rho^2 - r^2}{\rho^2 + r^2 - 2\rho r\cos(\theta - \varphi)} d\theta$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \varphi_n(\rho e^{i\theta}) \frac{(\rho^2 - r^2)2\rho r\sin\theta\sin\varphi\, d\theta}{(\rho^2 + r^2 - 2\rho r\cos(\theta - \varphi))(\rho^2 + r^2 - 2\rho r\cos(\theta + \varphi))}$$

ここで $n \to \infty$ にすると，$\varphi_n \searrow u(\rho e^{i\theta})$

で　積分内の因子は正であるから

$$H_\rho(re^{i\varphi}) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \overset{+}{u}(\rho e^{i\theta}) \frac{(\rho^2-r^2)\,2\rho r \sin\theta \sin\varphi \, d\theta}{(\rho^2+r^2-2\rho r\cos(\theta-\varphi))(\rho^2+r^2-2\rho r\cos(\theta+\varphi))}$$

となる。

故に，

$$u(re^{i\varphi}) \leqq \overset{+}{u}(re^{i\varphi}) \leqq H_\rho(re^{i\varphi})$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \overset{+}{u}(\rho e^{i\theta}) \frac{(\rho^2-r^2)\,2\rho r \sin\theta \sin\varphi \, d\theta}{(\rho^2+r^2-2\rho r\cos(\theta-\varphi))(\rho^2+r^2-2\rho r\cos(\theta+\varphi))}$$

$$\therefore \quad \overset{+}{u}(re^{i\varphi}) \leqq \frac{2r\sin\varphi}{\pi}(1+\varepsilon(\rho))\frac{1}{\rho}\int_0^\pi \overset{+}{u}(\rho e^{i\theta})\sin\theta \, d\theta$$

即ち　$u(re^{i\varphi}) \leqq \overset{+}{u}(re^{i\varphi}) \leqq \dfrac{2r\sin\varphi}{\pi}(1+\varepsilon(\rho))\dfrac{m(\rho)}{\rho} \cdots$ ①

ここに，$\varepsilon(\rho)$ は $\rho \to \infty$ の時，φ に関して一様に 0 に収斂する。

① の両辺に $\dfrac{\sin\varphi}{r}$ を掛けて 0 から π まで積分すると，

$$\frac{1}{r}\int_0^\pi \overset{+}{u}(re^{i\varphi})\sin\varphi \, d\varphi \leqq \int_0^\pi \frac{2\sin^2\varphi}{\pi} d\varphi\,(1+2(\rho))\frac{m(\rho)}{\rho}$$

$$\int_0^\pi \sin^2\varphi \, d\varphi = \frac{\pi}{2}$$

であるから，

$$\frac{m(r)}{r} \leqq (1+\varepsilon(\rho))\frac{m(\rho)}{\rho}$$

$r<\rho$ で r を十分大にすれば $\varepsilon(\rho)$ は任意に小さくなるから，

$$\frac{m(r)}{r} \leqq \frac{m(\rho)}{\rho}$$

となる。

依って

$$\lim_{\rho\to\infty}\frac{m(\rho)}{\rho} = c \geqq 0$$ が存在する。

$c>0$ とすると ㋑ 式で $\rho\to\infty$ にすると，

$$u(z) \leqq \frac{2c}{\pi}y$$

となる。

$c=0$ とすると，㋑ 式から $u(z)\leqq 0$

となる。　　　　　　　　　　　　　　（証　終）

【注　意】　$u(z)$として，$f(z)$ が正則なる時，$|f(z)|$，又は $\log|f(z)|$ 等を用いれば既知の定理を得る。