② 相関と利用する推定法

遠藤 健児

二変量の有限母集團 $\{(X_i, Y_i);\ i=1,2,\cdots\cdots,N\}$ からの大さnの任意標本 $\{(x_\alpha, y_\alpha);\ \alpha=1,2,\cdots\cdots,n\}$ に依ってXの母平均$\bar{X}$とYに関する何等かの知識を使って推定する問題を考える。

§1 层化しない場合

先ずYを用いないときは線型最良不偏推定量として標本平均

$$(1,1)\qquad \bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{\alpha=1}^{n} x_\alpha$$

が用いられる。Yの母平均$\bar{Y}$が既知の場合には

(1, 2) $$\bar{x}_r = \frac{\bar{x}}{\bar{y}} \bar{Y}$$ (ratio estimate)

(1, 3) $$\bar{x}_l = \bar{x} \mp (\bar{y} - \bar{Y})$$

（母相関係数ρが>0ならば−を，<0ならば＋をとる）などが用いられる。（1, 3）はx_α, y_αの一次形式の統計量であるが、一般にx_α, y_αの一次形式統計量で，$\bar{X}$の不偏推定量で且つ分散が最小となるもの（即ち線型最良不偏推定量）を求めると

(1, 4) $$\bar{x}_\beta = \bar{x} - \beta(\bar{y} - \bar{Y})$$ (regression estimate)

となる。此処でβはXのYに対する母回帰係数である。

$\bar{x}_r$は一般に不偏ではなく、母変異係数をV_X，V_Yとすれば

(1, 5) $$\mathcal{E}(\bar{x}_r) \doteqdot \bar{X}\left\{1 + \frac{1}{n}(V_Y^2 - \rho V_X V_Y)\right\}$$

となる。

又各推定量の分散（$\bar{x}_r$については$\bar{X}$からの平均自乗誤差）は，

(1, 6) $$\sigma_{\bar{x}}^2 = \frac{N-n}{N-1}\frac{1}{n}\sigma_X^2$$ （σ_X^2は母分散）

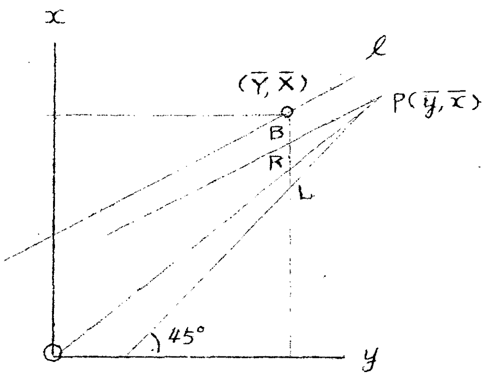
(1, 7) $$M.S.E.\,\bar{x}_r \doteqdot \sigma_{\bar{x}}^2\left\{(1-\rho^2) + \left(\rho - \frac{\bar{X}}{\bar{Y}}\frac{\sigma_Y}{\sigma_X}\right)^2\right\}$$

(1, 8) $$\sigma_{\bar{x}_l}^2 = \sigma_{\bar{x}}^2\left\{(1-\rho^2) + \left(|\rho| - \frac{\sigma_Y}{\sigma_X}\right)^2\right\}$$

(1, 9) $$\sigma_{\bar{x}_\beta}^2 = \sigma_{\bar{x}}^2(1-\rho^2)$$

となる。今標本点$P = (\bar{y}, \bar{x})$を平面上にあらわすとその平均点$(\bar{Y}, \bar{X})$を通って最小自乗法的回帰直線lが存在しその勾配は

$$\beta = \frac{\sigma_X}{\sigma_Y}$$



である。
即ち ℓ は母回帰直線と一致する。
このとき $\overline{x}_\ell, \overline{x}_r, \overline{x}_\beta$ は左図に於るL，R，Bの縦坐標で與えられる。
（PB‖ℓ としてある。）
以上の考察によって原理的には $\overline{x}_\beta$ が最もよい推定量であることが分るのであるが、実際には母回帰係数 β は未知の量であって（4）式中の β としてはその推定量である統計量を用いなければならない。

従ってその統計量の如何に依って一般には偏倚が生じ、その平均自乗誤差は（9）に或る項がつけ加わったものとなる。

例えば β として標本回帰係数を用いるときは母集団の回帰が線型であるとの假定の下で不偏となりその分散はほゞ

$$\sigma_{\overline{x}}^2 (1-\rho^2)(1+\frac{1}{n})$$

で與えられる。（Cochran: Sampling theory when Sampling units are of unequal sizes.）

もう一つの例は、§3で述べることにする。

§2. 戸化の場合

戸 h に於る前節に対応する母数及び統計量を添字 h をつけて表わすことにすれば（1,1），（1,2），（1,4）に対応して

(2,1) $\bar{x} = \frac{1}{N} \sum N_h \bar{x}_h = \frac{1}{N} \sum_h \frac{N_h}{n_h} \sum_\alpha x_{h\alpha}$

(2,2) $\bar{x}_r = \frac{\bar{x}}{\bar{y}} \bar{Y} = \frac{\sum N_h \bar{x}_h}{\sum N_h \bar{y}_h} \bar{Y}$

(2,3) $\bar{x}_\beta = \frac{1}{N} \sum N_h \{ \bar{x}_h - \beta_h (\bar{y}_h - \bar{Y}_h) \}$

或は、戸毎の *ratio estimate* を合成した

(2,2)′ $\bar{x}'_r = \frac{1}{N} \sum N_h \bar{Y}_h \frac{\bar{x}_h}{\bar{y}_h}$

を得る。

此処で $\bar{x}_\beta$ は $\bar{Y}_h$ がいづれも既知である場合の $x_{h\alpha}$, $y_{h\alpha}$ から成る線型最良不偏推定量となっている。

各々の分散又は平均自乗誤差は

(2,4) $\sigma^2_{\bar{x}} = \frac{1}{N^2} \sum N_h^2 \frac{N_h - n_h}{N_h - 1} \frac{1}{n_h} \sigma^2_{hx}$

(2,5) $M.S.E.\bar{x}_r \fallingdotseq \sigma^2_{\bar{x}} - 2\bar{\rho}\sigma_{\bar{x}}\sigma_{\bar{y}}\frac{\bar{X}}{\bar{Y}} + \sigma^2_{\bar{y}}\frac{\bar{X}^2}{\bar{Y}^2}$ （$\bar{\rho}$ は $\bar{x}$ と $\bar{y}$ との相関係数）

$$= \frac{1}{N^2} \sum N_h^2 \frac{N_h - n_h}{N_h - 1} \frac{1}{n_h} \sigma^2_{hx} \left\{ (1-\rho_h^2) + \left(\rho_h - \frac{\bar{X}}{\bar{Y}} \frac{\sigma_{hY}}{\sigma_{hX}}\right)^2 \right\}$$

(2,5)′ $M.S.E.\bar{x}'_r \fallingdotseq \frac{1}{N^2} \sum N_h^2 \frac{N_h - n_h}{N_h - 1} \frac{1}{n_h} \sigma^2_{hx} \left\{ (1-\rho_h^2) + \left(\rho_h - \frac{\bar{X}_h}{\bar{Y}_h} \frac{\sigma_{hY}}{\sigma_{hX}}\right)^2 \right\}$

(2,6) $\sigma^2_{\bar{x}_\beta} = \frac{1}{N^2} \sum N_h^2 \frac{N_h - n_h}{N_h - 1} \frac{1}{n_h} \sigma^2_{hx} (1 - \rho_h^2)$

となる。（2,5）と（2,5)′との大小は一般に定まらないが、いづれも近似式であるから省略の少い（2,5）の方が扱いよいと云う意味で $\bar{x}_r$ の方が無難である。

しかしいづれにしても（2,5）或は（2,6）式の｛ ｝が1より小さくならなければ効果はないわけである。

（2,4),（2,5),（2,6）と比較すれば原理的には $\bar{x}_\beta$ が最も

よい

よいことになり，$\bar{x}_\beta$ を用いるときの層化の control は σ_{hx} でなく $\sigma_{hx}\sqrt{1-\rho_h^2}$ を用いることになる。

従って層間の分散を大きく，σ_{hx} を小さくすると云う考慮の外に $|\rho_h|$ を大きくする様に層化を行えばよいわけである。

又，標本の割当は Neyman の方法に対応するものは

$$(2,7) \qquad n_h = n\frac{N_h\sigma_{hx}\sqrt{1-\rho_h^2}}{\sum N_h\sigma_{hx}\sqrt{1-\rho_h^2}}$$

で示され，この場合の分散は

$$(2,8) \qquad \sigma_{\bar{x}_\beta}^2 = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{N^2}\sum N_h\sigma_{hx}\sqrt{1-\rho_h^2}\right)^2 - \frac{1}{N^2}\sum N_h\sigma_{hx}^2(1-\rho_h^2)$$

となる。[1] 次に $\bar{x}_\beta$ に関して層化の効果を検討するために (1,6) をかきかえた

$$(2,9) \qquad N^2V_1 = N^2\sigma_{\bar{x}_\beta}^2 = N\left(\frac{N}{n}-1\right)\sigma_x^2(1-\rho^2)$$

と (2,4) に於て $\frac{N_h}{n_h} = \frac{N}{n}$ とおいた（比例抽出法）

$$(2,10) \qquad N^2V_2 = \left(\frac{N}{n}-1\right)\sum N_h\sigma_{hx}^2(1-\rho_h^2)$$

と (2,8) をかきかえた

$$(2,11) \qquad N^2V_3 = \frac{1}{n}\left(\sum N_h\sigma_{hx}\sqrt{1-\rho_h^2}\right)^2 - \sum N_h\sigma_{hx}^2(1-\rho_h^2)$$

との大小を比較する。先づ

$$N^2(V_2-V_3) = \frac{1}{n}\sum_{h<h'}N_hN_{h'}\left(\sigma_{hx}\sqrt{1-\rho_h^2} - \sigma_{h'x}\sqrt{1-\rho_{h'}^2}\right)^2$$

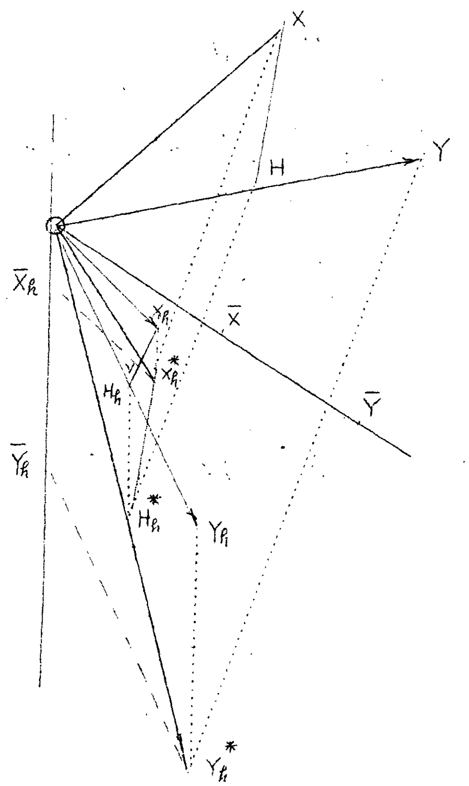
であることが容易に示され従ってその効果はこの式の右辺によってはかられる。[2] (Deming: Allocation in stratified sampling，講究録：第三巻第15号）次に

1） 以下 $\frac{1}{N}$ は無視出来る量と考えている。

2） $\overline{V}_2 \geq \overline{V}_3$ であることは（2,8）の成り立ちから明らかである。

$$N^2\overline{V}_1 - N^2\overline{V}_2 = \left(\frac{N}{n}-1\right)\left\{\sum N_h(\bar{X}_h-\bar{X})^2(1-\rho^2)+\sum N_h\sigma_{hx}^2(\rho_h^2-\rho^2)\right\}$$

で各 h について $|\rho_h| \geq |\rho|$ であればたしかに $\overline{V}_1 \geq \overline{V}_2$ であることが分る。一般に $\overline{V}_1 \geq \overline{V}_2$ であることゝ証明される。即ち



N次元 Euclid 空間に於て O を原点とする直交坐標系について

$$X = (X_1-\bar{X}, \text{------------}, X_N-\bar{X})$$

$$Y = (Y_1-\bar{Y}, \text{------------}, Y_N-\bar{Y})$$

$$\overline{X} = (\overline{X}, \text{-----}, \text{------}, \overline{X})$$
$$\overline{Y} = (\overline{Y}, \text{------------}, \overline{Y})$$

とすれば直線 $\overline{X}\ \overline{Y}$ は O を通り

$$\overrightarrow{OX} \perp \overrightarrow{O\overline{X}}, \quad \overrightarrow{OY} \perp \overrightarrow{O\overline{Y}}$$

$$N\sigma_x^2 = \overline{OX}^2, \quad N\sigma_Y^2 = \overline{OY}^2$$

$$\rho = \frac{\overrightarrow{OX} \cdot \overrightarrow{OY}}{\overline{OX} \cdot \overline{OY}} = \cos \angle XOY$$

となることは知られている。従って $\overline{OY}$ から X への直交 vector を $\overrightarrow{HX}$ とすれば

$$\overline{HX}^2 = \overline{OX}^2 (1 - \cos^2 \angle XOY)$$
$$= N\sigma_x^2 (1 - \rho^2)$$

である。次に $(0, 0, \text{---}, 0, X_{k1}, \text{------}, X_{kN_k}, 0, \text{----}, 0)$ から成る部分空間を R_k とすれば P_k は上と同様に R_k で表現出来る。そこで各点の R_k への正射影を * をつけてあらわし

$$X_k = (0, \text{----}, 0, X_{k1} - \overline{X}_k, \text{----}, X_{kN_k} - \overline{X}_k, 0, \text{----}, 0)$$

$$\overline{X}_k = (0, \text{----}, 0, \overline{X}_k - \overline{X}, \text{----}, \overline{X}_k - \overline{X}, 0, \text{----}, 0)$$

とし Y についても同様に Y_k, $\overline{Y}_k$ を定義すれば直線 $\overline{X}_k$, $\overline{Y}_k$ は O を通り

$$\overrightarrow{OX_k^*} = \overrightarrow{O\overline{X}_k} + \overrightarrow{OX_k}, \quad \overrightarrow{OY_k^*} = \overrightarrow{O\overline{Y}_k} + \overrightarrow{OY_k}$$

$$\overrightarrow{OX_k} \perp \overrightarrow{O\overline{X}_k} \qquad \overrightarrow{OY_k} \perp \overrightarrow{O\overline{Y}_k}$$

で且つ H の正射影 H_k^* は $\overline{OY_k^*}$ の上におちる。

故に上と同様に $\overline{OY_k}$ から X_k への直交 vector を $\overline{H_k X_k}$ とすれば

$$\overline{H_k X_k}^2 = N_k \sigma_{kx}^2 (1 - \rho_k^2)$$

である。此処で $\overline{X_k^* H_k^*}$ の $X_k O Y_k$ 平面への正射影を $\overline{X_k \tilde{H}_k}$ とすれば $\tilde{H}_k$ は $\overline{OY_k}$ 上にあって、従って $\overline{X_k H_k} \perp \overline{OY_k}$ であるから

$$\overline{X_k H_k} \leqq \overline{X_k \tilde{H}_k} \leqq \overline{X_k^* H_k^*}$$

一方 $\overline{XH}^2 = \sum \overline{X_k^* H_k^*}^2$

であるから $\overline{XH}^2 \geqq \sum_k \overline{H_k X_k}^2$

即ち $N \sigma_x^2 (1 - \rho^2) \geqq \sum N_k \sigma_{kx}^2 (1 - \rho_k^2)$

$$\therefore \quad V_1 \geqq V_2$$

変量が3以上の場合にも ρ を一つの変量の他に対する重相関係数と考えれば同様の結果が得られる。

§ 3. 相関量に依る推定量

前節と同様に二変量の有限母集團 $\Pi \{ (X_i, Y_i);\ i = 1, 2, \cdots, N \}$ に於て N と Y_i の total Y のみならず σ_Y^2 が既知であるとする。これは同一の調査単位について前回の調査による観測値を Y とするような場合である。

そこで大さ n の任意標本からの統計量

$$(3, 1) \qquad \bar{x}_c = \bar{x} - \frac{\hat{s}_{11}}{\sigma_Y^2} (\bar{y} - \bar{Y})$$

を母平均 $\bar{X}$ の推定量とする。此処に

(3, 2) $$\hat{s}_{11} = \frac{N-1}{N}\frac{1}{n-1}\sum_{\alpha=1}^{n}(x_\alpha-\bar{x})(y_\alpha-\bar{y})$$

は母相関量 $\mu_{11} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(X_i-\bar{X})(Y_i-\bar{Y})$ の不偏推定量であって（appendix 例1））その分散は母数に対して $\frac{1}{N}$ の order 以下の項を省略すれば

(3, 3) $$\sigma_{\hat{s}_{11}}^2 = \frac{1}{n}\mu_{22}-\frac{n-2}{n(n-1)}\rho^2\sigma_X^2\sigma_Y^2+\frac{1}{n(n-1)}\sigma_X^2\sigma_Y^2$$

で與えられる。（appendix 例2））

最初に Π が正規の場合にとって $\bar{x}_c$ の積率を見てみると、このときは $\hat{s}_{11}$ と $\bar{y}$ とは独立に分布するから

$$\mathcal{E}\bar{x}_c = \mathcal{E}\bar{x}-\frac{1}{\sigma_Y^2}\mathcal{E}\hat{s}_{11}\cdot\mathcal{E}(\bar{y}-\bar{Y}) = \bar{X}$$

$$\sigma_{\bar{x}_c}^2 = \mathcal{E}(x-\bar{X})^2-2\mu_{11}\mathcal{E}(\bar{x}-\bar{X})(\bar{y}-\bar{Y})/\sigma_Y^2+\mathcal{E}\hat{s}_{11}^2\cdot\mathcal{E}(\bar{y}-\bar{Y})^2/\sigma_Y^4$$

此処で $\mathcal{E}(\bar{x}-\bar{X})^2 = \frac{1}{n}\sigma_X^2$, $\mathcal{E}(\bar{y}-\bar{Y})^2 = \frac{1}{n}\sigma_Y^2$, $\mathcal{E}(\bar{x}-\bar{X})(\bar{y}-\bar{Y}) = \frac{1}{n}\rho\sigma_X\sigma_Y$

$$\mathcal{E}\hat{s}_{11}^2 = \sigma_{\hat{s}_{11}}^2+\rho^2\sigma_X^2\sigma_Y^2 = \frac{1+\rho^2}{n-1}\sigma_X^2\sigma_Y^2+\rho^2\sigma_X^2\sigma_Y^2$$

であるから

(3, 4) $$\sigma_{\bar{x}_c}^2 = \sigma_{\bar{x}}^2\left\{(1-\rho^2)+\frac{1+\rho^2}{n-1}\right\}$$

となる。一般の場合は

$$\mathcal{E}\bar{x}_c = \bar{X}-\frac{N-n}{N-2}\frac{1}{n}\frac{\mu_{12}}{\sigma_Y^2}$$

(appendix 例3).)

又 $(\bar{x}_c-\bar{X})^2 = (\bar{x}-\bar{X})^2-2\hat{s}_{11}(\bar{x}-\bar{X})(\bar{y}-\bar{Y})/\sigma_Y^2+\hat{s}_{11}^2(\bar{y}-\bar{Y})^2/\sigma_Y^4$

であるが $\mathcal{E}(\bar{x}-\bar{X})^2 = \sigma_{\bar{x}}^2$

$$\mathcal{E}\hat{s}_{11}(\bar{x}-\bar{X})(\bar{y}-\bar{Y}) = \frac{1}{n^2}\left\{\mu_{22}+(n-2)\rho^2\sigma_X^2\sigma_Y^2-\sigma_X^2\sigma_Y^2\right\}$$

$$\mathcal{E}\hat{\beta}_{11}^{2}(\bar{y}-\bar{Y})^{2}=\frac{(n-2)(n-6)}{n^{2}(n-1)}\rho^{2}\sigma_{X}^{-2}\sigma_{Y}^{2}+\frac{1}{n(n-1)}(2\mu_{13}\rho\sigma_{X}\sigma_{Y}+2\mu_{12}^{2}+\mu_{22}\sigma_{Y}^{2})$$

(appendix 例5) 参照、此処で母数に対して $\frac{1}{N}$ 及び $\frac{1}{n^3}$ の order 以下の項を省略してある。

又、分母の $n-1$ は (3,4) に合わせるためにそのまゝにしてある。) であることを使えば

$$(3,5)\qquad \text{M.S.E.}\ \bar{x}_c=\sigma_{\bar{x}}^{2}\left\{(1-\rho^{2})+\frac{M}{n-1}\right\}$$

(但し $M=2\rho\beta_{13}+2\beta_{12}^{2}+2\beta_{22}-3\rho^{2}$, $\beta_{ik}=\mu_{ik}/(\sigma_X^{i}\sigma_Y^{k})$)

を得る。

戸化する場合は各戸での $\bar{x}_c$ を平均するのであるから (2,6) に対応して

$$(3,6)\qquad \text{M.S.E}\ \bar{x}_c=\frac{1}{N^{2}}\sum N_h^{2}\sigma_{\bar{x}_h}^{2}\left\{(1-\rho_h^{2})+\frac{M_h}{n_h-1}\right\}$$

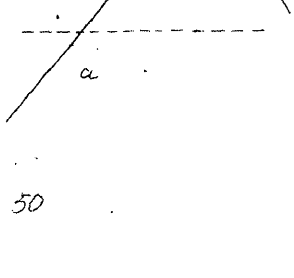
を得る。又このとき

$$\mathcal{E}\bar{x}_c \doteqdot \bar{X}-\frac{1}{N}\sum_h\frac{N_h(N_h-n_h)}{N_h-2}\frac{1}{n_h}\frac{\mu_{h,12}}{\sigma_{hY}^{2}}$$

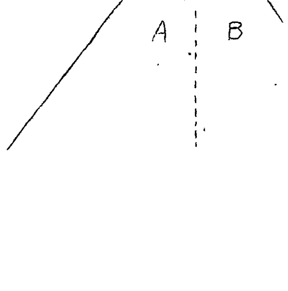
である。こゝに出て来る M は母数が正規型の場合のそれに等しい場合は $1+\rho^2$ となる。

算例。第一表のような母集団を考える。この母集団に対して

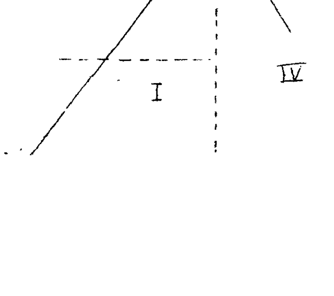
戸化の(一)



戸化の(二)



戸化の(三)



次の三通りの尸化を考える。

それぞれの場合の冊数は第二表のようになる。各々の尸化の場合の control は（一）では σ_{hx} を，（二）では ρ_h を，（三）では σ_{hx}，ρ_h を併せて考慮してある。それぞれ

第　一　表

x \ y	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	f_x
20											5										5
19										2	20	9	2								33
18									5	18	40	17	15	3							98
17								9	15	39	15	37	35	14	4						168
16							6	17	38	15	5	15	13	30	12	1					152
15							3	35	20	9		9	7	15	27	12					137
14						7	15	19	8					3	17	25	4				98
13						8	30	5							6	10	10	1			70
12						11	18									1	20	5			55
11					5	27	3										8	6	1		50
10					12	7											2	18	7		46
9				2	25	6												7	15	5	60
8				10	13	1													4	12	40
7			1	20	5															3	29
6			8	9																	17
5		2	16	2																	20
4		8	6																		14
3	3	12	2																		17
2	11	3																			14
1	6																				6
f_y	20	25	33	43	60	67	75	85	86	83	85	87	72	65	66	49	44	37	27	20	1129

第　二　表

母数	母集団	ア a	ア b	ア A	ア B	ア I	ア II	ア III	ア IV	正規型
大さ	1129	190	939	577	552	190	387	411	141	
$\bar{X}$	13,46	6.34	14.90	12,00	14,97	6.34	14,79	16,49	10.58	
σ_X^2	18.20	6,87	7.08	20.78	9,14	6,87	4,11	2,15	3,07	
σ_X	4,26	2,62	2,66	4.56	3,02	2,62	2,03	1,47	1,75	
β_{30}	-0,91	-0,37	-0,72	-0.68	-0.77	-0,37	-0.34	-0,02	-0,08	0
β_{40}	2,73	2,00	2,92	2,42	2,62	2,00	2.16	2,43	1,80	3
$\bar{Y}$	14,43	7.68	15,80	10,68	18.36	7.68	12,40	17.21	21,93	
σ_Y^2	21,34	2,13	14.15	6,41	6,81	2,13	2,02	2,76	1,69	
σ_Y	4,62	1,46	3,76	2,53	2,61	1,46	1,42	1,66	1,30	
β_{03}	0,19	-0,37	0,31	-0,51	0,47	-0,37	-0,70	0,18	-0,16	0
β_{04}	2,25	2,11	2,16	2,32	2,09	2,11	1,76	1,91	2,40	3
$\rho\sigma_X\sigma_Y$	3,85	3,60	-2,89	10,61	-7,34	3,60	2,43	-1,84	-2,05	
ρ	0,21	0,94	-0,29	0,92	-0,93	0,94	0,90	-0,73	-0,91	
β_{12}	-1,01	-0,41	-0,96	-0,83	-0,51	-0,41	-0,61	-0,15	0,06	0
β_{22}	2,05	1,77	1,99	2,11	2,25	1,77	1,95	1,50	1,73	$1+2\rho^2$
β_{13}	0,92	1,91	-1,06	2,25	-2,32	1,91	2,30	-1,65	-2,00	3ρ
$\sqrt{1-\rho^2}$	0,98	0,35	0,98	0,39	0,37	0,35	0,44	0,69	0,41	
$1+\rho^2$	1,04	1,88	1,08	1,85	1,86	1,88	1,81	1,53	1,83	
M	2,24	1,48	2,22	2,87	2,00	1,48	2,50	1,36	1,44	$1+\rho^2$

の場合の分散（平均平方偏差）は

$$\sigma_{\bar{x}}^2 = \frac{1}{N^2}\sum N_h\left(\frac{N_h}{n_h}-1\right)\sigma_{hx}^2$$

$$\sigma_{\bar{x}_3}^2 = \frac{1}{N^2}\sum N_h\left(\frac{N_h}{n_h}-1\right)\sigma_{hx}^2(1-\rho_h^2)$$

$$\sigma^2_{\bar{x}_c} = \frac{1}{N^2}\sum N_h\left(\frac{N_h}{n_h}-1\right)\sigma^2_{hx}\left\{(1-\rho_h^2)+\frac{M_h}{n_h}\right\}$$

で與えられる。計算の結果は第三表の様になる。此処で割当方法の(1)はNeymanの方法，(2)は $N_h\sigma_h\sqrt{1-\rho_h^2}$ による方法(2,7)を示す。(2)に依れば $\bar{x}_\beta$ に対しては最良の割当となるが、実際に用ひる $\bar{x}_c$ に対しては $\frac{M_h}{n_h}$ がつけ加わって来るので必ずしも最良の割当とはならないことに注意しなければならない。

第　三　表

尸化法 (control)	割当法	標本の大さ	$\sigma^2_{\bar{x}}$ ($\sigma_{\bar{x}}$)	$V_{\bar{x}}$	M.S.E. $\bar{x}_c$ ($\sqrt{\text{M.S.E.}\,\bar{x}_c}$)	$V_{\bar{x}_c}$	$\sigma^2_{\bar{x}_\beta}$ ($\sigma_{\bar{x}_\beta}$)	$V_{\bar{x}_\beta}$	$\frac{V_{\bar{x}}-V_{\bar{x}_c}}{V_{\bar{x}}}$
尸化しない		$n=86$	0,196 (0.443)	3,3 (100)	0,194 (0,441)	3,3 (100)	0,188 (0,434)	3,2 (97)	0,3
尸化 (一) (σ_x)	(1)	$n_1=15$, $n_2=71$	0,076 (0,276)	2,1 (64)	0,063 (0,251)	1,9 (58)	0,060 (0,245)	1,8 (55)	9,3
	(2)	$n_1=5$, $n_2=81$	0,093 (0,305)	2,3 (70)	0,069 (0,263)	2,0 (61)	0,056 (0,237)	1,8 (55)	14,1
尸化 (二) (ρ)	(1)(2)	$n_1=53$, $n_2=33$	0.153 (0.391)	2,9 (88)	0,032 (0,179)	1,3 (39)	0,022 (0,148)	1,1 (33)	54,2
尸化 (三) ($\sigma\sqrt{1-\rho^2}$)	(1)	$n_1=20$, $n_2=32$, $n_3=24$, $n_4=10$	0,038 (0,195)	1,5 (45)	0,013 (0,114)	0,9 (27)	0,010 (0,100)	0,7 (21)	41,3
	(2)	$n_1=14$, $n_2=28$, $n_3=35$, $n_4=9$	0,042 (0,205)	1,5 (45)	0,013 (0,114)	0,9 (27)	0,009 (0,095)	0,7 (21)	44,1

此処で V は偏異係数である。なお V に関する欄はすべて%で示してある。

又 V の欄のかつこ内の数字は尸化しない場合の $V_{\bar{x}}$ 即ち、3,3 %を100としたときの比率を示す。

Ⅱ. 一般多変量の場合

§4. m変量有限母集団の場合の regression estimate

m個の変量を $X^{(1)}, X^{(2)}, \cdots\cdots, X^{(m)}$ とし $X^{(i)}$と $X^{(j)}$との相関量を (i, j) であらわす。

但し $(i, i) = \sigma^2_{X^{(i)}}$ とする。すると $X^{(1)}$の $X^{(2)}, \cdots\cdots, X^{(m)}$に対する最小自乗法的回帰平面は (i, j) を元とする行列式 $|(i,j)| = \nabla$ の $(1, 1)$ 元素の餘因子 ∇_{11}が 0でなければ

$$(4,\ 1)\qquad \xi^{(1)} - X^{(1)} = -\sum_{i=2}^{m} \frac{\nabla_{1i}}{\nabla_{11}} (\xi^{(i)} - \overline{X}^{(i)})$$

又は

$$(4,2)\qquad \begin{vmatrix} \xi^{(1)} - \overline{X}^{(1)} & \xi^{(2)} - \overline{X}^{(2)} & \cdots\cdots & \xi^{(m)} - \overline{X}^{(m)} \\ (2,1) & (2,2) & \cdots\cdots & (2,m) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (m,1) & (m,2) & \cdots\cdots & (m,m) \end{vmatrix} = 0$$

で與えられる。此処で $\xi^{(i)}$は $X^{(i)}$に対応する流通坐標，

$$\overline{X}^{(i)} = \frac{1}{N} \sum_{\alpha=1}^{N} X_\alpha^{(i)}$$ とする。

今元の母集団から大さnの標本を抽いた時の標本平均点，$(\bar{x}^{(1)}, \bar{x}^{(2)}, \cdots\cdots, \bar{x}^{(m)})$ から成る母集団を考えるとき $\bar{x}^{(1)}$の，$\bar{x}^{(2)}, \cdots\cdots, \bar{x}^{(m)}$に対する最小自乗法的回帰平面はやはり $(4,1)$ 又は $(4,2)$ で表わされる。

そこで回帰係数 $\frac{\nabla_{1i}}{\nabla_{11}}$ $(i = 2, 3, \cdots\cdots, m)$ が既知とするときの regression estimate は標本点 $(\bar{x}^{(1)}, \bar{x}^{(2)}, \cdots\cdots, \bar{x}^{(m)})$ を通る $(4,2)$ と平行な平面

$$\begin{vmatrix} \xi^{(1)}-\bar{x}^{(1)} & \xi^{(2)}-\bar{x}^{(2)} & \cdots\cdots & \xi^{(m)}-\bar{x}^{(m)} \\ (2,1) & (2,2) & \cdots\cdots & (2,m) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (m,1) & (m,2) & \cdots\cdots & (m,m) \end{vmatrix} = 0 .$$

の上の点でしかも $\xi^{(i)}=\bar{X}^{(i)}$, $(i=2,3,\cdots\cdots,m)$ なる点の $\xi^{(1)}$ 坐標で與えられる。

それを $\bar{x}_\beta$ とすれば $\bar{x}_\beta$ は

$$\begin{vmatrix} \bar{x}_\beta-\bar{x}^{(1)} & \bar{x}^{(2)}-\bar{X}^{(2)} & \cdots\cdots & \bar{x}^{(m)}-\bar{X}^{(m)} \\ (2,1) & -(2,2) & \cdots\cdots & -(2,m) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (m,1) & -(m,2) & \cdots\cdots & -(m,m) \end{vmatrix} = 0$$

を満足する。$\bar{x}_\beta$ について解けば

$$(4,3)\cdot\quad \bar{x}_\beta = \frac{1}{V_{11}} \begin{vmatrix} \bar{x}^{(1)} & \bar{x}^{(2)}-\bar{X}^{(2)} & \cdots\cdots & \bar{x}^{(m)}-\bar{X}^{(m)} \\ (2,1) & (2,2) & \cdots\cdots & (2,m) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (m,1) & (m,2) & \cdots\cdots & (m,m) \end{vmatrix}$$

となる。(4,3) を第一行について展開して書きかえると

$$V_{11}(\bar{x}_\beta-\bar{x}^{(1)})-\sum_{i=2}^{m}V_{1i}(\bar{x}^{(i)}-\bar{X}^{(i)})=0 .$$

$$\therefore\ V_{11}(\bar{x}_\beta-\bar{X}^{(1)})=\sum_{i=1}^{m}V_{1i}(\bar{x}^{(i)}-\bar{X}^{(i)})$$

この平均をとれば

$$V_{11}\,\mathcal{E}(\bar{x}_\beta-\bar{X}^{(1)})=\sum V_{1i}\,\mathcal{E}(\bar{x}^{(i)}-\bar{X}^{(i)})=0$$

$$\therefore\quad \mathcal{E}(\bar{x}_\beta)=\bar{X}^{(1)}$$

故に $\bar{x}_\beta$ は $\bar{X}^{(1)}$ の不偏推定量である。

又

$$V_{11}^2(\bar{x}_\beta-\bar{X}^{(1)})^2=\sum_{i,j=1}^{m}V_{1i}V_{1j}(\bar{x}^{(i)}-\bar{X}^{(i)})(\bar{x}^{(j)}-\bar{X}^{(j)})$$

で且つ

$$\mathcal{E}(\bar{x}^{(i)}-\bar{X}^{(i)})(\bar{x}^{(j)}-\bar{X}^{(j)})=\frac{N-n}{N-1}\frac{1}{n}(i,j)$$

であるから

$$V_{11}^2\mathcal{E}(\bar{x}_\beta-\bar{X}^{(1)})^2=\sum_{i,j=1}^{m}V_{1i}V_{1j}\frac{N-n}{N-1}\frac{1}{n}(i,j)$$

$$=\frac{N-n}{N-1}\frac{1}{n}\sum_i V_{1i}\sum_j(i,j)V_{1j}$$

$$=\frac{N-n}{N-1}\frac{1}{n}\sum_i V_{1i}\delta_{1i}V=\frac{N-n}{N-1}\frac{1}{n}VV_{11}$$

$$\therefore\ \sigma_{\bar{x}_\beta}^2=\frac{N-n}{N-1}\frac{1}{n}\frac{V}{V_{11}}=\frac{N-n}{N-1}\frac{1}{n}\sigma_{X^{(1)}}^2(1-\rho_{1,23\cdots m}^2)$$

$$(4,4)\qquad =\sigma_{\bar{x}^{(1)}}^2(1-\rho_{1,23\cdots m}^2)$$

を得る。

此処で $\rho_{1,23\cdots m}$ は $X^{(1)}$ の $X^{(2)},\cdots,X^{(m)}$ に対する重相関係数である。今N次元 Euclid空間に m個の点

$$\gamma^{(i)}=(X_1^{(i)}-X^{(i)},X_2^{(i)}-\bar{X}^{(i)},\cdots,X_N^{(i)}-\bar{X}^{(i)}),\quad i=1,2,\cdots,m$$

を考えると

$$N\frac{V}{V_{11}}=N\sigma_{X^{(1)}}^2(1-\rho_{1,23\cdots m}^2)$$

は $\gamma^{(1)}$ から $O=(0,0,\cdots,0)$ と $\gamma^{(2)},\cdots,\gamma^{(m)}$ とに依って定められる $m-1$ 次元空間に下した垂線の長さの自乗に等しいことはよく知られている。

故に $\bar{X}^{(1)}$ を推定するために利用する $X^{(2)},\cdots,X^{(m)}$ として

はこの量が出来るだけ小さいようなものを選んでくればよいわけである。

例えば $m=3$ のとき $\rho_{2,3}=0$ なる $X^{(2)}, X^{(3)}$ をとるとすればこの場合には

$$\rho_{1,23}^2 = \rho_{1,2}^2+\rho_{1,3}^2$$

$$\frac{V}{V_{11}} = \sigma_{X^{(1)}}^2\,(1-\rho_{12}^2-\rho_{1,3}^2)$$

となるから ρ_{12}, ρ_{13} がなるべく大きいような $X^{(2)}, X^{(3)}$ を選べばよい。又，$X^{(2)}$ のみを利用する場合の分散（1, 9）と比較すれば $\rho_{23}=0$ なる $X^{(3)}$ を併せて利用すればよりよい推定量が得られることも分る。

実際には (i, j) は未知でその推定量を用いるのであるから $\bar{x}_\beta$ には一般に $bias$ が入り平均平方誤差には（4,4）にある項がつけ加わったものとなる。

次に、その一つの場合を §3. にならって考えてみることにする。

§5 相関量に依る推定量

§3. に於ると同様に $X^{(2)}, \ldots\ldots, X^{(m)}$ に関しては $N, \bar{X}^{(i)}=\frac{1}{N}\sum_{\alpha=1}^{N}X_\alpha^{(i)}$ 及び $(i, j)=\frac{1}{N}\sum_{\alpha=1}^{N}(X_\alpha^{(i)}-\bar{X}^{(i)})(X_\alpha^{(j)}-\bar{X}^{(j)})$ $(i, j=2, 3, \cdots m)$ が既知として $(i, 1)$ の不偏推定量

$$\widehat{(i, 1)} = \frac{N-1}{N}\,\frac{1}{n-1}\sum_{\alpha=1}^{n}(x_\alpha^{(1)}-\bar{x}^{(1)})(x_\alpha^{(i)}-\bar{x}^{(i)})$$

$(i=2, 3, \cdots m)$

を（4, 3）の第一列に用いて得る統計量

$$(5,1)\quad \bar{x}_c = \frac{1}{V_{11}} \begin{vmatrix} \bar{x}^{(1)} & \bar{x}^{(2)} - \bar{X}^{(2)} & \cdots\cdots & \bar{x}^{(m)} - \bar{X}^{(m)} \\ (\widehat{2,1}) & (2,2) & \cdots\cdots & (2,m) \\ \vdots & & & \vdots \\ (\widehat{m,1}) & (m,2) & \cdots\cdots & (m,m) \end{vmatrix}$$

を考える。* 簡単のために $m=3$ として $\bar{x}_c$ の積率を算出してみる。

$X^{(1)} = X \quad X^{(2)} = Y, \quad X^{(3)} = Z$ とおくと(5, 1)は

$$(5,2)\quad \bar{x}_c = \frac{1}{V_{11}} \begin{vmatrix} \bar{x} & \bar{y} - \bar{Y} & \bar{z} - \bar{Z} \\ (\widehat{YX}) & (YY) & (YZ) \\ (\widehat{ZX}) & (ZY) & (ZZ) \end{vmatrix}$$

$$V_{11} = \begin{vmatrix} (YY) & (YZ) \\ (ZY) & (ZZ) \end{vmatrix} = \sigma_Y^2 \sigma_Z^2 (1 - \rho_{YZ}^2)$$

となる。(5, 2)をかきかえた。

$$(5,3)\quad \bar{x}_c - \bar{X} = \frac{1}{V_{11}} \begin{vmatrix} \bar{x} - \bar{X} & \bar{y} - \bar{Y} & \bar{z} - \bar{Z} \\ (\widehat{YX}) & (YY) & (YZ) \\ (\widehat{ZX}) & (ZY) & (ZZ) \end{vmatrix}$$

を第一行について展開すれば

$$(5,4)\quad V_{11}(\bar{x}_c - \bar{X}) = V_{11}(\bar{x} - \bar{X}) + \hat{V}_{12}(\bar{y} - \bar{Y}) + \hat{V}_{13}(\bar{z} - \bar{Z})$$

$$\hat{V}_{12} = - \begin{vmatrix} (\widehat{YX}) & (YZ) \\ (\widehat{ZX}) & (ZZ) \end{vmatrix}, \quad \hat{V}_{13} = \begin{vmatrix} (\widehat{YX}) & (YY) \\ (\widehat{ZX}) & (ZY) \end{vmatrix}$$

となる。処で

$$(5,5) \quad \mathcal{E}\,(Y\hat{X})(\bar{y}-\bar{Y}) = \frac{N-1}{N}\,\frac{N-n}{N-2}\,\frac{1}{n}\,\mu_{120}$$

$$\mathcal{E}\,(Z\hat{X})(\bar{y}-\bar{Y}) = \frac{N-1}{N}\,\frac{N-n}{N-2}\,\frac{1}{n}\,\mu_{111}$$

（但し $\mu_{ijk} = \frac{1}{N}\sum_{\alpha=1}^{N}(X_\alpha-\bar{X})^i(Y_\alpha-\bar{Y})^j(Z_\alpha-\bar{Z})^k$ とする）

であるから（ appendix 例 3））

$$\mathcal{E}\,\hat{V}_{12}(\bar{y}-\bar{Y}) = \frac{-(N-1)(N-n)}{N(N-2)}\,\frac{1}{n}\begin{vmatrix}\mu_{120} & (YZ)\\ \mu_{111} & (ZZ)\end{vmatrix}$$

同様にして

$$\mathcal{E}\,\hat{V}_{13}(\bar{y}-\bar{Y}) = \frac{(N-1)(N-n)}{N(N-2)}\,\frac{1}{n}\begin{vmatrix}\mu_{111} & (YY)\\ \mu_{102} & (ZY)\end{vmatrix}$$

故に（5, 4）から

$$(5.6) \quad \mathcal{E}\,\bar{x}_c = \bar{X} + \frac{(N-n)(N-1)}{N(N-2)}\,\frac{1}{n}\,\frac{1}{V_{11}}\left\{-\begin{vmatrix}\mu_{120} & (YZ)\\ \mu_{111} & (ZZ)\end{vmatrix} + \begin{vmatrix}\mu_{111} & (YY)\\ \mu_{102} & (ZY)\end{vmatrix}\right\}$$

$$= \bar{X} + \frac{(N-n)(N-1)}{N(N-2)}\,\frac{1}{n}\,\frac{\sigma_X}{1-\rho_{YZ}^2}\,(2\rho_{YZ}\beta_{111} - \beta_{102} - \beta_{120})$$

$$\text{但し} \quad \beta_{ijk} = \mu_{ijk}/(\sigma_X^i\,\sigma_Y^j\,\sigma_Z^k)$$

即ち母集団が正規型の場合には三次の積率は0であるから $\bar{x}_c$ は不偏となるが一般には母数に対して $\frac{1}{n}$ の order の偏倚が入る。

次に（5, 4）を自乗すると

$$(5,7)\quad V_{11}^2(\bar{x}_c-\bar{X})^2 = V_{11}^2(\bar{x}-\bar{X})^2 + 2V_{11}\{\hat{V}_{12}(\bar{x}-\bar{X})(\bar{y}-\bar{Y}) + \hat{V}_{13}(\bar{x}-\bar{X})(\bar{z}-\bar{Z})\} + \hat{V}_{12}^2(\bar{y}-Y) + \hat{V}_{13}(\bar{z}-\bar{Z})^2 + 2\hat{V}_{12}\hat{V}_{13}(\bar{y}-\bar{Y})(\bar{z}-\bar{Z})$$

となるがこの平均値は，母数に対して $\frac{1}{N}$ の order 以下及び $\frac{1}{n^2}$ の order 以下を省略すると

$$V_{11}^2\,\mathcal{E}(\bar{x}_c-\bar{X})^2 = \frac{1}{n}V_{11}V$$

即ち

$$(5,8)\quad \text{M.S.E. } \bar{x}_c = \frac{1}{n}\sigma_X^2 \begin{vmatrix} 1 & \rho_{XY} & \rho_{XZ} \\ \rho_{XY} & 1 & \rho_{YZ} \\ \rho_{XZ} & \rho_{YZ} & 1 \end{vmatrix} \Big/ \begin{vmatrix} 1 & \rho_{YZ} \\ \rho_{YZ} & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \sigma_{\bar{x}}^2(1-\rho_{X,YZ}^2)$$

となる。$\frac{1}{n^2}$ の order の項の大凡の大きさを見るために正規型の場合について算出すると

$$(5,9)\quad \text{M.S.E. } \bar{x}_c = \sigma_{\bar{x}_c}^2\left\{(1-\rho_{X,YZ}^2) + \frac{1}{n}(2+\rho_{X,YZ}^2)\right\}$$

となる。（appendix 例5)，6)，7) 参照）

戸を考える場合も §3. に於ると全く同様に各戸毎の $\bar{x}_{ck}$ から合成される

$$(5,10)\quad \bar{x}_c = \frac{1}{N}\sum N_k\bar{x}_{ck}$$

を $\bar{X}$ の推定量とすればその平均平方誤差は(5,8)に対応して

$$(5,11)\qquad M.S.E.\ \bar{x}_c = \frac{1}{N^2}\sum_h N_h^2 \frac{1}{n_h}\sigma_{hx}^2(1-\rho_{h(X,YZ)}^2)$$

が與えられる。

APPENDIX

§ 有限母集団からの統計量の積率

今 $\{(X_i, Y_i)\ i=1,2,\cdots\cdots,N\}$ からの大さnの標本 $\{(x_\alpha, y_\alpha),\ \alpha=1,2,\cdots\cdots,n\}$ の統計量

$$(1)\qquad s_{11} = \frac{1}{n}\sum_{\alpha=1}^{n}(x_\alpha-\bar{x})(y_\alpha-\bar{y})$$

の平均値を算出する場合を例にとって考へる。

(1) を書きかえると、

$$s_{11} = \left\{\frac{1}{n}\sum_{\alpha=1}^{n}(x_\alpha-\bar{X})(y_\alpha-\bar{Y}) - \frac{1}{n^2}\sum_{\alpha=1}^{n}(x_\alpha-\bar{X})\sum_{\alpha=1}^{n}(y_\alpha-\bar{Y})\right\}$$

となるが此処で第一項は $\{((X_i-\bar{X})(Y_i-\bar{Y})),\ i=1,2,\cdots,N\}$ からの大さnの標本の平均値，　第二項は $\{(X_i-\bar{X},\ Y_i-\bar{Y}),\ i=1,2,\cdots,N\}$ からの大さnの標本に於ける x 及 y の平均値の積と考えられる。

即ち，$E(s_{11})$ は二変量の有限母集団 $\{(X_i^{(1)}, X_i^{(2)}),\ i=1,2,\cdots,N\}$ からの大さnの標本の統計量 $\sum_{\alpha=1}^{n} x_\alpha^{(1)}$ と $\sum_{\alpha=1}^{n} x_\alpha^{(1)}x_\alpha^{(2)}$ との平均値を知ることに依って求めることが出来る。

そこで一般に $\{(X_i^{(1)}, X_i^{(2)}, \cdots\cdots, X_i^{(m)}),\ i=1,2,\cdots\cdots,N\}$ からの大さnの任意標本を $\{(x_\alpha^{(1)}, \cdots\cdots, x_\alpha^{(m)}),\ \alpha=1,2,\cdots\cdots,n\}$ とするとき

$$(2)\qquad \sum_{\alpha=1}^{n} x_\alpha^{(1)}\sum_{\alpha=1}^{n} x_\alpha^{(2)}\cdots\cdots\sum_{\alpha=1}^{n} x_\alpha^{(m)} = \sum_{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m=1}^{n} x_{\alpha_1}^{(1)} x_{\alpha_2}^{(2)}\cdots x_{\alpha_m}^{(m)}$$

の形の m 次の統計量の平均値を求めておくことにする。

2次以上の積率もやはりこの形の平均値に帰着出来る。

（2）の右辺の項の $\alpha_1=\alpha_2$ の様なものに対しては $x^{(1)}_{\alpha_1}\cdot x^{(2)}_{\alpha_2}$ を改めて $x^{(1)}_{\nu_1}$ と，かきかえることにすれば（2）は

$$(3)\qquad \sum_{\substack{\nu_1,\nu_2,\cdots,\nu_k=1\\ \nu_i\neq\nu_j\,(i\neq j)}}^{n} x^{(1)}_{\nu_1}\cdots\cdots x^{(k)}_{\nu_k}\qquad (1\leqq k\leqq m)$$

の形のものの和となるから結局（3）の平均値を求めればよいことになる。此処で始めの例について考えてみると、容易に

$$\mathcal{E}\sum_{\alpha_1\neq\alpha_2} x^{(1)}_{\alpha_1}x^{(2)}_{\alpha_2}=\frac{n(n-1)}{N(N-1)}\sum_{i_1\neq i_2}^{N} X^{(1)}_{i_1}X^{(2)}_{i_2}$$

を得るが、此処で $\sum\limits_{i_1\neq i_2}^{N} X^{(1)}_{i_1}X^{(2)}_{i_2}$ を函数であらわさなければならない。変量が6までについてはその結果は次のようになる。簡単のために

$$(1)=\bar{X}^{(1)}=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}X^{(1)}_i$$

$$(12)=\frac{1}{N}\sum X^{(1)}_i X^{(2)}_i\qquad \text{等々}$$

と書くことにする。

$$(A,1)\qquad \sum X^{(1)}_i=N(1)$$

$$(A,2)\qquad \sum_{i_1\neq i_2} X^{(1)}_{i_1}X^{(2)}_{i_2}=-N(12)+N^2(1)(2)$$

$$(A,3)\qquad \sum_{\substack{i_1,i_2,i_3\\ i_l\neq i_m\,(l\neq m)}} X^{(1)}_{i_1}X^{(2)}_{i_2}X^{(3)}_{i_3}=2N(123)-N^2\sum_{(12,3)}(12)(3)+N^3(1)(2)(3)$$

此処に $\sum^{(12)(3)}$ は添数 $1,2,3$ の（$12,3$）の如き型のすべての

組分け（12, 3）（13, 2），（23, 1）についてそれぞれ対応する（12）（3），（13），（2），（23）（1）の和を意味する。以下に於ても同様である。

$$(A,4)\quad \sum X_{i_1}^{(1)}X_{i_2}^{(2)}X_{i_3}^{(3)}X_{i_4}^{(4)} = -3!N(1234)+N^2\sum(12)(34)$$
$$+2N^2\sum(123)(4)-N^3\sum(12)(3)(4)+N^4(1)(2)(3)(4)$$

$$(A,5)\quad \sum\prod_{k=1}^{5}X_{i_k}^{(k)} = 4!N(12345)-3!N^2\sum(1234)(5)$$
$$-2N^2\sum(123)(45)+2N^3\sum(123)(4)(5)$$
$$+N^3\sum(12)(34)(5)-N^4\sum(12)(3)(4)(5)$$
$$+N^5(1)(2)(3)(4)(5)$$

$$(A;6)\quad \sum\prod_{k=1}^{6}X_{i_k}^{(k)} = -5!N(123456)$$
$$+4!N^2\sum(12345)(6)+3!N^2\sum(1234)(56)$$
$$+4N^2\sum(123)(456)-3!N^3\sum(1234)(5)(6)$$
$$-2N^3\sum(123)(45)(6)-N^3\sum(12)(34)(56)$$
$$+2N^4\sum(123)(4)(5)(6)+N^4\sum(12)(34)(5)(6)$$
$$-N^5\sum(12)(3)(4)(5)(6)+N^6(1)(2)(3)(4)(5)(6)$$

次に一般に

$$\mathcal{E}\sum_{\substack{\nu_i\neq\nu_j\\(i\neq j)}}\prod_{k=1}^{m}x_{\nu_k}^{(k)} = \frac{n(n-1)\text{-----}(n-m+1)}{N(N-1)\text{-----}(N-m+1)}\sum_{\substack{i_l\neq i_m\\(l\neq m)}}\prod_{k=1}^{m}X_{i_k}^{(k)}$$

であるから（A）を用いて次の結果を得る。

$$(B,1)\quad \mathcal{E}\sum x_{\alpha}^{(1)} = n(1)$$

(B, 2) $$\mathcal{E} \sum x_\alpha^{(1)} \sum x_\alpha^{(2)} = \frac{(N-n)n}{N-1}(12) + \frac{Nn(n-1)}{N-1}(1)(2)$$

(B, 3) $$\mathcal{E} \sum x_\alpha^{(1)} \sum x_\alpha^{(2)} \sum x_\alpha^{(3)} = \frac{(N-n)(N-2n)}{(N-1)(N-2)} n(123)$$

$$+ \frac{N(N-n)}{(N-1)(N-2)} n(n-1) \sum (12)(3)$$

$$+ \frac{N^2}{(N-1)(N-2)} n(n-1)(n-2) \cdot (1)(2)(3)$$

(B, 4) $$\mathcal{E} \prod_k^4 \sum_\alpha x_\alpha^{(k)} = \frac{N-n}{N-1} n \left\{ 1 - \frac{6(N-n-1)}{(N-2)(N-3)}(n-1) \right\} (1234)$$

$$+ \frac{N(N-n)(N-2n+1)}{(N-1)(N-2)(N-3)} n(n-1) \sum (123)(4)$$

$$+ \frac{N(N-n)(N-n-1)}{(N-1)(N-2)(N-3)} n(n-1) \cdot \sum (12)(34)$$

$$+ \frac{N^2(N-n)}{(N-1)(N-2)(N-3)} n(n-1)(n-2) \sum (12)(3)(4)$$

$$+ \frac{N^3}{(N-1)(N-2)(N-3)} n(n-1)(n-2)(n-3) \cdot (1)(2)(3)(4)$$

(B, 5) $$\mathcal{E} \prod_k^5 \sum x_\alpha^{(k)} = \frac{N-n}{N-1} n \left\{ 1 - \frac{14}{N-2}(n-1) + \frac{36}{(N-2)(N-3)}(n-1)(n-2) - \frac{24}{(N-2)(N-3)(N-4)}(n-1) \right.$$

$$\left. (n-2)(n-3) \right\} (12345)$$

$$+ \frac{N(N-n)}{(N-1)(N-2)} n(n-1) \left\{ 1 - \frac{6}{N-3}(n-2) + \frac{6}{(N-3)(N-4)}(n-2)(n-3) \right\} \sum (1234)(5)$$

$$+ \frac{N(N-n)(N-2n)(N-n-1)}{(N-1)(N-2)(N-3)(N-4)} n(n-1) \sum (123)(45)$$

$$+ \frac{N^2(N-n)(N-2n+2)}{(N-1)(N-2)(N-3)(N-4)} n(n-1)(n-2) \sum (123)(4)(5)$$

$$+ \frac{N^2(N-n)(N-n-1)}{(N-1)(N-2)(N-3)(N-4)} n(n-1)(n-2) \sum (12)(34)(5)$$

$$+ \frac{N^3(N-n)}{(N-1)(N-2)(N-3)(N-4)} n(n-1)(n-2)(n-3) \sum (12)(3)(4)(5)$$

$$+ \frac{N^4}{(N-1)(N-2)(N-3)(N-4)} n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4) \cdot (1)(2)(3)(4)(5)$$

(B , 6)

$$\mathcal{E}\prod_{k}^{6}\sum x_{\alpha}^{(k)} = \frac{N-n}{N-1}\, n \left\{ 1 - \frac{30(N-n-1)}{(N-2)(N-3)} \left(1 - \frac{4(N-n-2)}{(N-4)(N-5)}(n-2) \right) \right\} (123456)$$

$$+ \frac{N(N-n)}{(N-1)(N-2)}\, n(n-1) \left\{ \frac{N-n-1}{N-3} \left(1 - \frac{12(N-2n-1)}{(N-4)(N-5)}(n-2) \right) - \frac{1}{N-3}(n-2) \right\} \sum (12345)(6) ,$$

$$+ \frac{N(N-n)(N-n-1)}{(N-1)(N-2)(N-3)}\, n(n-1) \left\{ 1 - \frac{6(N-n-1)}{(N-4)(N-5)}(n-2) \right\} \sum (1234)(56)$$

$$+ \frac{N(N-n)(N-n-1)}{(N-1)(N-2)(N-3)}\, n(n-1) \left\{ 1 - \frac{4(N-n-2)}{(N-4)(N-5)}(n-2) \right\} \sum (123)(456)$$

$$+ \frac{N^2(N-n)}{(N-1)(N-2)(N-3)}\, n(n-1)(n-2) \left\{ 1 - \frac{6(N-n-1)}{(N-4)(N-5)}(n-3) \right\} \sum (1234)(5)(6)$$

$$+ \frac{N^2(N-n)(N-n-1)(N-2n+1)}{(N-1)(N-2)(N-3)(N-4)(N-5)}\, n(n-1)(n-2) \sum (123)(45)(6)$$

$$+ \frac{N^2(N-n)(N-n-1)(N-n-2)}{(N-1)(N-2)(N-3)(N-4)(N-5)}\, n(n-1)(n-2) \sum (12)(34)(56)$$

$$+ \frac{N^3(N-n)(N-2n+3)}{(N-1)(N-2)(N-3)(N-4)(N-5)}\, n(n-1)(n-2)(n-3) \sum (123)(4)(5)(6)$$

$$+ \frac{N^3(N-n)(N-n-1)}{(N-1)(N-2)(N-3)(N-4)(N-5)}\, n(n-1)(n-2)(n-3) \sum (12)(34)(5)(6)$$

$$+ \frac{N^4(N-n)}{(N-1)(N-2)(N-3)(N-4)(N-5)}\, n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4) \sum (12)(3)(4)(5)(6)$$

$$+ \frac{N^5}{(N-1)(N-2)(N-3)(N-4)(N-5)}\, n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)(1)(2)(3)(4)(5)(6)$$

例 1) $s_{11} = \frac{1}{n}\sum_{\alpha=1}^{n} (x_\alpha - \bar{x})(y_\alpha - \bar{y})$

$$= \frac{1}{n^2} \left\{ n \sum_{\alpha} (x_\alpha - \bar{X})(y_\alpha - \bar{Y}) - \sum_{\alpha} (x_\alpha - \bar{X}) \sum_{\alpha} (y_\alpha - \bar{Y}) \right\}$$

右辺の第一項で

$$x_\alpha^{(1)} = (x_\alpha - \bar{X})(y_\alpha - \bar{Y})$$

とおけば　$X_i^{(1)} = (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})$ で

$$(1) = \frac{1}{N}\sum(X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y}) = \rho\sigma_X\sigma_Y$$

又第二項で　$x_\alpha^{(1)} = x_\alpha - \bar{X},\ x_\alpha^{(2)} = y_\alpha - \bar{Y}$ とおけば

$(12) = \rho\sigma_X\sigma_Y,\ (1) = 0,\ (2) = 0$ である。

故に (B, 1), (B, 2) から夫々;

$$\mathcal{E}\sum(x_\alpha - \bar{X})(y_\alpha - \bar{Y}) = n\rho\sigma_X\sigma_Y,$$

$$\mathcal{E}\sum(x_\alpha - \bar{X})\sum(y_\alpha - \bar{Y}) = \frac{(N-n)n}{N-1}\rho\sigma_X\sigma_Y$$

故に

$$(4)\quad \mathcal{E}s_{11} = \frac{1}{n^2}\left\{n^2\rho\sigma_X\sigma_Y - \frac{(N-n)n}{N-1}\rho\sigma_X\sigma_Y\right\} = \frac{N}{N-1}\frac{n-1}{n}\rho\sigma_X\sigma_Y$$

故に

$$\hat{s}_{11} = \frac{N-1}{N}\frac{1}{n-1}\sum(x_\alpha - \bar{x})(y_\alpha - \bar{y})$$

とおけば $\hat{s}_{11}$ は母相関量の不偏推定量である。

$X_i = Y_i,\ x_\alpha = y_\alpha$ とおけば $s_2 = \frac{1}{n}\sum(x_\alpha - \bar{x})^2$ の平均値は (4) に於て $\rho\sigma_X\sigma_Y = \sigma_X^2$ とおいて

$$\mathcal{E}s_2 = \frac{N}{N-1}\frac{n-1}{n}\sigma_X^2$$

となる。

例 2)　$\sigma_{\hat{s}_{11}}^2$ の計算

$$\hat{s}_{11}^2 = \frac{(N-1)^2}{N^2}\frac{1}{n^2(n-1)^2}\left\{n^2\left(\sum(x_\alpha - \bar{X})(y_\alpha - \bar{Y})\right)^2 - 2n\sum(x_\alpha - \bar{X})(y_\alpha - \bar{Y})\cdot\sum(x_\alpha - \bar{X})\cdot\sum(y_\alpha - \bar{Y}) + \left(\sum(x_\alpha - \bar{X})\right)^2\cdot\left(\sum(y_\alpha - \bar{Y})\right)^2\right\}$$

第一項で $x_\alpha^{(1)} = x_\alpha^{(2)} = (x_\alpha - \bar{X})(y_\alpha - \bar{Y})$ とおけば $(12) = \mu_{22}$,

$(1) = (2) = \rho\sigma_X\sigma_Y$

故に（B，2）から

$$\mathcal{E}\left\{\sum(x_\alpha-\bar{X})(y_\alpha-\bar{Y})\right\}^2=\frac{(N-n)n}{N-1}\mu_{22}+\frac{Nn(n-1)}{N-1}\rho^2\sigma_X^2\sigma_Y^2$$

第二項で　$x_\alpha^{(1)}=(x_\alpha-\bar{X})(y_\alpha-\bar{Y})$, $x_\alpha^{(2)}=x_\alpha-\bar{X}$, $x_\alpha^{(3)}=y_\alpha-\bar{Y}$ とおけば　$(123)=\mu_{22}$, $(1)=(23)=\rho\sigma_X\sigma_Y$, $(2)=(3)=0$ であるから（B，3）から

$$\mathcal{E}\left\{\sum(x_\alpha-\bar{X})(y_\alpha-\bar{Y})\cdot\sum(x_\alpha-\bar{X})\cdot\sum(y_\alpha-\bar{Y})\right\}$$
$$=\frac{(N-n)(N-2n)}{(N-1)(N-2)}n\mu_{22}+\frac{N(N-n)}{(N-1)(N-2)}n(n-1)\rho^2\sigma_X^2\sigma_Y^2$$

第三項では　$x_\alpha^{(1)}=x_\alpha^{(2)}=(x_\alpha-\bar{X})$, $x_\alpha^{(3)}=x_\alpha^{(4)}=(y_\alpha-\bar{Y})$ とおけば $(1234)=\mu_{22}$　$(12)=\sigma_X^2$, $(34)=\sigma_Y^2$, $(13)=(23)=(14)=(24)=\rho\sigma_X\sigma_Y$, $(1)=(2)=(3)=(4)=0$　であるから（B，4）から

$$\mathcal{E}\left\{\left(\sum(x_\alpha-\bar{X})\right)^2\left(\sum(y_\alpha-\bar{Y})\right)^2\right\}=\frac{N-n}{N-1}n\left\{1-\frac{6(N-n-1)(n-1)}{(N-2)(N-3)}\right\}\mu_{22}$$
$$+\frac{N(N-n)(N-n-1)}{(N-1)(N-2)(N-3)}n(n-1)(2\rho^2\sigma_X^2\sigma_Y^2+\sigma_X^2\sigma_Y^2)$$

故に　$N\to\infty$　として[1]

$$\mathcal{E}\hat{s}_{11}^2=\frac{1}{n}\mu_{22}+\frac{n^2-2n+2}{n(n-1)}\rho^2\sigma_X^2\sigma_Y^2+\frac{1}{n(n-1)}\sigma_X^2\sigma_Y^2$$

$$\sigma_{\hat{s}_{11}}^2=\mathcal{E}\hat{s}_{11}^2-(\mathcal{E}\hat{s}_{11})^2=\frac{1}{n}\mu_{22}-\frac{(n-2)}{n(n-1)}\rho^2\sigma_X^2\sigma_Y^2+\frac{1}{n(n-1)}\sigma_X^2\sigma_Y^2$$

此処で　$x_\alpha=y_\alpha$　とおけば

$$\sigma_{\hat{s}_1}^2=\frac{1}{n}\mu_4-\frac{(n-3)}{n(n-1)}\sigma_X^4,\quad \hat{s}_2=\frac{1}{n-1}\sum(x_\alpha-\bar{x})^2,\ \mu_4=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i-\bar{X})^4$$

例　3）

$(\hat{XZ}) = \frac{1}{n-1}\sum_{\alpha=1}^{n}(x_\alpha-\bar{x})(z_\alpha-\bar{z})$ とするとき $\mathcal{E}(\hat{XZ})(\bar{y}-\bar{Y})$

即ち $(\hat{XZ})$ と $\bar{y}$ との相関量を求めること。

$$(\hat{XZ})(\bar{y}-\bar{Y}) = \frac{1}{n^2(n-1)}\left\{ n\sum(x_\alpha-\bar{X})(z_\alpha-\bar{Z})\sum(y_\alpha-\bar{Y}) - \sum(x_\alpha-\bar{X})\sum(y_\alpha-\bar{Y})\sum(z_\alpha-\bar{Z})\right\}$$

こゝで $x_\alpha^{(1)} = (z_\alpha-\bar{Z})(x_\alpha-\bar{X})$, $x_\alpha^{(2)} = y_\alpha-\bar{Y}$ とおいて (B,2) から

$$\mathcal{E}\sum x_\alpha^{(1)}\sum x_\alpha^{(2)} = \frac{(N-n)n}{N-1}\mu_{111}$$

1）　(B,2) に於て $N\to\infty$ とすれば $\mathcal{E}\sum x_\alpha^{(1)}\sum x_\alpha^{(2)} = n(12)+n(n-1).(1)(2)$

となるがこの式は次のように直接に出すことが出来る。

$N\to\infty$ と考えることは $x_\alpha^{(1)}$ と $x_\beta^{(2)}$ $(\alpha\neq\beta)$ とが独立である。

即ち $Pr(x_\alpha^{(1)}x_\beta^{(2)} = X_i^{(1)}X_j^{(2)}) = Pr(x_\alpha^{(1)} = X_i^{(1)})\,Pr(x_\beta^{(2)} = X_j^{(2)})$ で

あることを意味するから

$$\begin{aligned}\mathcal{E}\sum x_\alpha^{(1)}\sum x_\alpha^{(2)} &= \mathcal{E}\sum x_\alpha^{(1)}x_\alpha^{(2)} + \mathcal{E}\sum_{\alpha\neq\beta}x_\alpha^{(1)}x_\beta^{(2)}\\ &= n\,\mathcal{E}(x_\alpha^{(1)}x_\alpha^{(2)}) + n(n-1)\,\mathcal{E}(x_\alpha^{(1)}x_\beta^{(2)})\\ &= n\,\mathcal{E}(x_\alpha^{(1)}x_\alpha^{(2)}) + n(n-1)\,\mathcal{E}(x_\alpha^{(1)})\,\mathcal{E}(x_\beta^{(2)})\\ &= n(12) + n(n-1)\cdot(1)\cdot(2)\end{aligned}$$

又 $x_\alpha^{(1)} = x_\alpha-\bar{X}$, $x_\alpha^{(2)} = y_\alpha-\bar{Y}$, $x_\alpha^{(3)} = z_\alpha-\bar{Z}$ とおいて (B,3) から

$$\mathcal{E}\sum x_\alpha^{(1)}\sum x_\alpha^{(2)}\sum x_\alpha^{(3)} = \frac{(N-n)(N-2n)}{(N-1)(N-2)}n\mu_{111}$$

を得る。故に $\mathcal{E}(\hat{XZ})(\bar{y}-\bar{Y}) = \frac{N-n}{N-2}\frac{1}{n}\mu_{111}$

此処で $Z_i = Y_i$ とおけば $\mu_{111} = \mu_{120}$ となって

$$\mathcal{E}(\hat{XY})(\bar{y}-\bar{Y}) = \frac{N-n}{N-2}\frac{1}{n}\mu_{12}$$

例 4)　$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{\alpha=1}^{n} x_\alpha$ の積率

$$\mathcal{E}(\overline{x} - \overline{X}) = 0$$

(B,2) に於て $x_\alpha^{(1)} = x_\alpha^{(2)} = x_\alpha - \overline{X}$ とおけば

$$\mathcal{E}(\overline{x} - \overline{X})^2 = \frac{N-n}{N-1}\frac{1}{n}\sigma_x^2$$

(B,3) に於て $x_\alpha^{(1)} = x_\alpha^{(2)} = x_\alpha^{(3)} = x_\alpha - \overline{X}$ とおけば $(123) = \mu_3$ だから

$$\mathcal{E}(\overline{x} - \overline{X})^3 = \frac{(N-n)(N-2n)}{(N-1)(N-2)}\mu_3 / n^2$$

(B,4) に於て $x_\alpha^{(1)} = x_\alpha^{(2)} = x_\alpha^{(3)} = x_\alpha^{(4)} = x_\alpha - \overline{X}$ とおけば

$(1234) = \mu_4$,

$(12) = (34) = (13) = \cdots\cdots = \sigma_x^2$, $(1) = (2) = (3) = (4) = 0$ である

から

$$\mathcal{E}(\overline{x} - \overline{X})^4 = \frac{N-n}{N-1}\left\{1 - \frac{6(N-n-1)(n-1)}{(N-2)(N-3)}\right\}\frac{\mu_4}{n^3} + \frac{3N(N-n)(N-n-1)(n-1)}{(N-1)(N-2)(N-3)}\frac{\sigma_x^4}{n^3}$$

例 5)　$$\mathcal{E}(\hat{XZ})(\overline{x}-\overline{X})(\overline{y}-\overline{Y}) = \frac{1}{n^3(n-1)}\Big\{n\mathcal{E}\sum(x_\alpha-\overline{X})(z_\alpha-\overline{Z})\sum(x_\alpha-\overline{X})\sum(y_\alpha-\overline{Y}) - \mathcal{E}\big(\sum(x_\alpha-\overline{X})\big)^2\sum(y_\alpha-\overline{Y})(z_\alpha-\overline{Z})\Big\}$$

$N \to \infty$ として (B,3)(B,4) から

$$\mathcal{E}\sum(x_\alpha-\overline{X})(z_\alpha-\overline{Z})\sum(x_\alpha-\overline{X})\sum(y_\alpha-\overline{Y}) = n\mu_{211} + n(n-1)\mu_{101}\mu_{110}$$

$$\mathcal{E}\big(\sum(x_\alpha-\overline{X})\big)^2\sum(y_\alpha-\overline{Y})\sum(z_\alpha-\overline{Z}) = n\mu_{211} + n(n-1)(\mu_{200}\mu_{011} + 2\mu_{110}\mu_{011})$$

$$\therefore\ \mathcal{E}(\hat{XZ})(\overline{x}-\overline{X})(\overline{y}-\overline{Y}) = \frac{1}{n^2}\left\{(n-2)\mu_{101}\mu_{110} + \mu_{211} - \mu_{200}\mu_{011}\right\}$$

$Z = Y$ とおけば

$$\mathcal{E}(\hat{XY})(\overline{x}-\overline{X})(\overline{y}-\overline{Y}) = \frac{1}{n^2}\left\{(n-2)\mu_{110}^2 + \mu_{220} - \mu_{200}\mu_{020}\right\}$$

例 6)

$N \to \infty$ として (B, 4), (B, 5), (B, 6) を使えば

$$\mathcal{E}(\hat{XY})(\hat{XZ})(\bar{y}-\bar{Y})^2 = \frac{1}{n(n-1)}(\mu_{121}\mu_{110}+\mu_{130}\mu_{101}+2\mu_{120}\mu_{111}+\mu_{211}\mu_{020})$$

$$+\frac{(n-2)}{n(n-1)}\mu_{020}\mu_{110}\mu_{101}-\frac{n-2}{n^2(n-1)}(2\mu_{110}^2\mu_{011}+4\mu_{110}\mu_{101}\mu_{020})$$

$$\mathcal{E}(\hat{XY})^2(\bar{y}-\bar{Y})^2 = \frac{1}{n(n-1)}(2\mu_{130}\mu_{110}+2\mu_{120}^2+\mu_{220}\mu_{020})$$

$$+\frac{(n-2)}{n(n-1)}\mu_{020}\mu_{110}^2-\frac{6(n-2)}{n^2(n-1)}\mu_{020}\mu_{110}^2$$

$$\mathcal{E}(\hat{XZ})^2(\bar{y}-\bar{Y})^2 = \frac{1}{n(n-1)}(2\mu_{121}\mu_{101}+2\mu_{111}^2+\mu_{202}\mu_{020})$$

$$+\frac{(n-2)}{n(n-1)}\mu_{101}^2\mu_{020}-\frac{(n-2)}{n^2(n-1)}(4\mu_{101}\mu_{110}\mu_{011}+2\mu_{101}^2\mu_{020})$$

但し $\frac{1}{n^3}$ 以下を省略してある。又便宜上分毋の $n-1$ をそのまゝにしてある。

例 7)

$$\mathcal{E}(\hat{XY})(\hat{XZ}) = \frac{1}{n}\mu_{211}+\frac{n^2-2n+2}{n(n-1)}\mu_{110}\mu_{101}+\frac{1}{n(n-1)}\mu_{200}\mu_{101}$$

$Y=Z$ とおけば

$$\mathcal{E}(\hat{XY})^2 = \frac{1}{n}\mu_{220}+\frac{n^2-2n+2}{n(n-1)}\mu_{110}^2+\frac{1}{n(n-1)}\mu_{110}\mu_{200}$$

$$\mathcal{E}(\hat{XZ})^2 = \frac{1}{n}\mu_{202}+\frac{n^2-2n+2}{n(n-1)}\mu_{101}^2+\frac{1}{n(n-1)}\mu_{101}\mu_{200}$$