Beschrönktartig な有理型函数に就いて

鍋島　一郎

$\boxed{1}$　$w(z)$ が $|z|<1$ で beschrönktartig とは

$$w(z) = \frac{f(z)}{g(z)}$$

で，$f(z)$，$g(z)$ は $|z|<1$ で正則，且つ $|f(z)| \leqq 1$，$|g(z)| \leqq 1$ とおける事である。

$w(z)$ が $|z|<1$ で有界な Charakteristik T を持てば $w(z)$ は，beschränktartig となり，逆に beschränktartig な函数は有限な Charakteristik を有する。

以下，かゝる函数について，その $f(z)$，$g(z)$ の $z=1$ に於ける角微係数 D_f，D_g の性質，及び $w(z)$ の $z=1$ に於ける角微係数 D を新しく定義してその性質を考える。

$\boxed{2}$　$w(z)$ は $|z|<1$ で beschränktartig な有理型函数とする。

$$w(z) = \frac{f(z)}{g(z)}$$

$$f(1)=g(1)=1 \quad とし, \quad D=D_f-D_g$$

を $w(Z)$ の $Z=1$ に於ける角微係数と定義する。

［注意］ 特に $w(Z)$ が, $|Z|<1$ で正則で, $|w(Z)|<1$ の時には,

$$w(Z)\equiv f(Z), \quad g(Z)\equiv 1$$

と考えれば, $D=D_f$ となり, 有界正則函数の角微係数と一致する。

$\boxed{定\ 理}$

$$w_1(Z)=\frac{f_1(Z)}{g_1(Z)}, \quad w_2(Z)=\frac{f_2(Z)}{g_2(Z)}$$

$$f_1(1)=g_1(1)=1$$
$$f_2(1)=g_2(1)=1$$

は $|Z|<1$ で *beschränktartig* とし, その角微係数を夫々 D_1, D_2 とし, $|w_1(Z)|\leqq|w_2(Z)|$ とすると,

$$D_1 \geqq D_2$$

となる。

［証明］ $|w_1(Z)|\leqq|w_2(Z)|$

から

$$\left|\frac{f_1(Z)}{g_1(Z)}g_2(Z)\right|\leqq\left|f_2(Z)\right|\leqq 1$$

$f_2(1)=1$ 故, D_{f_1}, D_{g_1}, D_{g_2} 有限とし

$$\lim_{Z\to 1}\frac{d}{dZ}\left(\frac{f_1(Z)}{g_1(Z)}g_2(Z)\right)\geqq D_{f_2}$$

即ち

$$\frac{g_2(1)}{g_1(1)}\left\{D_{f_1}-\frac{f_1(1)}{g_1(1)}D_{g_1}\right\}+\frac{f_1(1)}{g_1(1)}D_{g_2}\geqq D_{f_2}$$

故に

$$D_{f_1}-D_{g_1}\geqq D_{f_2}-D_{g_2}$$

即ち

$$D_1\geqq D_2$$

［注　意］　特に　$w_1(z)$,　$w_2(z)$が　$|z|<1$　で正則ならば,

$$g_1(z)\equiv 1,\quad g_2(z)\equiv 1$$

で　$w_1(z)\equiv f_1(z)$,　$w_2(z)\equiv f_2(z)$

と考え,　$D_{f_1}\geqq D_{f_2}$

となり　Herzigの定理となる。

［定　理］2

$w(z)$　$|z|<1$　で beschränktartig で $|D|<\infty$ ならば, $z=1$ に於ける内接円で, $w(z)$ がその中で正則で, 零点を有しないようなものが存在する。

［証　明］

定理２から　$|D_f-D_g|$　$\therefore D_f<\infty$, $D_g<\infty$

$$\infty>|D|\geqq$$

$$\therefore\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-|a_n|^2}{|1-a_n|^2}<\infty,\quad \sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1-|b_\nu|^2}{|1-b_\nu|^2}<\infty$$

依って題意の如き内接円が存在する。

3 次に D_f，D_g の Charakteristik T による評價を述べる。

定理3

$$w(z)=\frac{f(z)}{g(z)} \qquad (f(1)=g(1)=1) \text{ は } |z|<1 \text{ で}$$

beschränktartig とし，$w(0)\neq 0, \neq\infty$とする。
その Charakteristik を T とし，$f(z)$, $g(z)$ の $z=1$ に於ける角微係數を夫々 D_f，D_g とすると

$$D_f \geqq \frac{e^T-|c_{-m}|}{e^T+|c_{-m}|}$$

$$D_g \geqq \frac{e^T-1}{e^T+1}$$

但し，c_{-m} は，$w(z)$ の 0 の近傍に於ける Laurant 展開の最初の 0 でない係數とする。

ここで等号は

$$f(z)=\frac{z+|c_{-m}|e^{-T}}{1+|c_{-m}|e^{-T}z}$$

$$g(z)=\frac{z+e^{-T}}{1+e^{-T}z}$$

に限る。

［証明］ $h(z)=z\,g(z)$

とおくと，$h(z)$ は $|z|<1$ で正則で

---

(1) 講究録，第三巻，第十三，一四号 P.229 参照

$$|h(z)| < 1 \qquad h(0) = 0$$

$$h'(z) = g(z) + z g'(z)$$

$h(z)$ の $z=1$ に於ける角微係数を D_0 とすると，

$$D_0 = g(1) + D_g = 1 + D_g$$

又，$\qquad h'(0) = g(0)$

故に，Unkelbach の定理[2]により

$$D_0 \geqq \frac{2}{1+|h'(0)|} \quad \text{------------} \quad ①$$

即ち，

$$1 + D_g \geqq \frac{2}{1+|g(0)|} \quad \text{----------} \quad ②$$

然るに

$$T \leqq \log \left| \frac{1}{g(0)} \right| \quad \text{[3]} \quad \text{----------} \quad ③$$

$$\therefore \quad |g(0)| \leqq e^{-T}$$

依つて ② から

$$1 + D_g \geqq \frac{2}{1+e^{-T}}$$

$$\therefore \quad D_g \geqq \frac{2}{1+e^{-T}} - 1 = \frac{e^T - 1}{e^T + 1}$$

となる。

次に $\dfrac{1}{w(z)} = \dfrac{g(z)}{f(z)}$ を考えると，その Charakteristik は $T - \log|c_m|$ であるから，上と同様にして

---

(2) 小松勇作・等角写像論 P. 425

(3) Nevanlinna. Eindeutige Analytischen Funktionen P. 179.

$$D_f \geqq \frac{e^{T-\log|c_{-m}|}-1}{e^{T-\log|c_{-m}|}+1}$$

即ち

$$D_f \geqq \frac{e^{T}-|c_{-m}|}{e^{T}+|c_{-m}|}$$

となる。

D_g の等号は ①, ③ で等号が成立するを要する。

① で, 等号が成立するのは

$$h(z) = z\,\frac{z+|h'(0)|}{|h'(0)|z+1}$$

即ち,

$$z\,g(z) = z\,\frac{z+|g(0)|}{|g(0)|z+1}$$

$$\therefore \qquad g(z) = \frac{z+|g(0)|}{|g(0)|z+1}$$

に限り, ③ で等号が成立する故

$$T = \log\left|\frac{1}{g(0)}\right| \qquad \therefore\ |g(0)| = e^{-T}$$

故に.

$$g(z) = \frac{z+e^{-T}}{1+e^{-T}z} \qquad \text{に限る。}$$

同様にし D_f の等号は

$$f(z) = \frac{z+e^{-T+\log|c_{-m}|}}{1+e^{-T+\log|c_{-m}|}z}$$

$$= \frac{z+|c_{-m}|\,e^{-T}}{1+|c_{-m}|\,e^{-T}z}$$

に限る。 （証　終）

定 理 4.

$$w_1(z)=\frac{f_1(z)}{g_1(z)}, \quad w_2(z)=\frac{f_2(z)}{g_2(z)}$$

beschränktartig とし，

$$f_1(1)=g_1(1)=1, \quad f_2(1)=g_2(1)=1,$$

$$|w_1(z)|\leqq|w_2(z)|$$

とし，$w_1(z)$，$w_2(z)$ の Charakteristik を夫々 T_1，T_2 とし，0 の近傍に於ける Laurent 展開の最初の 0 でない係数を夫々 C_1，C_2 とすると，

$$D_{f_1}+D_{g_2}\geqq \max\left\{\frac{e^{T_2}-|C_2|}{e^{T_2}+|C_2|}+\frac{e^{T_1}-1}{e^{T_1}+1};\ \frac{e^{T_1}-|C_1|}{e^{T_1}+|C_1|}+\frac{e^{T_2}-1}{e^{T_2}+1}\right\}$$

［証 明］　定理 1 により $D_{f_1}-D_{g_1}\geqq D_{f_2}-D_{g_2}$

$$\therefore \quad D_{f_1}+D_{g_2}\geqq D_{f_2}+D_{g_1}$$

これに定理 3 の評價を用ひればよい。

定 理 5.

$$w(z)=\frac{f(z)}{g(z)}$$ $|z|<1$ で beschränktartig とし，その

境界点の各近傍で $|w(z)|\leqq 1$ とし，$w(z)$ は n 個の零点 $\{a_{nv}\}$，m 個の極 $\{b_\mu\}$ を有するとする。

$f(1)=g(1)=1$ とすると

$$D\geqq\sum_{v=1}^{n}\frac{1-|a_v|^2}{|1-a_v|^2}-\sum_{\mu=1}^{m}\frac{1-|b_\mu|^2}{|1-b_\mu|^2}$$

となる。

[証　明]

$$\varphi_1(z)=\prod_{\nu=1}^{n}\frac{1-\bar{a}_\nu}{1-a_\nu}\,\frac{z-a_\nu}{1-\bar{a}_\nu z},\qquad \varphi_2(z)=\prod_{\mu=1}^{m}\frac{1-\bar{b}_\mu}{1-b_\mu}\,\frac{z-b_\mu}{1-\bar{b}_\mu z}$$

とおくと，

$$W(z)=w(z)\frac{\varphi_2(z)}{\varphi_1(z)}$$ は $|z|<1$ で正則で

$|W(z)|\leqq 1$ となる。

$$\therefore\quad |w(z)|\leqq\left|\frac{\varphi_1(z)}{\varphi_2(z)}\right|$$

$\varphi_1(1)=\varphi_2(1)=1$ であるから，定理1により

$$D\geqq D_{\varphi_1}-D_{\varphi_2}=\sum_{\nu=1}^{n}\frac{1-|a_\nu|^2}{|1-a_\nu|^2}-\sum_{\mu=1}^{m}\frac{1-|b_\mu|^2}{|1-b_\mu|^2}$$

となる

(証終)