$E\left(\frac{X}{Y}\right) = \frac{EX}{EY}$ となるための一つの充分條件

労働科学研究所　門山允

Ratio Estimate を使うときによく

$$E\left(\frac{X}{Y}\right) = \frac{EX}{EY}$$

という近似式が使われるが，これがどんな條件の下でなりたつかは，あまりよく調べられていない。これはふつう $Y \fallingdotseq EY$ としてこの式を導いているが，この條件はあまりに大ざっぱなので，もう少しよい條件として次の様なものを得た。

ふつう上の式が問題となるのは，X と Y とがある比例関係にあることが多いから，

$$X = aY + Z$$

（Z は確率変数，a は常数）と假定すると，

$$E\left(\frac{X}{Y}\right) = E\left(a+\frac{Z}{Y}\right) = a + E\left(\frac{Z}{Y}\right) \qquad (1)$$

$$EX = aEY + EZ \qquad (2)$$

ここで，Y と Z とは独立であると假定すると，よく知られているように，Z/Y の分布函数は，Z,Y の特性函数を $f_1(t)$, $f_2(t)$ とするとき

$$G(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f_1(t) - f_1(t) f_2(-tx)}{t} dt \qquad (3)$$

で與えられる。

更に，右辺の積分記号の中で微分ができれば

$$G'(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty} f_1(t) f_2'(-tx)\, dt \qquad (4)$$

である。

この條件の下では

$$E\left(\frac{Z}{Y}\right) = \int_{-\infty}^{\infty} x\, G'(x)\, dx$$

しかるに

$$G'(-x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty} f_1(t) f_2'(tx)\, dt$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty} f_1(-t) f_2'(-tx)\, dt$$

故に， Zが対称分布をすれば， $f_1(-t) = f_1(t)$ であるから

$$G'(-x) = G'(x)$$

よって，

$$E(Z/Y) = 0$$

又このとき； $E(Z) = 0$

故に；このときは；

$$E(X/Y) = a + E(Z/Y) = a$$

$$EX = aEY + EZ = aEY$$

$$\therefore\ E\left(X/Y\right) = EX/EY$$

即ち，（4）が成立ち，且つZが平均値0の対称分布をするとき，

$E\left(X/Y\right) = EX/EY$ が成立つ。